4- MESURES DE RISQUE

mesurer les risques… utile voire nécessaire pour :

- suivi et gestion des risques
- mesure des performances
- allocation optimale des fonds propres
- conformité aux obligations réglementaires (nationales, internationales)

→ synthétiser en un seul nombre le *risque* d'un portefeuille d'actifs financiers

un portefeuille de valeur W_0 (à la date 0) vaudra W_T à l'horizon T

Perte (Loss) : $L_T = W_0 - W_T$

Gain (profit) : $G_T = W_T - W_0 = - L_T$

→ risque de perte apprécié à partir de la distribution des pertes :

$$F_L(x) = \text{Proba}(L_T \leq x)$$

OBJECTIFS DU CHAPITRE :

à la fin de ce chapitre, vous devrez savoir...

- calculer et interpréter la volatilité historique d'un portefeuille
- interpréter les indices de volatilité de marché (VIX, VCAC...)
- expliquer la Value at Risk comme mesure de risque et son lien avec le « capital économique »
- calculer la VaR globale (historique, gaussienne) d'un portefeuille
- effectuer une opération simple de « back testing » d'un modèle de VaR

PLAN :

1- La volatilité comme mesure du risque
2- Volatilité implicite - Volatilité historique
3- Prévoir l'évolution de la volatilité
4- Problèmes posés par la volatilité comme mesure du risque
5- La Value-at-Risk (VaR)
6- Problèmes posés par la VaR comme mesure de risque
7- Back testing

Bibliographie :

Farber, Laurent, Oosterlinck, Pirotte (2011), *Finance*, Pearson Education (ch. 9)
Hull (2010), *Gestion des risques et institutions financières*, Pearson Education
Poncet & Portrait (2012), *Finance de Marché*, Dalloz
Crouhy (2008), « Les mesures de risques et leurs limites », Rapport CAE n°78, La Doc Fr
Taleb (1997), *Dynamic hedging*, Wiley (module E)
Tiesset & Troussard (2005), « Capital réglementaire et capital économique », *Revue de la stabilité financière*, n° 7, Novembre
West (2010), « Coherent VaR-type Measures », http://finmod.co.za/#our-research
Lleo (2009), « Risk Management :A Review », *The Research Foundation of CFA Institute Literature Review*

1- LA VOLATILITÉ COMME MESURE DU RISQUE

cf. Markowitz (1952)

volatilité : mesurée par l'écart-type des rentabilités par unité de temps

rentabilité : $R_T = \ln W_T - \ln W_0$ → rentabilité logarithmique sur la période $[0, T]$

$r_1 = \ln W_1 - \ln W_0$ → rentabilité logarithmique sur la période $[0, 1]$

$r_t = \ln W_t - \ln W_{t-1}$ → rentabilité logarithmique sur la période $[t-1, t]$

si les r_t sont iid d'écart-type σ :

→ variance : $V(R_T) = V\left(\sum_{t=1}^{T} r_t\right) = T\,\sigma^2$ → volatilité : $Volat(R_T) = \sigma\sqrt{T}$

- Action de volatilité journalière 0,02%

→ volatilité hebdomadaire = $0{,}02\,\% \times \sqrt{5} \approx 4{,}47\,\%$ à 5 jours/semaine

→ volatilité annuelle = $0{,}02\,\% \times \sqrt{252} \approx 31{,}75\,\%$ à 252 jours/an

- Action de volatilité annuelle 30%

→ volatilité hebdomadaire = $30\,\% \times \sqrt{1/52} \approx 4{,}16\,\%$ à 52 semaines/an

→ volatilité journalière = $30\,\% \times \sqrt{1/252} \approx 1{,}89\,\%$ à 252 jours/an

Si les rentabilités sont r_t sont d'écart-type σ et corrélées à l'ordre 1,
avec $\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-1}) = \rho\sigma^2$:

$$V(R_T) = T\sigma^2 + T(T-1)\rho\sigma^2 \;\rightarrow\; Volat(R_T) > \sigma\sqrt{T} \quad \text{si } \rho>0$$

Si les rentabilités sont r_t sont d'écart-type σ et corrélées à l'ordre j,
avec $\mathrm{Cov}(r_t, r_{t-j}) = \rho^j\sigma^2$:

$$V(R_T) = T\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{t=1}^{T} (N-t)\rho^t \;\rightarrow\; Volat(R_T) > \sigma\sqrt{T} \quad \text{si } \rho>0$$

2- VOLATILITÉ IMPLICITE – VOLATILITÉ HISTORIQUE

volatilité historique = écart-type des rentabilités logarithmiques sur une « période » donnée calculé sur un échantillon donné de *n* périodes

Rentabilité logarithmique : $R_i = \ln W_i - \ln W_{i-1}$ sur une « période » (ex : jour)

Estimation de l'écart-type sur un échantillon de *n* périodes (ex : sur 30 jours) :

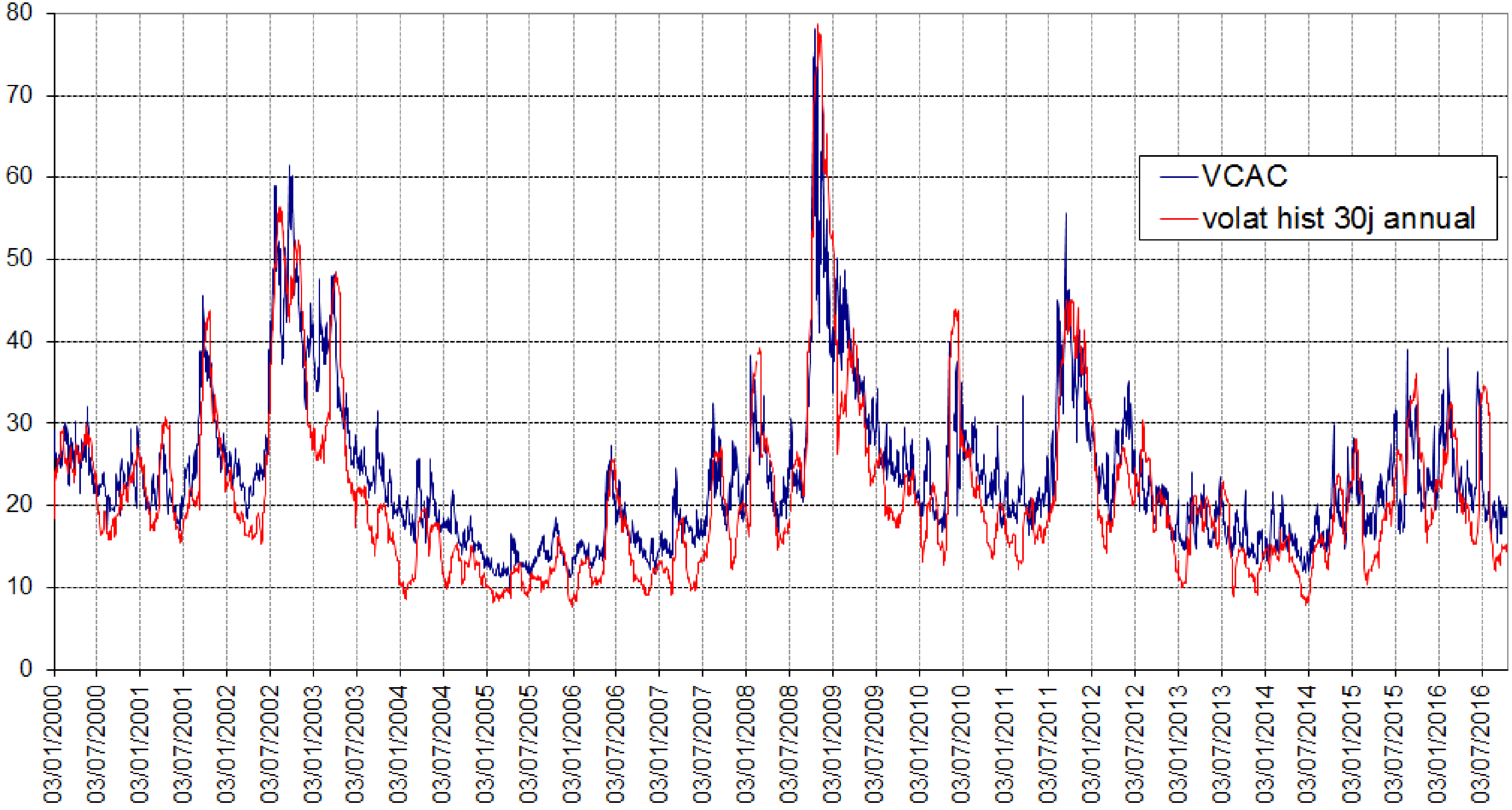
- $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2}$ où $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i$ est la moyenne des R_i.

- $\hat{\sigma}$ est un estimateur de la volatilité « périodique » (ex : journalière)
- son écart-type vaut $\hat{\sigma} / \sqrt{2n}$

ex : la volatilité calculée sur 30 jours est 20,56% (CAC40 le 23/06/2016)
→ écart-type 2,65 %
→ intervalle de confiance à 95 % (± 2 écarts-types) : 15,25% à 23,21%

volatilité implicite = volatilité déduite du prix des options

indices de volatilité (ex : CAC 40 Volatility Index) : reflètent la volatilité attendue de l'indice sous-jacent durant les trente prochains jours.



