2- Rationalité face au risque

- Les épargnants individuels sont confrontés au risque (de marché)

→ En période de taux d'intérêts bas/négatifs comment obtenir de la rentabilité ?

- Les chargés de clientèle, conseillers en patrimoine ont des obligations de conseil (Directive MIF 2007)
  - évaluation du profil de prise de risque des investisseurs (situation patrimoniale, objectifs de placements)
  - devoir de communiquer des informations correctes et compréhensibles sur les produits
  - vérification de l'adéquation des produits d'investissement au profil du client (ne pas leur faire supporter un risque déraisonnable)

Mais : difficulté à évaluer la tolérance au risque (cf. De Palma & Picard 2011)

Une théorie économique des choix de portefeuille
→ diversifier après avoir collecté de l'information et évalué,
selon aversion pour le risque

Dans les faits, des comportements non « conformes » :

- trop de transactions (par rapport à une stratégie optimale compte tenu des coûts de transaction)
- sur-pondération des actions domestiques au détriment des actions étrangères (« home bias »)
- trop peu d'actions en portefeuille étant donné l'aversion pour risque moyenne des investisseurs (« equity premium puzzle »)
- des décisions des investisseurs moins avisées dès lors qu'ils commencent à passer eux-mêmes leurs ordres en ligne
- tendance à surestimer les petites probabilités, à sous-estimer les grandes probabilités

→ « finance comportementale »

Objectifs :

A la fin de ce chapitre, vous devrez...

- savoir expliquer, appliquer, critiquer, les critères de choix rationnel face au risque
- savoir expliquer les principaux concepts (aversion pour le risque, aversion pour les pertes, aversion pour l'ambiguïté, prime de risque, équivalent-certain, mutualisation, partage du risque, dominance stochastique, effet de disposition/de dotation, comptabilité mentale, théorie des perspectives...)

Plan :

1- LE RISQUE
2- LE CHOIX RATIONNEL EN SITUATION DE RISQUE
3- PARMI DEUX « RICHESSES », QUELLE EST LA « PLUS RISQUÉE » ?
4- MUTUALISATION, DIVERSIFICATION ET PARTAGE DES RISQUES
5- ASSURANCE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE
6- FINANCE COMPORTEMENTALE
ANNEXES : rappels sur les variables aléatoires

Bibliographie :

Arrondel (2015), « L'épargnant entre raison et Passion », *Revue du Conseil scientifique de l'AMF*, n° 2, Mai 2015

Arrondel & Masson (2014), « Mesurer les préférences des épargnants », *Économie et Statistiques*

Barberis & Thaler (2003), « ASurvey of behavioral finance », in G.M. Constantinides, M. Harris & R. Stulz, *Handbook of the Economics of Finance*, Elsevier

Broihanne (2015) « Le comportement des investisseurs individuels : état des lieux et enseignements », *Revue du Conseil scientifique de l'AMF*, n° 2, Mai 2015

De Palma & Picard (2011), *Évaluation des questionnaires MIF en France*, Etude préparée pour l'Autorité des Marchés Financiers (http://www.amf-france.org/)

De Palma, Picard & Prigent (2009). *Prise en compte de l'attitude face au risque dans le cadre de la directive MiFID*. cahier de recherche 2009-35 (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00418892)

Erta & al. (2013), *Applying Behavioural Economics at the Financial Conduct Authority*, FCA occasional-paper n°1 (https://www.fca.org.uk/)

Varian (2015), *Introduction à la microéconomie*, De Boeck (chapitres 12 « l'incertitude », 13 « les actifs à risque », 31 « l'économie comportementale »)

1- LE RISQUE

1.1- Exemple :

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

Un seul parmi deux états se produira dans 10 ans

- bonne conjoncture (H), avec probabilité p = 60 % ;
- mauvaise conjoncture (L), avec probabilité (1 – p) = 40 %.

Deux actifs disponibles :

- Un fonds en UC rapporte soit 50 % (avec proba 60%) soit –20 % (proba 40%).
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

Représentation sous forme de loterie :