La volatilité comme indicateur synthétique de risque des OPC

Document d'information clé pour l'investisseur (DICI) :

- AMF : *Guide des documents réglementaires des OPC* – DOC 2011-05
- Recommandations du CESR à la Commission européenne concernant l'indicateur synthétique de risque et de rendement (CESR/10-673)
(ESMA remplace CESR depuis 2011)

cf. http://ec.europa.eu/finance/finservices-retail/investment_products/index_fr.htm
https://www.esma.europa.eu/press-news/consultations/consultation-paper-priips-key-information-documents
http://www.amf-france.org/ et http://www.afg.asso.fr/

- Règlement (UE) n°1286/2014 sur les *documents d'informations clés relatifs aux produits d'investissement packagés de détail et fondés sur l'assurance* (« PRIIPS KID »)
→ Projet de normes techniques sur la présentation, le contenu, le réexamen et la révision (Comm Eur, juin 2016, rejeté par le Parlement Europ. en sept 2016)
- Joint Commitee of the European Supervisory Authoristies (ESMA, EBA, EIOPA) :
  - discussion papers : JC/DP/2014/02 ; JC/DP/2015/01
  - *Final draft regulatory technical standards* : JC/2016/21 March 2016

CESR/10-673 :
un « **indicateur de risque** » simple, en 7 tranches (« *buckets* »)

fondé sur la volatilité historique du fonds, **annualisée**, estimée à partir des rendements hebdomadaires (sur 5 ans, soit 260 semaines) :

$$\hat{\sigma}_{hebo} = \sqrt{\frac{1}{260-1}\sum_{i=1}^{260}(R_i - \bar{R})^2} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{ann} = \hat{\sigma}_{hebdo} \times \sqrt{52}$$

indicateur de risque (market risk measure)

← **Risque plus faible**						**Risque plus élevé** →
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
vol < 0,5 %	0,5 % - 2%	2 % - 5 %	5 % - 10 %	10 % - 15 %	15 % - 25 %	vol > 25 %

Établissement des classes : suite à tests et consultation des parties prenantes

- Révision annuelle du DICI → Éviter des changements de classes trop fréquents
- Avoir assez de pouvoir discriminant entre fonds

Final draft regulatory technical standards : JC/2016/21 March 2016

→ permettre des comparaisons objectives entre tous les produits d'investissement de détail (*Packaged Retail and Insurance-based Investment Products, PRIIPs*) offerts dans l'UE.

selon une méthode

- pratique pour les produits dont les rendements sont distribués normalement,
- capable de prendre en compte les distributions non normales (produits structurés, garantie du capital...)
- capable de refléter le risque de perte (*downside risk*) → VaR , ES...

indicateur de risque (market risk measure)

← Risque plus faible				**Risque plus élevé →**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
VEV < 0,5 %	0,5 % - 5 %	5 % - 12 %	12 % - 20 %	20 % - 30 %	30 % - 80 %	VEV > 80 %

VEV (VaR-equivalent volatility) = volatilité annualisée correspondant à la VaR au seuil de confiance de 97,5% à l'horizon de détention recommandée

projet critiqué par la profession + rejeté par le Parlement européen en sept. 2016

3- PRÉVOIR L'ÉVOLUTION DE LA VOLATILITÉ

La volatilité n'est pas constante dans le temps...
(NB : ce phénomène induit un « risque de modèle » pour évaluer les options).

→ nécessité d'un suivi quotidien

typiquement :

- « clusters de volatilité » : la volatilité en t a plus de chance d'être élevée si la volatilité en $t - 1$ l'était (un choc augmentant la variance en $t - 1$ augmente aussi la variance en t)
  → alternance de périodes de volatilité haute et de périodes de volatilité basse
  → retour vers la moyenne
- asymétrie : les chocs négatifs en $t - 1$ ont un impact plus fort sur la variance en t que les chocs positifs

(voir : http://vlab.stern.nyu.edu/)

Exemple : modèle GARCH(1,1) (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity)

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

où : α, β et γ sont des paramètres (pondérations) tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$

V_L est la variance moyenne de long terme

→ le modèle GARCH :

- accorde un poids à la volatilité de long terme,
- rend compte du retour à la moyenne (*mean-reverting*) de la variance constaté empiriquement
- génère des distributions de rentabilités à queues épaisses : probabilité d'événements extrêmes (rentabilités très positives ou très négatives) + élevée que sous hypothèse de distribution gaussienne
- doit être affiné pour rendre compte des effets asymétriques des chocs (modèles Threshold-GARCH, Asymmetric-GARCH, Exponential-GARCH...)

→ estimation $\sigma_t^2 = \omega + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \rightarrow \omega = \gamma V_L$ et $\gamma = 1 - (\alpha + \beta)$

APPLICATIONS :

1- L'indice SP500 a clôturé hier à 1040, sa volatilité quotidienne est estimée, à ce moment, à 1%. Les paramètres du modèle GARCH(1,1) sont :
$\alpha = 0{,}06$; $\beta = 0{,}92$ et $\omega = 0{,}000002$.

- Si l'indice clôture aujourd'hui à 1060, quelle est la nouvelle estimation de sa volatilité ?

2- Les paramètres d'un modèle GARCH(1,1) sont estimés à : $\alpha = 0{,}05$; $\beta = 0{,}92$ et $\omega = 0{,}000004$.

- Quel est le niveau moyen de volatilité de long terme ?
- Comment l'équation du modèle décrit-elle le caractère « *mean-reverting* » du processus ?
- Si le niveau actuel de volatilité annuelle est de 20%, quel est le niveau attendu de volatilité dans 20 jours ?

solutions : cf. Hull (2010)

- **Prévision**

le modèle GARCH(1,1) se réécrit : $\sigma_t^2 = (1-\alpha-\beta)V_L + \alpha R_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$

soit : $\sigma_t^2 - V_L = +\alpha(R_{t-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - V_L)$

$$\sigma_{t+n}^2 - V_L = +\alpha(R_{t+n-1}^2 - V_L) + \beta(\sigma_{t+n-1}^2 - V_L)$$

comme $E[R_{t+n-1}^2] = \sigma_{t+n-1}^2$, il donne, pour $n > 0$:

$$E[\sigma_{t+n}^2] = V_L + (\alpha+\beta)^n(\sigma_t^2 - V_L)$$

→ prévision à *n* jours (anticipation rationnelle) de la volatilité.

On peut en déduire :

- une « structure par termes » des volatilités
  (particulièrement utile pour l'évaluation des options d'échéances différentes),
- les effets d'un changement du niveau de volatilité courante

→ voir : http://vlab.stern.nyu.edu/

CAC 40 INDEX GARCH VOLATILITY GRAPH (http://vlab.stern.nyu.edu/)

Volatility Prediction for Monday, November 14, 2016 : 15.**91% (+0.01)**

$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2$ avec $R_t = \mu + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t = z_t\,\sigma_t$ et $z_t \sim N(0,1)$

Estimation (02 janv 1990 - 28 oct 2016) : $\sigma_t^2 = 0{,}03194 + 0{,}08077\ \varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}90172\ \sigma_{t-1}^2$

t-stat (16,646) (36,414) (331,394)

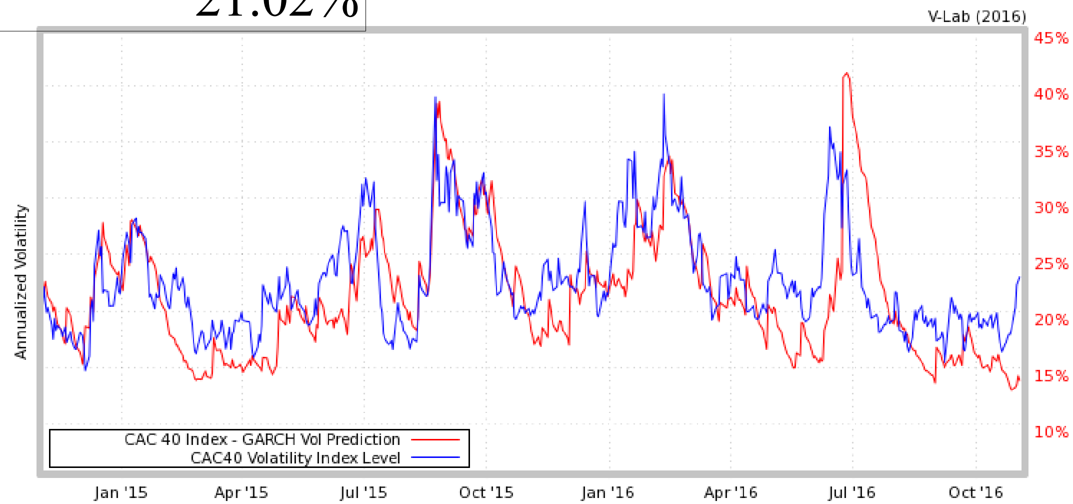
Résumé :

Closing Price:	€4,489.27	Return:	-0.92%
Average Week Vol:	15.95%	Average Month Vol:	14.81%
Min Vol:	11.01%	Max Vol:	71.17%
Average Vol:	21.69%	Vol of Vol:	21.02%

ne donne pas μ (μ = 0 ?)
estime volat quotidienne ?
à annualiser à 250j/an ?

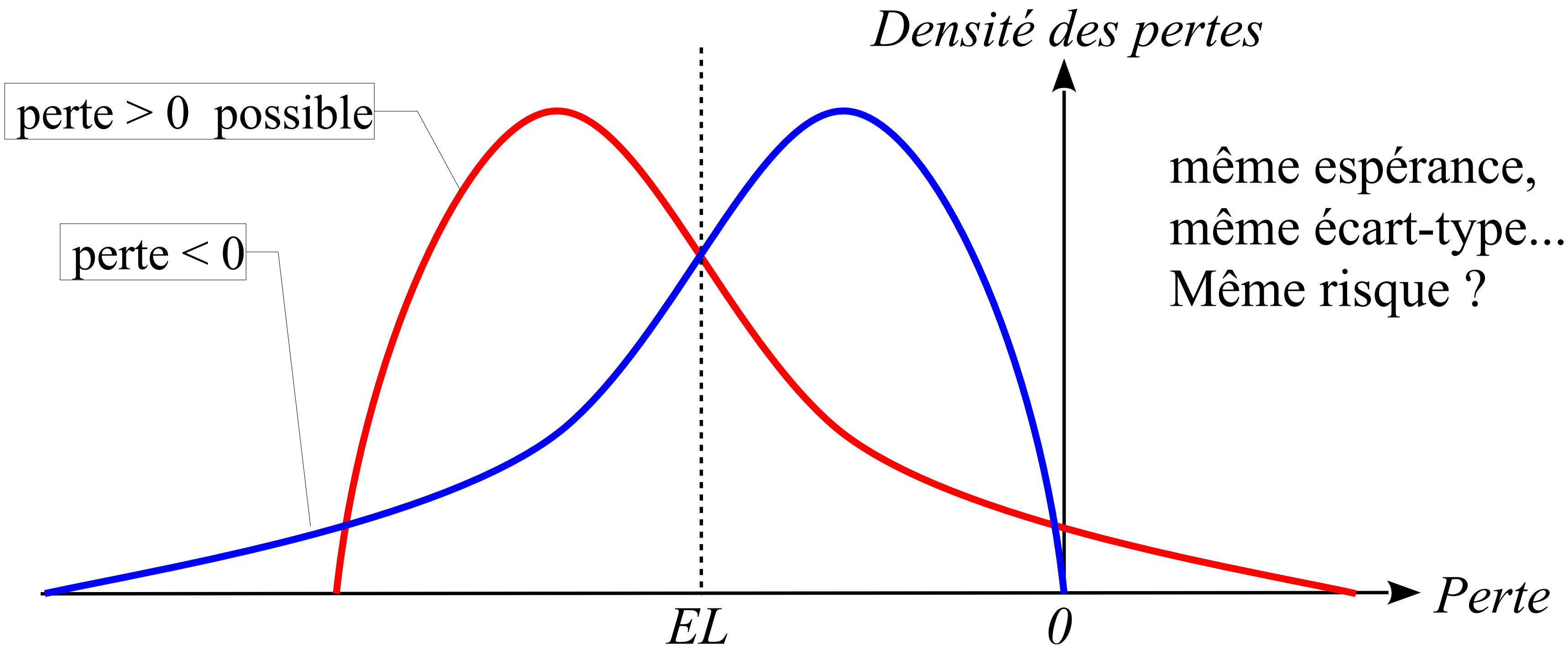
Prévisions :

1 Week Pred:	16.14%
1 Month Pred:	16.90%
6 Months Pred:	19.40%
1 Year Pred:	20.33%



4- VOLATILITÉ COMME MESURE DU RISQUE : PROBLÈMES

Problème 1 : (MEDAF) volatilité → risque total ≠ bêta → risque non diversifiable



Problème 2 : écarts négatifs pris en compte comme les écarts positifs

- pas grave si distribution symétrique par rapport à la moyenne (ex : gaussienne)
- rédhibitoire si distribution asymétrique

→ d'autres caractéristiques des aléas peuvent compter (asymétrie, aplatissement)

5- LA VALUE-AT-RISK (VaR) :

5.1- VaR absolue : un quantile de la distribution

(Règl. Gén. AMF Article 411-73) « ***valeur en risque* = mesure de la perte potentielle maximale compte tenu d'un niveau de confiance donné et sur une période donnée** »

« nous sommes certains à **99 %**
que nous ne perdrons pas plus que **10 M€**
dans les **10** prochains jours » (Hull)

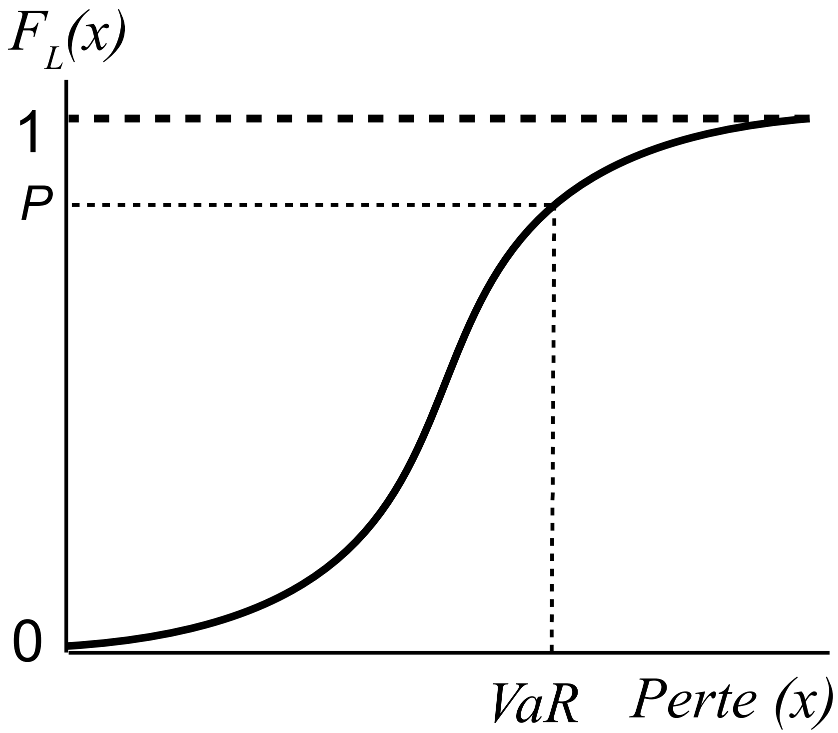
P = 99 *% → seuil de confiance*
VaR = 10 *M€→ Value at Risk*
T = 10 *jours→ horizon temporel*

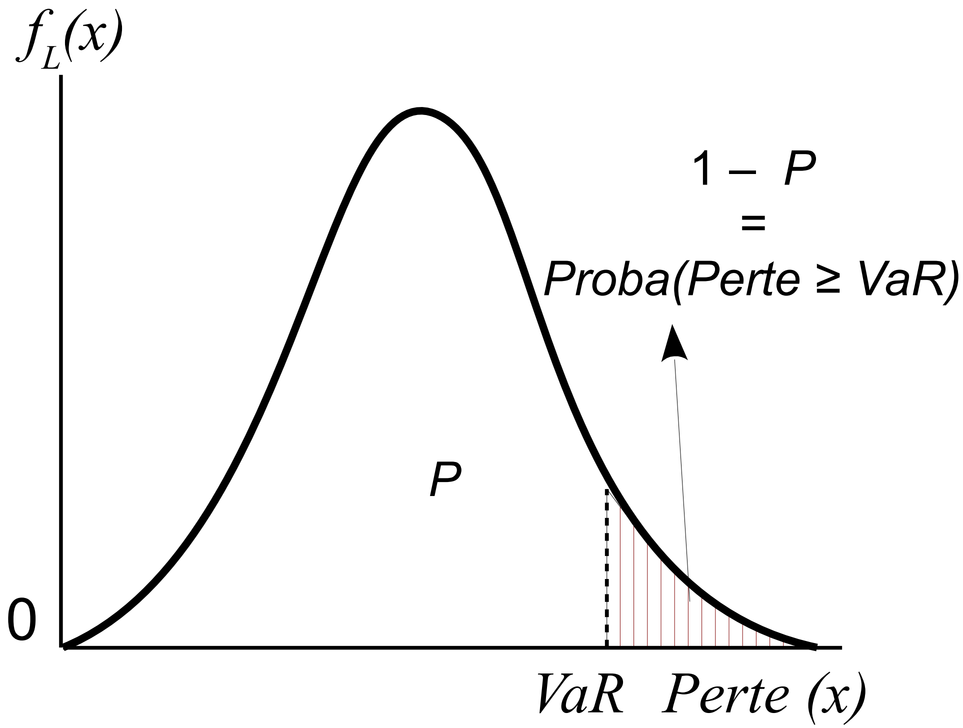
Si la VaR sur le portefeuille de marché est de 10M€ au seuil de 99% sur une période de 10 jours, il y 99% de chances que la perte subie n'excède pas 10 M€ dans les 10 prochains jours.