Investir dans fonds *UC*

60 % « H » → rentab = 50 %

40 % « L » → rentab = – 20 %

Investir dans fonds *euro*

60 % « H » → rentab = 0 %

40 % « L » → rentab = 0 %

Investir dans *UC*

60 % 50 %

40 % –20 %

0 % 0 %

Investir dans *euro*

0 % 50 %

0 % –20 %

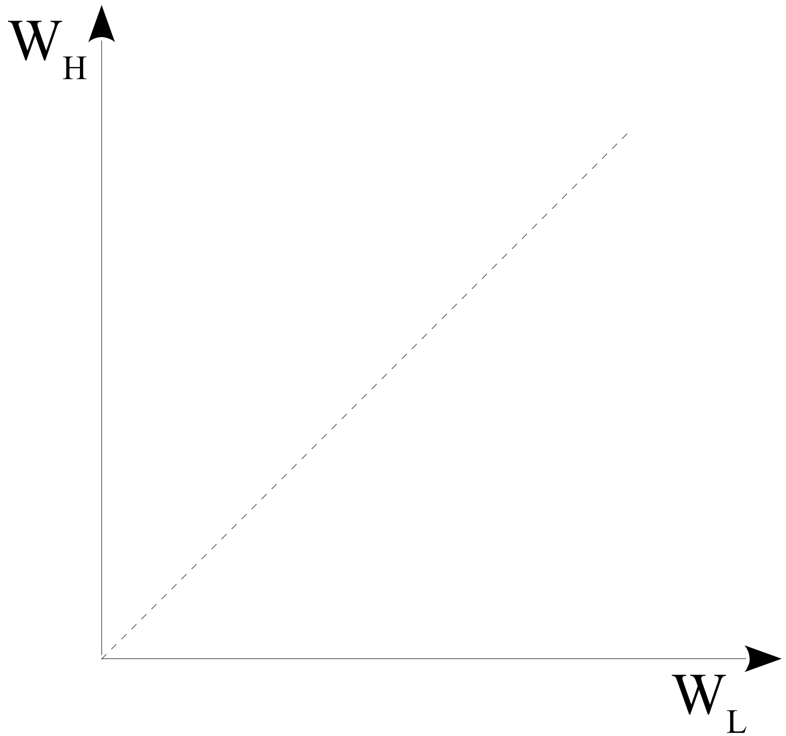
100 % 0 %

→ choisir une action = choisir une distribution de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles

Il décident de placer une proportion x en UC (et 1 – x en fonds euros).

Quelle est leur « richesse » au moment de la retraite ?

richesse...	si $x = 0$	si $0<x<1$	si $x=1$
état H			
état L			
moyenne			
écart-type			



1-2. Source du « risque » = « états de la nature »

un **état de la nature** = une combinaison de valeurs des différentes variables décrivant l'environnement du décideur

- l'ensemble des états de la nature est exhaustif
- les états de la nature sont mutuellement exclusifs
- les états de la nature sont hors de contrôle du décideur

- l'ensemble des états de la nature est connaissance commune
- chaque décideur reconnaît l'état de la nature qui se réalise
- chaque décideur assigne une distribution de probabilité aux états de la nature qui obéit aux lois usuelles :
  - $0 \leq$ Pr(état s) ≤ 1
  - Pr(état s) = 1 → il est certain que l'état s se produira
  - Pr(état s) = 0 → il est certain que l'état s ne se produira pas
  - Pr(état s <u>ou</u> état s') = Pr(état s) + Pr(état s') ; Pr(état s <u>et</u> état s') = 0
  - un au moins des états doit se produire : $\sum$ Pr(état s) = 1

1.3- En finance : représentation du risque par une « loterie monétaire »

- monétaire : biens futurs = quantités de monnaie (richesses, cash-flows)
- loterie = perspective conditionnelle : variable aléatoire réelle

  - des valeurs possibles
  - des probabilités d'occurrence de ces valeurs → fonction de répartition

cf. rappels sur les variables aléatoire en annexe

Le décideur doit choisir son action préférée…

→ représenter chaque action comme une « loterie »

→ caractériser les préférences sur les loteries

2- LE CHOIX RATIONNEL EN SITUATION DE RISQUE

2.1- Question : quel critère d'évaluation d'une loterie ?

Critère de Blaise **Pascal** :

- le « juste prix » est l'espérance mathématique du gain procuré par le billet
- ainsi, en moyenne, le bénéfice net du parieur est nul

MAIS... **« paradoxe de Saint-Pétersbourg »**

On jette une pièce N fois jusqu'à obtenir « pile ». Le parieur gagne alors 2^N RUB.
A la cour de Saint-Pétersbourg, vers 1730, Nicolas Bernoulli n'a trouvé personne prêt à parier plus de 20 RUB.

→ « paradoxe » eu égard au *critère de décision de Pascal* (espérance de richesse)

$$\textit{espérance du gain} = \frac{1}{2}\times 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^N\times 2^N+\ldots=+\infty$$

Résolution du paradoxe :

- Daniel Bernoulli (1738) :
  critère de décision = espérance d'une <u>fonction</u> de la richesse
  → logarithme népérien

  avec une richesse initiale de 1000, le prix du billet max. serait 10,95

- Gabriel Cramer (même époque) → racine carrée

  avec une richesse initiale de 1000, le prix du billet max. serait 12,93

→ la valeur de la loterie n'est pas *objective* (liée aux caractéristiques intrinsèques)

→ solution axiomatisée par **Von Neumann et Morgenstern** (1944)
VNM

2.2- Choix rationnel selon VNM : maximiser l'utilité espérée

Théorème de l'Utilité Espérée (Von Neumann – Morgenstern) :

Si les préférences d'un décideur sur l'ensemble des loteries vérifient quelques hypothèses [*axiomes*], alors il existe une fonction d'utilité (à valeurs réelles) définie sur l'ensemble des loteries, représentant les préférences, ayant la forme d'une « espérance d'utilités » des lots.

$$U(L) = \mathrm{E}[u(l)]$$

U(.) = utilité de la loterie ;
u(.) = utilité des lots (fonction d'utilité de VNM)

Axiomes :

axiomes sur la manière de comprendre les loteries :

- loterie = des lots associés à des probabilités (variable aléatoire)
- Proba de lot = 1 → lot certain
- indifférence à l'ordre de présentation des lots
- réduction des loteries composées (absence d'illusion stochastique) : application de la règle de Bayes

axiomes sur les préférences :

- axiome de complétude, réflexivité et transitivité → préférences « rationnelles »
- axiome de continuité → préférences exprimées sous forme de fonction d'utilité
- axiome d’indépendance → fonction d'utilité de la forme espérance d'utilités

Loterie L donne des lots l_i avec probabilité p_i :

→ critères de Pascal ? De Bernoulli ? De Cramer ?