VaR à 99% à 10 jours =

- *la perte maximale dans 10 j telle que la probabilité de pertes moins élevées soit 99 %*
- *la plus petite perte dans 10 j dans les 1% des cas les pires*

Représentation de la VaR à partir de la répartition/densité des pertes





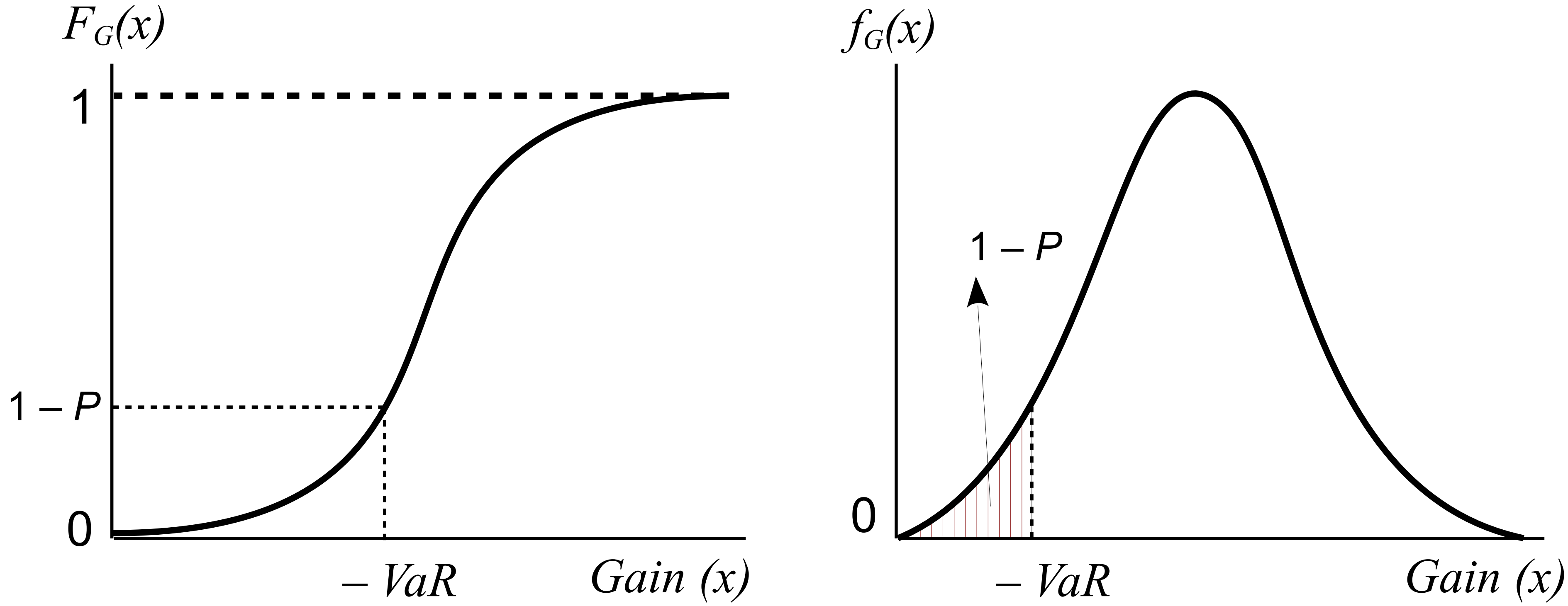
- à partir de la distribution des pertes (sur horizon T) : $Pr(\text{Perte} \leq VaR) = P$

  → **VaR** au seuil P **= « *P* quantile » de la distribution des pertes**

Si la distribution des pertes est $F_L(x)$, la VaR au seuil P est $F_L^{-1}(P)$.

Représentation de la VaR à partir de la répartition/densité des gains

$$\text{Perte} \leq V \Leftrightarrow Gain \geq -V$$



- à partir de la distribution des gains (sur horizon T) : $Pr(\text{Gain} \geq -VaR) = P$

  soit : $Pr(\text{Gain} \leq -VaR) = 1 - P$

  → **VaR** au seuil P **= « 1 – *P* quantile » de la distribution des gains**

Si la distribution des gains est $F_G(x)$, la VaR au seuil P est $F_G^{-1}(1-P)$.

APPLICATIONS :

La VaR au seuil de 95% à un mois d'un fonds de placement vaut 6% de son portefeuille d'actifs. Vous avez investi 100 k€ dans ce fonds.
Comment interprétez-vous la VaR ?

- la probabilité de ne pas réaliser, dans un mois, une perte supérieure à 6000 € est de 95% ;
- on a 95% de chance de terminer le mois en réalisant un gain supérieur à -6000 € ;
- la probabilité de réaliser une perte supérieure ou égale à 6000 € est de 5%.

5.2- Calcul de la VaR absolue :

→ La perte est calculée par rapport à la valeur initiale (→ VaR absolue)

- simple (un seul nombre) cf. écart-type
- directement interprétable ≠ écart-type
- concerne uniquement le mauvais risque ≠ écart-type

Déterminer la distribution des valeurs du portefeuille à l'horizon choisi

- **simulation historique :** supposer que *la distribution passée* des gains est aussi la distribution des gains à venir.

- **méthodes paramétriques** → hypothèses sur les lois des facteurs de risque : VaR gaussienne : *la valeur ou la rentabilité logarithmique du portefeuille suit une loi normale,*
- approche variance-covariance : *identifier les facteurs de risques et leur distribution jointe*

(1) Choix de l'horizon temporel

En fonction de l'horizon de gestion :

– trader, position liquide, activement gérée → 1 jour
– gérant de fonds de pension, performances évaluées mensuellement → 1 mois.

Pour bénéficier d'un nombre suffisant de données :

- (1) estimer la VaR à 1 jour → (2) convertir en VaR à horizon plus long
- tenir compte des hypothèses sur les distributions et les corrélations des pertes

(2) choisir le seuil de confiance

– Maintenir notation de crédit : AA → probabilité de défaut à un an de 0,03%, → choisir seuil de confiance = 99,97% (et horizon 1 an)
– l'estimation de la VaR avec un seuil de confiance élevé est difficile

(3) VaR paramétrique : le cas gaussien

$\Phi(z)$ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt$

$\varphi(z)$ fonction de densité de la loi normale centrée réduite : $\varphi(z) = \dfrac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$

Quantiles de distribution N(0, 1) : $\alpha_P = \Phi^{-1}(P)$ t.q. $\Pr(z \leq \alpha_P) = P$

α_P = LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(P)

proba P	$\alpha_P = \Phi^{-1}(P)$
90,00%	1,282
95,00%	1,645
97,50%	1,960
99,00%	2,326

Si la **variation de la valeur du portefeuille suit une loi normale** :

- Simplification commode et fréquente
- mais pas toujours adaptée (surtout si la distribution est asymétrique)...

$$L_T \sim N(\mu_T, \sigma_T) \quad \Rightarrow \quad \frac{L_T - \mu_T}{\sigma_T} \sim N(0,1)$$

alors : $Pr(L_T \leq VaR) = Pr\left(\frac{L_T - \mu_T}{\sigma_T} \leq \frac{VaR - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P \quad \Rightarrow \quad \frac{VaR - \mu_T}{\sigma_T} = \Phi^{-1}(P)$

$\rightarrow \quad VaR(T, P) = \sigma_T \Phi^{-1}(P) + \mu_T$

En particulier : si la perte est d'espérance nulle

$$L_T \sim N(0, \sigma_T) \quad \Rightarrow \quad VaR(T, P) = \sigma_T \Phi^{-1}(P)$$

→ **la VaR est proportionnelle à la volatilité**

pour un seuil de confiance donné, quel que soit l'horizon

Si la rentabilité logarithmique du portefeuille suit une loi normale :

- $R_T = \ln W_T - \ln W_0 \sim N(\mu,\sigma)$

alors, $L_T = W_0\left(1 - e^{R_T}\right)$ et $VaR(T,P) = W_0\left[1 - e^{\mu - \sigma\alpha_P}\right]$ où $\alpha_P = \Phi^{-1}(P)$

(on le montre en utilisant des règles de calcul sur les quartiles… cf. Poncet & Portrait)

approximation linéaire : $VaR(T,P) \approx W_0\left(-\mu + \sigma\alpha_P\right)$

Si la distribution des rentabilités est caractérisée à partir de rentabilités successives $r_t = \ln W_t - \ln W_{t-1} \sim N(\mu,\sigma)$ **iid**

alors $R_T = \ln W_T - \ln W_0 = \sum_{t=1}^{T} r_t \sim N\left(\mu T, \sigma\sqrt{T}\right)$

→ en déduire la VaR du portefeuille

Exemples de calculs de VaR dans le cas gaussien :

(1) Si le gain à six mois d'un portefeuille suit une distribution normale de moyenne 2 M€ et d'écart-type 10 M€, quelle est la VaR au seuil de 99%, à l'horizon de 6 mois ?

(2) Si la rentabilité logarithmique à 1 an d'un portefeuille suit une loi normale de moyenne – 0,0213 et d'écart-type 0,2159 quelle est la VaR à horizon d'un an, d'un portefeuille de 10 M€ au seuil de 97,5 % ? au seuil de 99 %?

(3) Si la rentabilité logarithmique quotidienne d'un portefeuille suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type 1,4 points de pourcentage, quelle est la VaR au seuil de 97,5 %, à horizon d'un an, d'un portefeuille de 10 M€ (en supposant 250 jours de marché par an) ?

Application : ***Superix***

Vous êtes « conseiller clientèle » de la *Handsome and Sophisticated Banking Company*. Un de vos riches clients, M. B. De La Bath, souhaite investir environ 100000 € pour 30 jours dans un produit en « unités de compte », ***Superix***.

Calcul de la perte :

	A	B	C	D	E
2	**Date**	**Superix**	**Perte constatée à 30j en %**	**Perte à 30j pour 100k€ investis**	**Log-Rentab quotid. en %**
3	*Plus récent*	4637,06	=(B33-B3)/B33	=C3*100000	=LN(B4)-LN(B3)
4	*...*	4677,14	=(B34-B4)/B34	=C4*100000	=LN(B5)-LN(B4)
5	*Plus ancien...*	...	...	...	...

Calcul de VaR (en utilisant des données sur 1000 jours) **:**

(1) Si **perte normale** (VaR gaussienne) :

VaR(99%,30j)	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(99%;MOYENNE($D3:$D1002); ECARTYPE.STANDARD($D3:$D1002))

(2) Si **log-rentabilité normale** :

Ecart-type des rentabilités (σ) :	ECARTYPE.STANDARD($E3:$E1002)

si on admet que les rentabilités quotidiennes suivent une loi normale N(0, σ) iid :

- on peut écrire que les rentabilités à 30 jours suivent une loi N(0, σ √30) iid ;
- la VaR est proportionnelle à l'écart-type : VaR(30j,99%) ≈ 2,326 σ √30.

VaR(99%,30j)	=LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE.N(99%) *ECARTYPE.STANDARD($E3:$E1002)*RACINE(30)

(3) VaR historique :

VaR(99%,30j) 'historique' :	=-PETITE.VALEUR(D3:D1002;990)

→ calcul de la 990ème plus petite valeur des *pertes* sur 1000 pour une VaR(99%) historique

Application : « indicateur de risque » pour les OPCVM, en 7 tranches

cf. CESR/10-673

selon la volatilité...

pour les fonds structurés (rentabilités conditionnelles, à des dates prédéfinies…) :

→ la volatilité correspondant à la VaR(99%) à échéance selon le principe :

(1) estimer les paramètres de la loi de la rentabilité à échéance sous l'hypothèse :

$R_T = \ln W_T - \ln W_0 \sim N\left(\left(r_f - \sigma/2\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$

où T est l'échéance en semaines, r_f et σ sont le taux sans risque (taux de swap) et la volatilité hebdomadaires, W est la valeur de l'actif net du fonds.

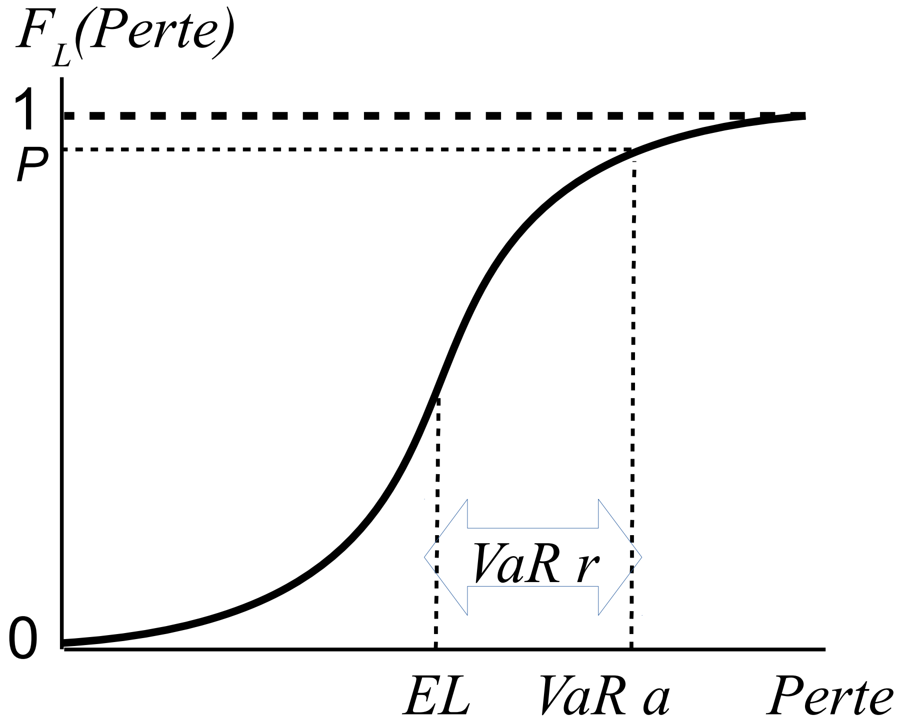
(2) isoler $R_{1\%}$, le 1er centile de la distribution de la rentabilité logarithmique (pour une VaR à 99%)

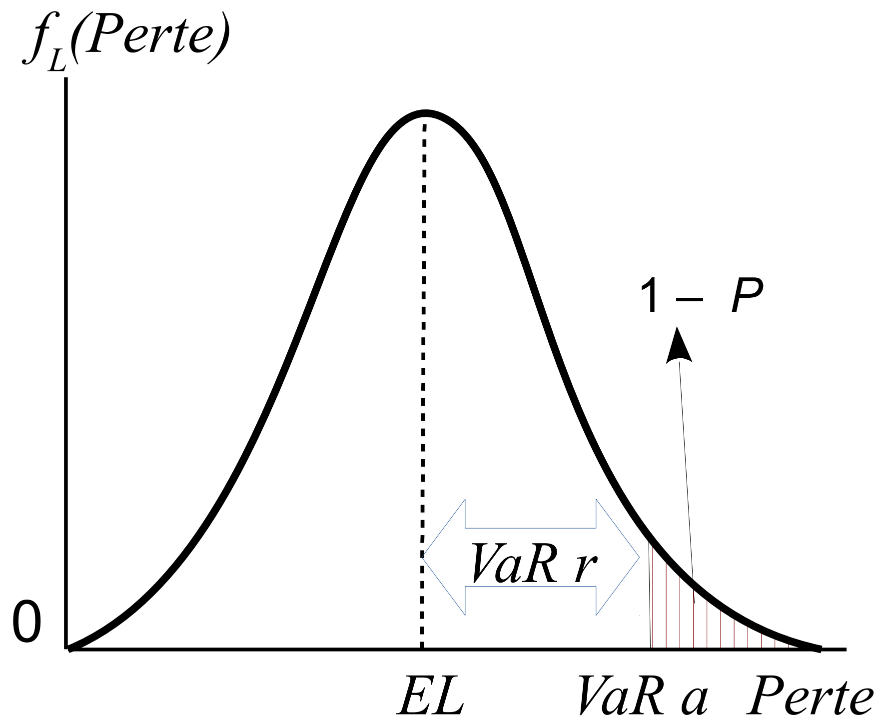
(3) retrouver σ à partir de $R_{1\%} = -(r_f - \sigma^2/2)T + 2{,}33\,\sigma\sqrt{T}$ où $2{,}33 \approx \Phi^{-1}(99\ \%)$

(4) annualiser : la volatilité servant à déterminer la classe de risque est $\sigma\sqrt{52}$.

5.3- VaR relative :

VaR absolue → perte par rapport à la valeur initiale du portefeuille
VaR relative → perte par rapport à la valeur moyenne attendue du portefeuille





VaR absolue au seuil P : $F_L^{-1}(P)$ → VaR relative au seuil P : $F_L^{-1}(P) - \mathrm{E}[L]$

VaR relative au seuil de confiance P	=	VaR absolue perte max au seuil de confiance P	–	Perte moyenne (anticipée)

Gain = – Perte

VaR relative au seuil de confiance P	=	VaR absolue perte max au seuil de confiance P	+	Gain moyen (anticipée)

VaR relative au seuil de confiance P	=	Gain moyen (anticipé)	–	gain minimum au seuil de confiance $1 - P$

VaR relative (à 99%) = distance

- du 99^e centile à la moyenne de la distribution des pertes
- de la moyenne au 1^er centile de la distribution des gains

5.4- Capital économique et VaR relative :

Capital économique : Fonds propres nécessaires pour couvrir ses risques :

- pour couvrir ses pertes *non attendues* sur un horizon temporel donné
- à un seuil de confiance prédéfini

En pratique : le niveau de capital économique (d'une banque) est défini par rapport à un objectif de notation externe :

- accéder au marché interbancaire
- obtenir des conditions de financement compétitives
- capacité à intervenir sur le marché des dérivés, de fait, subordonnée à notation externe ≥ AA ou équivalent :
  - probabilité de défaut de 0,03 % à l'horizon d'un an (sur la base des données historiques des agences de notation)
  - détention d'un montant minimal de capital qui permet aux établissements de couvrir leurs pertes dans 99,97 % des cas (seuil de confiance de 99,97%)

En principe :

Une IF a : $\begin{cases} \text{en début d'année : des fonds propres } K_0 \\ \text{en cours d'année : un résultat net (gain) } G_1 \end{cases}$ $\rightarrow$ en fin d'année : $K_1 = K_0 + G_1$