critère	$u(l)$	$U(L)$
Pascal	$u(l)=l$	$U(L)=p_1 l_1+p_2 l_2+\ldots+p_N l_N$
Bernoulli	$u(l)=\ln(l)$	$U(L)=p_1\ln(l_1)+p_2\ln(l_2)+\ldots+p_N\ln(l_N)$
Cramer	$u(l)=\sqrt{l}$	$U(L)=p_1\sqrt{l_1}+p_2\sqrt{l_2}+\ldots+p_N\sqrt{l_N}$

2.3- Application :

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

- Un fonds en UC rapporte soit 50 %, (avec proba 60%) soit –20 % (proba 40%).
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

Choix « tout ou rien »

critère	$u(l)$	100 % UC	100 % euro
Pascal	$u(l)=l$		
Bernoulli	$u(l)=\ln(l)$		
Cramer	$u(l)=\sqrt{l}$		

Quelle est la composition optimale de leur portefeuille ?

2.4- Caractériser les préférences : l'aversion pour le risque

- riscophobe = qui a de l'aversion pour le risque (*risk-averse*) : $u(.)$ concave
- riscophile = qui aime le risque (risk-lover) : $u(.)$ convexe
- neutre au risque = indifférent (risk-neutral) : $u(.)$ linéaire

un décideur a de l'aversion pour le risque s'il préfère posséder l'espérance des lots d'une loterie avec certitude plutôt que la loterie elle-même :

$$u(w_0 + \mathrm{E}[L]) > \mathrm{E}[u(w_0 + L)]$$

ou :

un décideur a de l'aversion pour le risque s'il n'aime pas toute loterie dont l'espérance mathématique des lots est nulle (risque de moyenne nulle) :

$$u(w_0) > \mathrm{E}[u(w_0 + z)] \text{ avec } \mathrm{E}z = 0$$

→ la concavité de $u(.)$ détermine l'attitude à l'égard du risque

→ cf. inégalité de Jensen : $\boxed{f(x) \text{ concave} \leftrightarrow f(\mathrm{E}[X]) > \mathrm{E}[f(X)]}$

→ mesurer l'**aversion** pour le risque par le « degré de concavité » de $u(.)$:

Coefficient d'aversion **absolue** pour le risque : $A(w_0) = - u''(w_0)/u'(w_0)$

- indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1€, ou 1$…

Coefficient d'aversion **relative** pour le risque : $R(w_0) = \frac{-w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)} = w_0 A(W_0)$

- l'opposé de l'élasticité de l'utilité marginale
- indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1 %
- n'a pas d'unité (≠ aversion absolue pour le risque)

NB :

tolérance au risque = inverse de l'aversion pour le risque

2.5- Équivalent certain, prix d'achat/ de vente d'une loterie, prime de risque

équivalent-certain de la loterie L pour une richesse initiale w_0 :
la somme C qui procure la même utilité que la loterie :

$$\boldsymbol{u(w_0 + C) = \mathrm{E}[u(w_0 + L)]}$$

aversion pour le risque → $\mathrm{E}[L] > C$

prime de risque de la loterie L pour une richesse initiale w_0 : la différence π entre l'espérance et l'équivalent-certain de L : $\pi = \mathrm{E}[L] - C$

$$\boldsymbol{u(w_0 + \mathrm{E}[L] - \pi) = \mathrm{E}[u(w_0 + L)]}$$

aversion pour le risque → prime de risque > 0

prix d'achat : somme certaine PA que le décideur est prêt à payer pour la loterie

$$\boldsymbol{u(w_0) = \mathrm{E}[u(w_0 + L - PA)]}$$

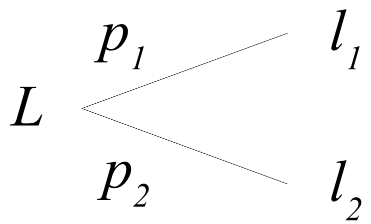
prix de vente : la somme certaine PV que le décideur est prêt à accepter pour céder la loterie :