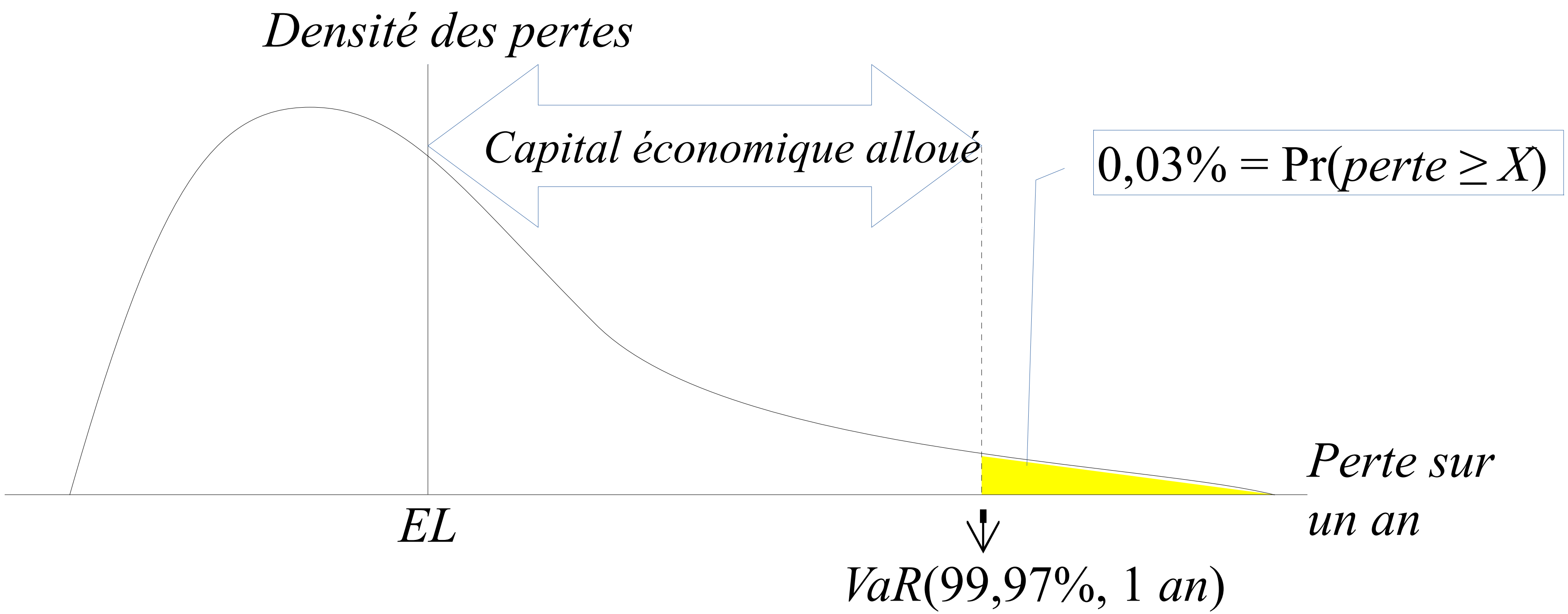
- En première approximation : l'IF « survit » si $K_1 \geq 0$
  $\rightarrow$ proba de survie P = proba($K_1 \geq 0$) = proba($- G_1 \leq K_0$)
  $\rightarrow$ K_0 = Value-at-risk (absolue) au seuil P
  $\rightarrow$ il faut des fonds égaux à K_0 pour assurer la survie avec une proba P

- En deuxième approximation : l'IF survit si elle peut continuer son activté
  $\rightarrow$ si elle peut « supporter » les pertes attendues (EL) de la période suivante (qui ne sont pas nécessairement égales à 0)
  $\rightarrow$ condition de survie/poursuite d'activité : $K_1 \geq EL$
  $\rightarrow$ il faut conserver assez de fonds propres pour absorber une perte attendue $EL = - E(G \mid G<0)$
  $\rightarrow$ proba de survie = proba($K_1 \geq EL$) = proba($- G_1 + EL \leq K_0$)
  $\rightarrow$ K_0 = Value-at-risk (relative) au seuil P
  $\rightarrow$ les fonds propres sont un *coussin* d'absorption des pertes inattendues UL (*unexpected losses*)

L’absorption des pertes est assurée par :

- provisionnement, marges → couverture de la perte moyenne liée aux risques (« expected losses », EL)
- capital économique « coussin » → absorption des pertes exceptionnelles (« unexpected losses », UL) mesurées comme VaR relative

→ avec un seuil de confiance *P*, la probabilité de faillite est de 1 – *P*.



6- PROBLÈMES POSÉS PAR LA VaR COMME MESURE DE RISQUE

- Créée par la banque JP Morgan, largement acceptée par les banques depuis 1993. (détail des modèles internes → « secrets »)
- diffusion de RiskMetrics par la banque JP Morgan en 1994 (risque de marché)
- adoption de la VaR par la BRI (Capital Adequacy Directive, accord de Bâle 2) en 1996-1998
- développement de modèles de VaR pour gérer le risque de crédit...

Avantages prétendus de la VaR :

- facilement compréhensible : en unités monétaires du portefeuille
- synthétique : inclut estimation d'événements futurs
- facile à tester ex-post

Mais...

(1) inclure dans l'analyse *toutes* les variables de risque affectant le portefeuille estimer les probabilités des événements futurs (la distribution des gains)

- besoin de beaucoup de données,
- existence de délais dans la constitution des bases de données,
- difficultés d'estimer des matrices de variances-covariances sur des centaines d'instruments
  → problème en situation d'innovation financière permanente

(2) effets cumulatifs d'une utilisation généralisée :
- en cas de baisse des cours, la VaR augmente
- vendre certaines positions pour maintenir la VaR
  → réallocations de portefeuille qui risquent d'aggraver la baisse des cours… et le risque !
- le risque de liquidité n'est pas pris en compte : en cas de crise de liquidité, les indications données par les modèles ne sont pas pertinentes

(3) dangereuse s’il s’agit de limiter les risques (d'un trader)

ex :

banque limite la VaRà 1 jour au seuil de 99% du portefeuille d'un trader à 10M€ :

– le trader respecte la limite → la perte est inférieure à 10M€ dans 99% des cas

– et dans 1% des cas ? Perte de 500 M€ ? → inacceptable

(4) la VaR n'indique rien de la distribution des pertes au-delà du seuil.

VaR à 99% = *la plus petite perte dans les 1% des cas les pires…*

→ à quelle perte peut-on s'attendre ?

→ « expected shortfall » (« VaR conditionnelle », CVaR, « perte de queue »...)

Expected Shortfall (insuffisance attendue) **:** en cas de dégradation de la valeur d'un portefeuille, au seuil de confiance de *P*, à horizon *T*, quelle est la perte attendue ?

ES	=	E[perte | perte ≥ VaR]
(Expected Shortfall)		espérance conditionnelle de la perte sachant perte ≥ VaR
		(taille moyenne des pertes au-delà de la VaR)

ES à 99% = *la perte moyenne dans les 1% des cas les pires…*

Exemple :

L'expected shortfall au seuil de 95% à un mois du fonds placement vaut 6% de son portefeuille d'actifs. Vous avez investi 100 k€ dans ce fonds. Comment interprétez-vous l'expected shortfall ?

- si l'un des 5% des pires résultats survient (si on termine le mois en réalisant une perte supérieure ou égale à la VaR), il faut s'attendre à réaliser une perte de 6000 € (c'est la perte moyenne dans les 5% des pires cas)

Application : *Superix*.

Les pertes à 30 j sont dans la colonne D ;
La VaR historique au seuil de 99% est dans la cellule G4

Estimation de l'expected shortfall à partir de la VaR historique :

Expected Shortfall au seuil de 99% :	=MOYENNE.SI($D3:$D1002;">="&G4)

Cas gaussien :

$$ES(\alpha) = \mu + \sigma \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^{1} \Phi^{-1}(t)\,dt$$ (Poncet et Portrait, 4° éd., page 906)

α	ES(α)
99%	μ + 2,66521274 σ
97,5%	μ + 2,3378025 σ
95%	μ + 2,062712505 σ
90%	μ + 1,754982462 σ

Expected Shortfall au seuil de 99% :	=MOYENNE($D3:$D1002)+2,66521274*ECARTYPE.STANDARD($D3:$D1002)

(5) la VaR n'est pas « cohérente » (elle n'est pas ***sous-additive***)

considérer une « mesure du risque » comme le montant de liquidités $m(W)$ à ajouter au portefeuille (de valeur W) afin de le rendre *acceptable* pour le régulateur, l'actionnaire...
→ Une mesure du risque doit être « **cohérente** »

en particulier : une mesure de risque doit être ***sous-additive*** :

La mesure du risque de la somme de deux portefeuilles ne doit pas être supérieure à la somme des mesures de risque des portefeuilles.

$$m(W+\Omega) \leq m(W) + m(\Omega)$$

- la sous-additivité implique que la diversification n'accroît pas le risque
- la sous-additivité incite à la consolidation du système d'évaluation des risques au niveau global (pour consommer moins de fonds propres)
- la sous-additivité prévient la tentation de créer des filiales ad-hoc

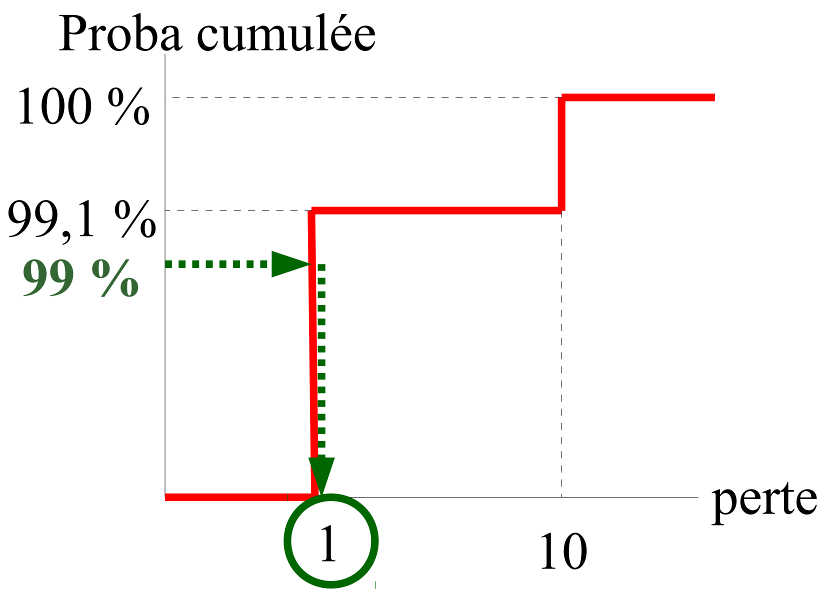
La *VaR* n'est pas « sous-additive ». L'*ES* est « sous-additive ».

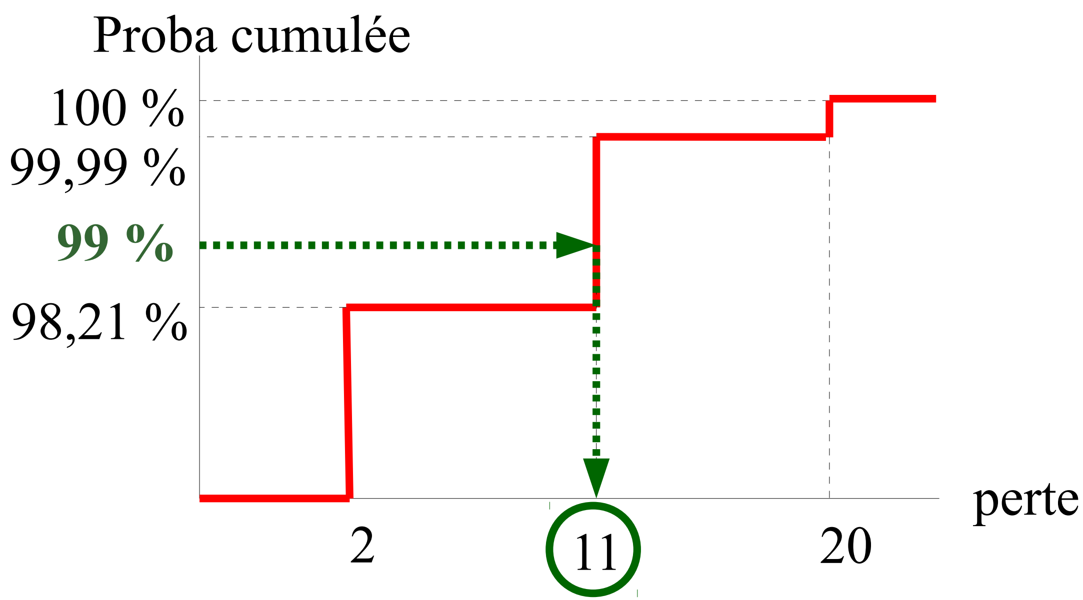
Exemple :

Supposons que deux portefeuilles indépendants dont les montants et probabilités de perte sont 10 M€ à 0,9% et 1 M€ à 99,1%. La probabilité d'un gain est nulle.

- Quelle est la VaR au seuil de 99% d'un portefeuille ? Celle des deux portefeuilles agrégés ?
- Combien vaut l'expected shortfall au seuil de 99% d'un des portefeuilles ? Celle des deux portefeuilles agrégés ? Conclusion ?

Calcul de la VaR :



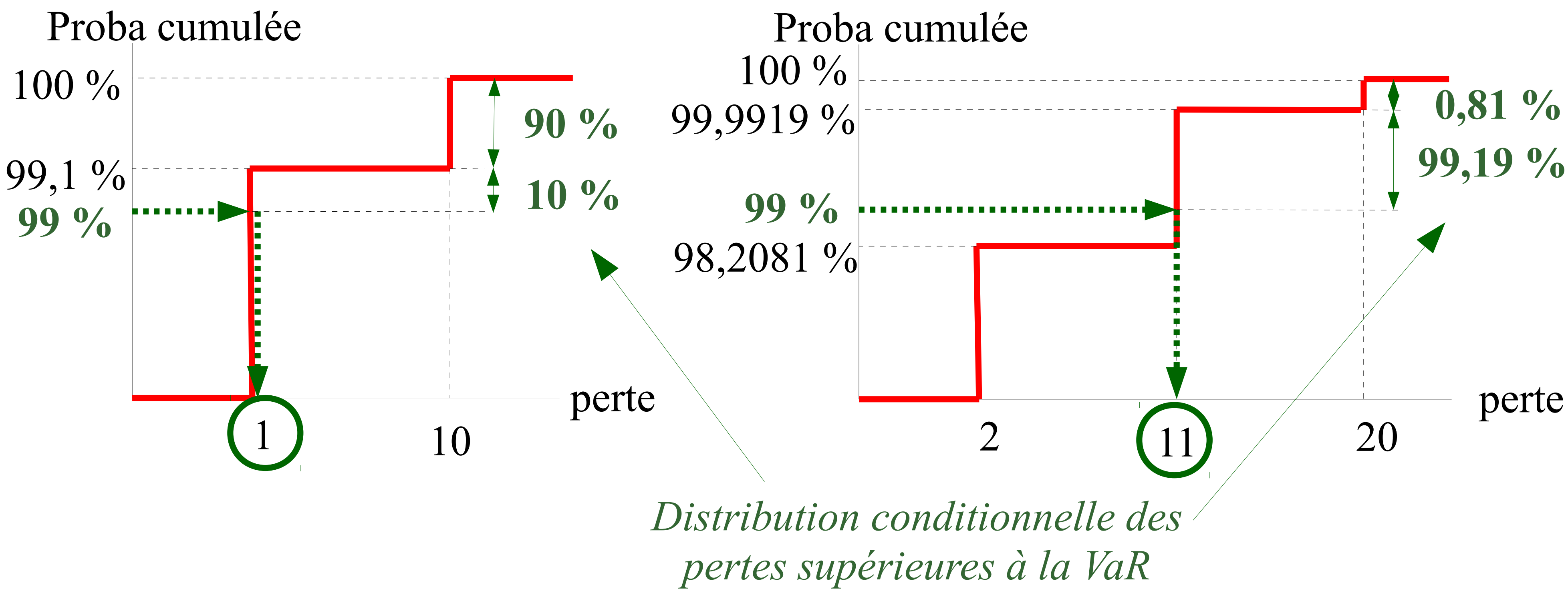


VaR à 99% à un an sur un portefeuille : 1 M€

VaR à 99% sur les portefeuilles agrégés : 11 M€ > 1 M€ + 1 M€

- *la VaR n'est pas sous-additive pour toute distribution des pertes*
- *NB : la VaR est sous-additive si la distribution des pertes est 'elliptique'*
  ex : si la perte est gaussienne d'écart-type σ, la VaR au seuil de 99 % sur deux portefeuilles indépendants vaut 2,326 σ√2 < 2 (2,326 σ)

Calcul de l'ES :



ES à 99% à un an sur un portefeuille : 9,1 M€ $= \dfrac{99{,}1\,\% - 99\,\%}{1\,\%} \times 1\text{ M€} + \dfrac{0{,}9\,\%}{1\,\%} \times 10\text{ M€}$

ES à 99% sur portefeuilles agrégés : 11,07 M€ $= \dfrac{0{,}9919\,\%}{1\,\%} \times 11\text{ M€} + \dfrac{0{,}0081\,\%}{1\,\%} \times 20\text{ M€}$

11,07 M€ < 9,1 M€ + 9,1 M€

- *illustre, sans la prouver, la sous-additivité de l'ES*

Mesure cohérente du risque (Artzner, Delbaen, Eber et Heath 1999) :

- ***monotone*** *:* si un portefeuille a une valeur plus grande dans tous les états de marché, sa mesure de risque ne doit pas être plus grande.
$$W \leq \Omega \;\Rightarrow\; m(W) \geq m(\Omega)$$
- ***homogène*** : si on multiplie par $a \geq 0$ la valeur du portefeuille, sa mesure de risque est multipliée par a.
$$m(aW) = a\, m(W)$$
- ***invariante par translation*** : si on ajoute un montant de liquidité K au portefeuille, sa mesure de risque diminue de K.
$$m(W+[1+r]K) = m(W) - K$$
Une fois le capital requis ajouté à la position, et investi au taux sans risque, la mesure du risque devient nulle : $m(W+[1+r]m(W))=0$
- ***sous-additive*** : la mesure du risque de la somme de deux portefeuilles ne doit pas être supérieure à la somme des mesures de risque des portefeuilles.
$$m(W+\Omega) \leq m(W) + m(\Omega)$$
La diversification n'accroît pas le risque.