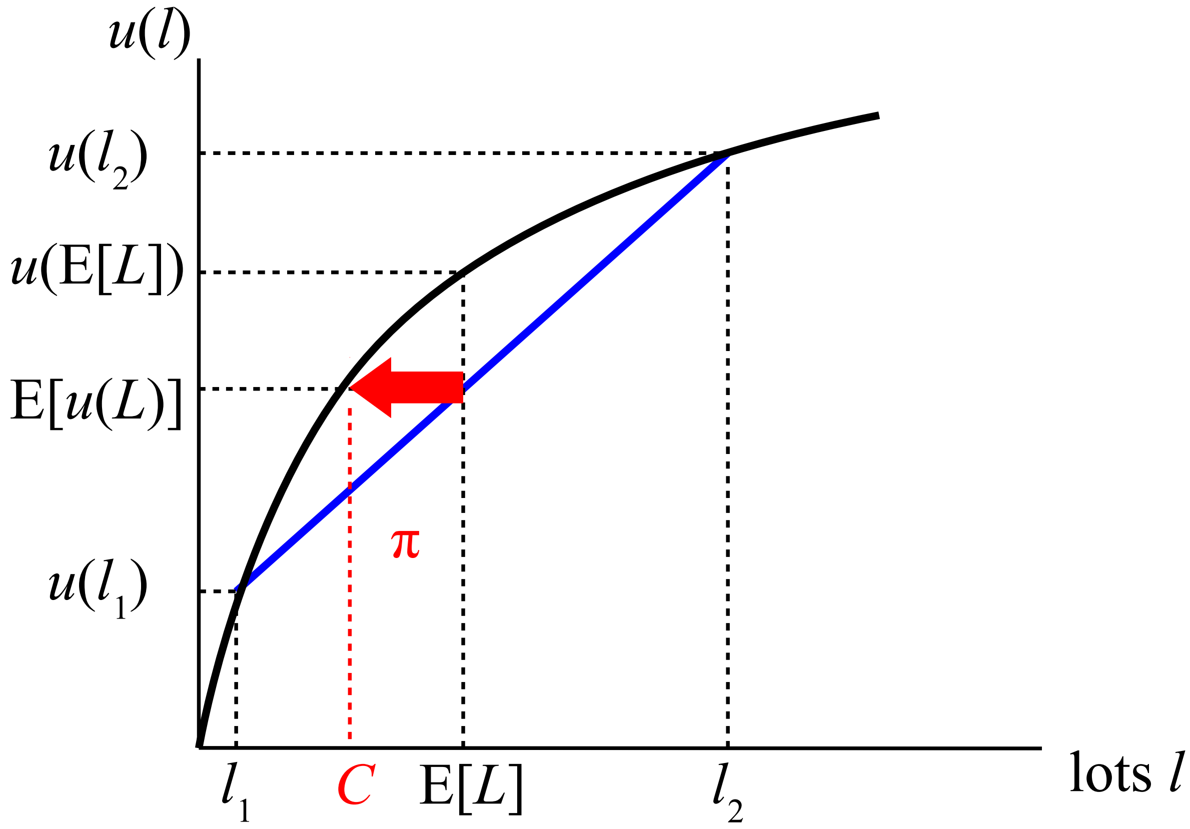
$$\boldsymbol{\mathrm{E}[u(w_0 + L)] = u(w_0 + PV)}$$

→ $PV = \mathrm{E}[L] - \pi = C$

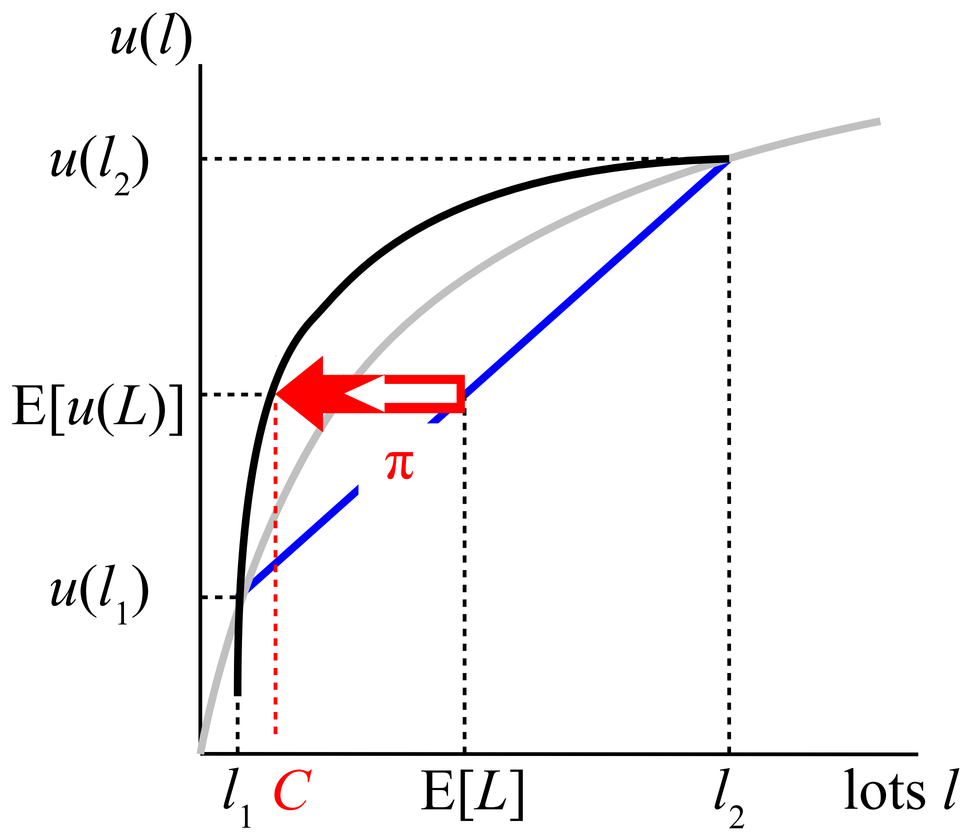
riscophobe → disposé à payer pour réduire son exposition à une risque donné