7- BACK TESTING

Back-testing = Test des performances des estimations de VaR sur données passées.

→ Vérifier le nombre d'***exceptions*** (nombre de jours où la perte a dépassé la VaR).

Exceptions = 1% des jours → VaR(1j,99%) considérée comme « fiable »
> 1% des jours → VaR(1j,99%) et capital réglementaire sous-estimés
< 1% des jours → VaR(1j,99%) et capital réglementaire sur-estimés

2 méthodes utilisées en pratiques :

- comparer la VaR avec la variation de la valeur du portefeuille recalculée à composition fixe (logique, car la VaR est elle-même calculée à composition fixe)
- comparer la VaR avec la variation de la valeur effective du portefeuille (les variations qui importent en matière de risque)

- **Si on suppose que le modèle d'estimation de la VaR(*T*, *P*) est fiable, alors la probabilité que la VaR soit dépassée est 1 – *P*.**

Si, sur n observations, on constate que la VaR est dépassée m fois, avec $m/n > p$ (plus fréquemment que la probabilité « théorique »), doit-on rejeter le modèle ?
→ faire un test statistique... (le nombre d'exceptions suit une loi binomiale)
problème : quel seuil de confiance des tests ? 5 % ? ...

Exemple :
Considérons un back-testing d'un modèle de VaR à 1 jour en utilisant des données sur 1000 jours. Le seuil de la VaR est 99 %, et 17 exceptions sont observées. Doit-on rejeter le modèle au seuil de 5% ?

Règles du Comité de Bâle :

- des procédures de *back-testing* doivent être mises en place...
- le multiplicateur réglementaire de la VaR(1j, 99 %) dépend du nombre d'exceptions

Solution de l'exemple :
Considérons un back-testing d'un modèle de VaR à 1 *jour en utilisant des données sur* 1000 *jours. Le seuil de la VaR est* 99 %, *et* 17 *exceptions sont observées. Doit-on rejeter le modèle au seuil de* 5% *?*

1000 observations → avec seuil de confiance de VaR = 99 %,
pas plus de 1% d'exceptions, soit pas plus de 10 exceptions

→ faire un test unilatéral :
- hypothèse nulle : « proba d'une except = 1 % »
- hypothèse alternative : « proba d'une except > 1 % »

→ calculer *p-value* = Proba(17 exceptions ou plus)
= 1 – Proba(16 exceptions ou moins)
- dans un tableur : 1 – LOI.BINOMIALE(16;1000;0,01;VRAI)

si *p-value* ≤ 5 % alors
- au seuil de 5%, on ne rejette pas « proba d'une exception > p »
- on rejette l'hypothèse nulle et le modèle de VaR(1 – p)

ici, on obtient *p-value* = 2,64 % → on rejette le modèle de VaR(99 %)

Application : *Superix*.

Les pertes à 30 j sont dans la colonne D ; la VaR à tester est en G1.

On lit ...	*en...*	*avec la formule...*
Nombre d'exceptions	J1	=NB.SI($D3:$D1002;">"&G1)
Probabilités d'avoir le nombre d'exceptions observées ou plus	J2	=1-LOI.BINOMIALE.N(J1-1;1000;0,01;VRAI)
Commentaire	K2	=SI(J2>5%;"pas trop d'exceptions : ne pas rejeter modèle de VaR";"trop d'exceptions : rejeter modèle de VaR")
Probabilités d'avoir moins d'exceptions qu'observé	J3	=LOI.BINOMIALE.N(J1-1;1000;0,01;VRAI)
Commentaire	K3	=SI(J3>5%;"pas trop peu d'exceptions : ne pas rejeter modèle de VaR";"trop peu d'exceptions : rejeter modèle de VaR")

L'intérêt d'un calcul de VaR pour un épargnant :
→ s'assurer contre une perte en capital, en couvrant la VaR par la *rémunération d'un placement* sans risque.

en plaçant $W(t_0)$ initialement	au bout de 30jours :
• $S(t_0)$ = 100k€ dans Supérix, • M sans risque au taux r,	$W(t_0+30) = S(t_0+30) + (1+r).M$ $W(t_0+30) = W(t_0) - [S(t_0) - S(t_0+30)] + r.M$

Où $[S(t_0) - S(t_0+30)]$ = perte subie sur Supérix au bout des 30 jours.

éviter une perte en capital : $W(t_0+30) \geq W(t_0) \Leftrightarrow -[S(t_0) - S(t_0+30)] + r.M \geq 0$

- Ainsi : Proba $[W(t_0+30) \geq W(t_0)]$ = Proba $[S(t_0) - S(t_0+30) \leq r.M]$
- Cette probabilité vaudrait 95% si la rémunération du placement sans risque (r.M) était égale à la VaR(95%) sur Supérix.

Avec des taux d'intérêt à 30 jours négatifs... ça ne « marche » pas !
→ conseiller un épargnant à un horizon plus long ?
→ couvrir l'expected shortfall par la rémunération du placement sans risque ?

ANNEXE A : les paramètres de la VaR dans le cas « gaussien »

- $Perte \sim N(\mu_T, \sigma_T) \quad \Rightarrow \quad VaR(T, P) = \sigma_T \Phi^{-1}(P) + \mu_T$

A.1- Choix de l'horizon temporel : « formules » reliant $VaR(T, P)$ à $VaR(T', P)$

- si les pertes quotidiennes successives sont $N(\mu_1,\sigma_1)$ **non corrélées** entre elles :
  $VaR(T, P) = \Phi^{-1}(P)\sigma_1 \sqrt{T} + \mu_1 T$
  → négliger $\mu_1 T$: $VaR(T, P) \approx \Phi^{-1}(P)\sigma_1\sqrt{T}$ → (1) $VaR(T', P) \approx \sqrt{\frac{T'}{T}} VaR(T, P)$
- si les log-rentabilités quotidiennes successives sont $N(\mu_{R1},\sigma_{R1})$ **non corrélées** :
  $VaR(T, P) = W_0\left(1 - \exp\left(\mu_{R1} T - \Phi^{-1}(P)\sigma_{R1}\sqrt{T}\right)\right)$
  → par approximation linéaire ($T \approx 0$) : $VaR(T, P) \approx W_0\left(\Phi^{-1}(P)\sigma_{R1}\sqrt{T} - \mu_{R1} T\right)$
  → négliger $\mu_{R1} T$: on retrouve (1)
- si les pertes ou les log-rentabilités quotidiennes sont **autocorrélées** : la variance de la perte à T jours et la VaR à T jours sont plus élevée (qu'en absence d'autocorrélation).

A.2- Choix du seuil de confiance : « formules » reliant $VaR(T, P)$ à $VaR(T, P')$

- si les pertes quotidiennes successives sont $N(0,\sigma_1)$ **non corrélées** entre elles :

  $VaR(T, P) \approx \Phi^{-1}(P)\sigma_1\sqrt{T}$ → d'où : $VaR(T, P') \approx \frac{\Phi^{-1}(P')}{\Phi^{-1}(P)} VaR(T, P)$

ANNEXE B : Estimation de la VaR de marché voir Hull (2010)

B.1- Estimation de la VaR de marché par simulation historique

Estimer la distribution de probabilité des pertes d'un portefeuille à partir des variations journalières des variables de marché pertinentes sur une période de temps donnée.

Méthode « non-paramétrique » **:**

- à partir des N variations observées, construire N « scenarii » (N valeurs possibles du portefeuille (par exemple à horizon d'un jour)
  - 1er scénario : les variables de marchés évoluent comme observé le 1er jour
  - 2e scénario : les variables de marchés évoluent comme observé le 2e jour...
- supposer stable dans le temps la distribution jointe des variables de marché
- calculer les N pertes du portefeuille
- en déduire la distribution empirique des pertes du portefeuille
- sur un échantillon de (par exemple) 1000 pertes classées par ordre croissant, la VaR empirique au seuil de 95% sera la 950ème perte.

Variantes : Bootstrap (construire des échantillons « artificiels » en tirant avec remise dans l'échantillon des pertes observées) ; prendre en compte la structure de la volatilité qui, empiriquement, n'est pas constante dans le temps ; améliorer l'estimation en prenant en compte les queues épaisses de la distribution empirique.

B.2- Estimation de la VaR de marché par l'approche variance-covariance

Estimer la distribution jointe des variables de marché pertinentes sur une période de temps donnée.

Méthode :

- déterminer les « facteurs de risque » qui influencent la valeur du portefeuille
- estimer les paramètres de leur distribution jointe (supposée gaussienne multivariée) → l'approche est dite aussi « <u>paramétrique</u> »
- **méthode « delta-normale » :** supposer une relation linéaire entre la perte et les variables de marché (approximation linéaire)
  méthode « quadratique » ou « delta-gamma » : supposer une relation quadratique entre la perte et les variables de marché (approximation au deuxième ordre), plus précise...
- **Simulation de Monte-Carlo :** méthode probabiliste pour simuler les trajectoires des facteurs de risques (étant donné les paramètres de leur distribution jointe)
- en déduire les quantiles de la distribution empirique des pertes du portefeuille