Représentation de la prime de risque et de l'équivalent-certain



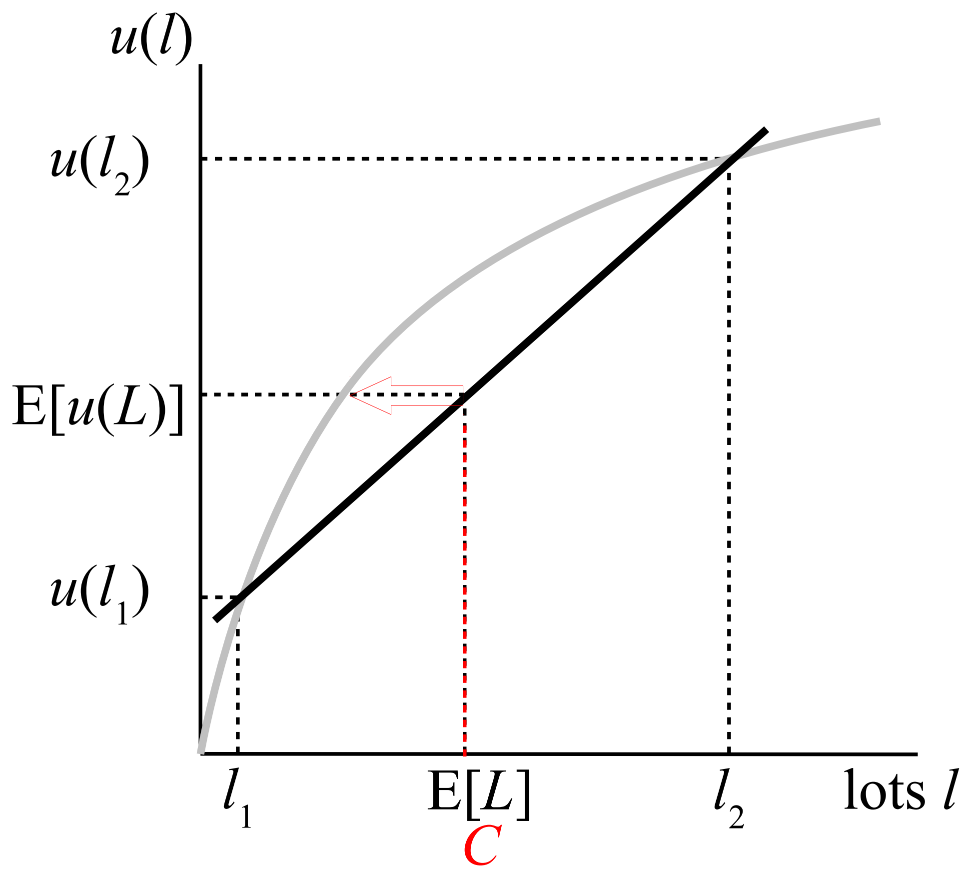


fonction d'utilité plus concave



Prime de risque plus élevée
aversion pour le risque plus forte

fonction d'utilité linéaire



Prime de risque nulle
neutralité au risque

Interprétation de la prime de risque : le « coût du risque »

La somme que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur
(somme positive → riscophobe)

cas d'un aléa (additif) affectant la richesse : $w_0 + L$

- $L = E(L) + z$, avec $E(z) = 0$
- z = « risque pur » (valeur moyenne nulle)

se débarrasser de z en payant π :

- la richesse devient $w_0 + E[L] - \pi$
- acceptable si : $u(w_0 + E[L] - \pi) = E[u(w_0 + L)]$

Le supplément à payer à un décideur pour l'inciter à accepter un risque pur

cas d'une richesse initiale certaine

- ajouter un « risque pur » (valeur moyenne nulle), z → refus
- ajouter un risque pur + une somme certaine c ?
  - acceptable si $u(w_0) = E[u(w_0 + z + c)]$
  - Prime de risque attachée à $w_0 + z + c$:
    π t. q. $u(w_0 + c - \pi) = E[u(w_0 + z + c)]$

$c = \pi$

Remarque (approximation d'Arrow-Pratt) :

pour de « petits » risques, on peut approximer la prime de risque π associée à la richesse $w_0 + x$ par :

$$\pi \approx \frac{1}{2}\sigma^2 A(w_0)$$

la prime de risque dépend de :

- la variance (élément objectif)
- l'aversion absolue pour le risque, les préférences (élément subjectif)

Démonstration :

développement limité au voisinage de w_0 de : $u(w_0 - \pi_A) = \mathrm{E}[u(w_0 + x)]$

à l'ordre 1 : $u(w_0 - \pi_A) \approx u(w_0) - \pi_A\, u'(w_0)$

à l'ordre 2 : $\mathrm{E}[u(w_0 + x)] \approx \mathrm{E}[u(w_0) + x\, u'(w_0) + ½\, x^2\, u''(w_0 + \mu)]$

soit : $\mathrm{E}[u(w_0 + x)] \approx u(w_0 + \mu) + ½\, \sigma^2\, u''(w_0 + \mu)$

d'où : $\pi_A \approx -½\, \sigma^2\, u''(w_0)/u'(w_0)$ soit $\boxed{\pi_A \approx ½\, \sigma^2 A(w_0)}$

2.6- Qui a le plus d'aversion pour le risque ?

Décideur « U » avec fonction d'utilité $u(\ )$ et une richesse certaine w_0

- accepte de prendre un risque x (avec $E(x) = \mu$ et $V(x) = \sigma^2$) si

$$E[u(w_0 + x)] \geq u(w_0)$$

- **Comment un changement de $u(\ )$ affecte-t-il sa décision ?**

Comparer décideur « U » et décideur « V » avec fonction d'utilité $v(\ )$ et même richesse certaine w_0 :

« V » une aversion pour le risque plus marquée (est plus riscophobe) que « U » si :

- la prime de risque pour tout risque est plus grande pour « V » que pour « U »
- pour tout w , $A_V(w) \geq A_U(w)$
- $v(\ )$ est une transformation concave de $u(\ )$: il existe une fonction f croissante concave telle $\forall\, w,\ v(w) = f(u(w))$

- **Comment un changement de w_0 affecte-t-il sa décision ?**

Intuitivement (selon Arrow) :

+ riche → – moins disposé à payer pour éliminer un risque donné

$\uparrow w_0 \rightarrow \downarrow \pi(w_0)$

- effet de la richesse sur l'aversion absolue pour le risque : on qualifie de « decreasing absolute risk aversion » (**DARA**) les fonctions d'utilité ayant cette propriété.

la prime de risque associée à la richesse $w_0 + x$ décroît avec w_0 si et seulement si l'aversion absolue pour le risque décroît avec w_0 : $\pi'(w_0) \leq 0$ $\uparrow w_0 \leftrightarrow \downarrow A'(w_0) \leq 0$

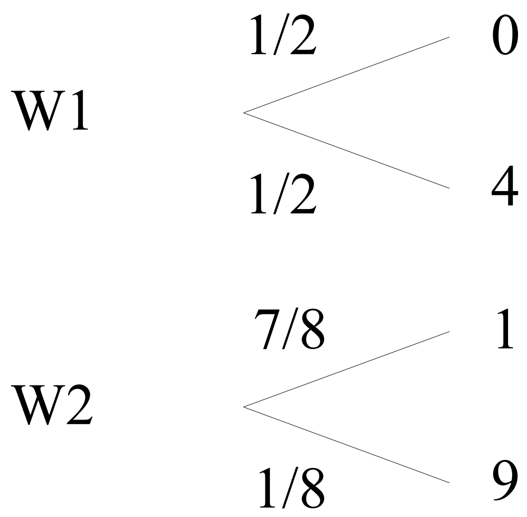
- effet de la richesse sur l'aversion relative pour le risque : on suppose généralement (Arrow) que l'aversion relative pour le risque ne diminue pas quand la richesse augmente

  ex : « constant relative risk aversion » (**CRRA**) : $u(w)=\frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ … $R(w) = \alpha$

3- PARMI DEUX « RICHESSES », QUELLE EST LA « PLUS RISQUÉE » ?

On considère deux richesses aléatoires...

...et un décideur *riscophobe* dont les préférences sont représentées par la fonction racine carrée



	W1	W2
E[W]	2	2
V[W]	4	7
E[√(W)]	1	1,125

→ la variance (objective) n'est pas une mesure du risque « perçu » (subjectif)...

Pour classer les aléas par « taille », par « risque » : **dominance stochastique**

3.1- Dominance stochastique d'ordre un :

Une richesse *X* domine stochastiquement à l'ordre 1 une richesse *Y* si tous les décideurs **rationnels** au sens de VNM (dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité espérée) et **insatiables** (dont la fonction d'utilité est croissante) préfèrent *X* à *Y* :

$$X \succ_{DS1} Y \Leftrightarrow \forall u(.), u'(.) \geq 0, E(u(X)) > E(u(Y))$$

une condition nécessaire et suffisante :

$$X \succ_{DS1} Y \Leftrightarrow \forall w, F_X(w) \leq F_Y(w)\, et\, \exists w, F_X(w) < F_Y(w)$$

→ la fonction de répartition de X est à droite/en-dessous de celle de Y
→ « X a une probabilité plus basse que Y de prendre des valeurs basses »

Représenter les fonction de répartition de X et de Y

Y représente un « accroissement du risque » par rapport à *X*, au sens d'un **décalage** *vers la gauche* de la distribution.

Application :

Un décideur doit placer son patrimoine, w_0,

- en actif risqué, dont le taux de rendement est aléatoire et vaut –5% avec une probabilité p et 15% avec une probabilité 1 – p,
- ou en actif non risqué, dont le rendement est certain et vaut i.

On note $W(\alpha)$ la richesse finale, avec α le montant investi en actif risqué.

1. Écrire le problème de décision comme un choix de loterie.
2. À quelle condition sur i $W(\alpha)$ domine-t-elle stochastiquement à l'ordre 1 $W(0)$, pour $\alpha > 0$?
3. En quoi cette question est-elle intéressante ?

3.2- Dominance stochastique d'ordre deux :

Une richesse X domine stochastiquement à l'ordre 2 une richesse Y
si tous les décideurs **rationnels** au sens de VNM, **insatiables** et **riscophobes** (dont la fonction d'utilité est concave) préfèrent X à Y :

$$X \succ_{DS2} Y \Leftrightarrow \forall u(.), u'(.) \geq 0, u''() < 0, E(u(X)) > E(u(Y))$$

une condition nécessaire et suffisante :

$$X \succ_{DS2} Y \Leftrightarrow \forall w, \int_{-\infty}^{w} F_X(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{w} F_Y(t)\,dt \quad et \quad \exists w, \int_{-\infty}^{w} F_X(t)\,dt < \int_{-\infty}^{w} F_Y(t)\,dt$$

Pour des <u>richesses de même espérance</u> :

- si Y est construite à partir de X par « ajout de bruits blancs », alors $X \succ_{DS2} Y$
- si F_Y est construite à partir de F_X par « transfert de poids » vers les extrêmes, alors $X \succ_{DS2} Y$
  → Y représente un « accroissement du risque » par rapport à X, au sens d'un **étalement de la distribution à moyenne constante** (*mean preserving spread*).

Application :

Vous avez le choix de jouer soit à la loterie A soit à la loterie B.
Laquelle choisissez-vous ?

Loterie A : vous avez

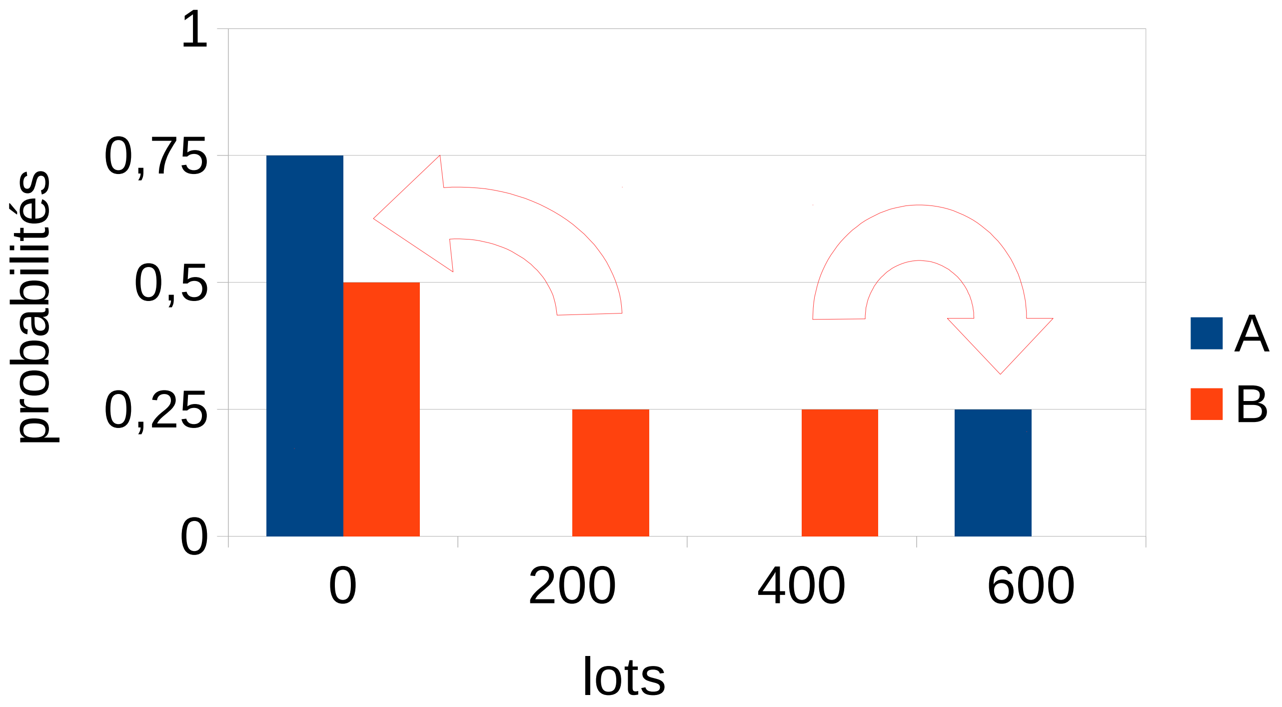
- 1 chance sur 4 de gagner 600 €
- 3 chances sur 4 de ne rien gagner.

Loterie B : vous avez

- 1 chance sur 4 de gagner 400 €,
- 1 chance sur 4 de gagner 200 € et
- 2 chances sur 4 de ne rien gagner.

Les deux loteries rapportent le même lot moyen : $E[L_A] = E[L_B]$

La loterie A est un « étalement à moyenne constante » de la loterie B :



Représenter aussi les fonctions de répartition et la différence des intégrales...

→ qu'est-ce qu'on peut en conclure ?

Application :

Dans le royaume de *Far-Far-Away*, la seule source de risque provient du risque d'incendie. Chaque année, toute maison peut :

- être endommagée et perdre 20% de sa valeur avec une probabilité de 25%,
- être endommagée et perdre 80% de sa valeur avec une probabilité de 5%
- ou rester intacte.

Une compagnie d’assurance propose d’assurer complètement toute maison, contre le paiement d’une somme égale à une proportion s de la valeur de la maison : le propriétaire d’une maison assurée dispose d’un patrimoine certain de valeur $(1–s)$M où M est la valeur de la maison intacte non assurée.

1. En quoi les concepts de dominance stochastique permettent-ils de classer les loteries ?
2. Montrer que la richesse en cas d'assurance domine stochastiquement à l'ordre 2 la richesse en l'absence d'assurance si et seulement si s est inférieur à 9%. Et déduisez-en que tout habitant riscophobe de *Far-Far-Away* assure sa maison si et seulement si s est inférieur à 9%.

4- MUTUALISATION, DIVERSIFICATION ET PARTAGE DES RISQUES

4.1- Mutualisation (regroupement)

N personnes dotées de revenus indépendants identiquement distribués y_i

- elles regroupent les revenus : $Y = \sum_{i=1}^{N} y_i$ et $\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = 0 \rightarrow \mathrm{V}[Y] = N\,\mathrm{V}[y_i]$

- elles partagent en parts égales : chaque participant reçoit $y = Y/N$

  $\rightarrow \mathrm{V}[y] = \mathrm{V}[Y/N] = \mathrm{V}[Y] \,/\, N^2 = \mathrm{V}[y_i] \,/\, N$
  $\rightarrow$ plus N est grand, plus le risque individuel est petit

Loi des grands nombres :

si on regroupe des « risques » indépendants, identiquement distribués
(si on ajoute des variables aléatoires iid),
alors la variance de la moyenne tend vers 0
quand le nombre de « risques » tend vers l'infini.

4.2- Diversification :

constitution d'un **portefeuille** de titres distribuant des revenus y_i imparfaitement corrélés

Supposons :

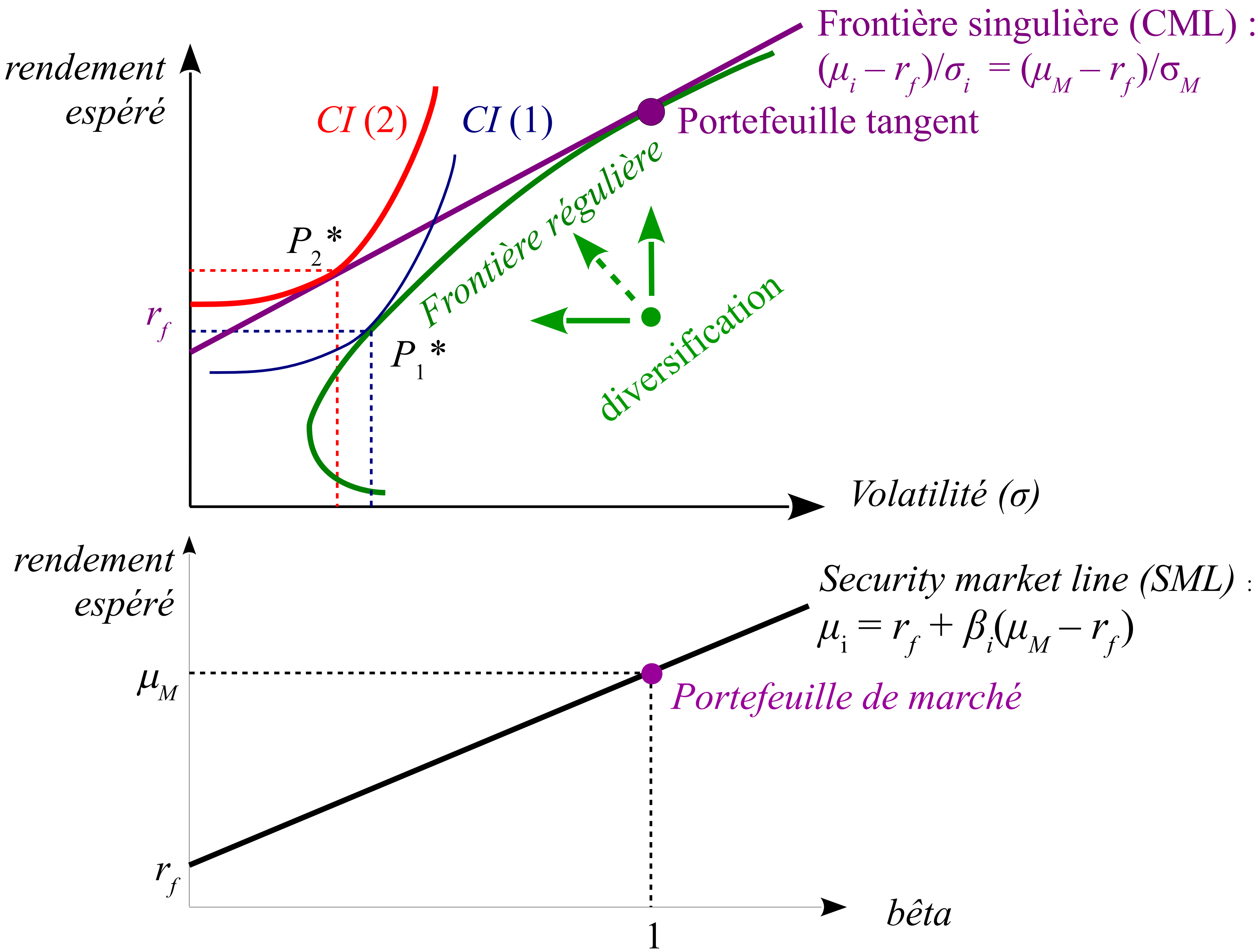
- titres de même volatilité σ, et de même coefficient de corrélation 2 à 2, ρ,
- portefeuille équipondéré, part = $1/N$

Variance du revenu du portefeuille : $\sigma_P^2 = \dfrac{\sigma^2}{N} + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\rho\,\sigma^2$

→ En augmentant le nombre de titres en portefeuille (en diversifiant), le « risque » du portefeuille diminue.

La covariance moyenne détermine le socle de risque qui subsiste après diversification ($\rho\sigma^2$)

→ cf. MEDAF, différence entre risque diversifiable et risque systématique...


rendement espéré
CI (2)
CI (1)
Frontière singulière (CML) :
$(\mu_i - r_f)/\sigma_i = (\mu_M - r_f)/\sigma_M$
Portefeuille tangent
P_2*
r_f
P_1*
Frontière régulière
diversification
Volatilité (σ)
rendement espéré
Security market line (SML) :
$\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$
μ_M
Portefeuille de marché
r_f
bêta
1

4.3- Partage du risque :

→ « neutralité au risque » pour des projets partagés (Arrow et Lind 1970)

N personnes ayant le même revenu initial w_0 :

- participent à un projet risqué coûtant *P* et générant un revenu aléatoire *Y* :
- partagent coût le revenu à parts égales : chacun paye $p = P/N$ et reçoit $y = Y/N$

- p est tel que : $\mathrm{E}[u(w_0)] = \mathrm{E}[u(w_0 + y - p)]$
- $P = Np$

On peut montrer que : **si *Y* et w_0 ne sont pas corrélés, alors *le prix total que les participants sont prêts à payer* tend vers E(*Y*) quand *N* tend vers l'infini.**

→ quand le nombre de participants au projet devient très grand,
le projet peut être évalué par le revenu espéré,
comme si l'ensemble des participants était neutre au risque.

Interprétation :

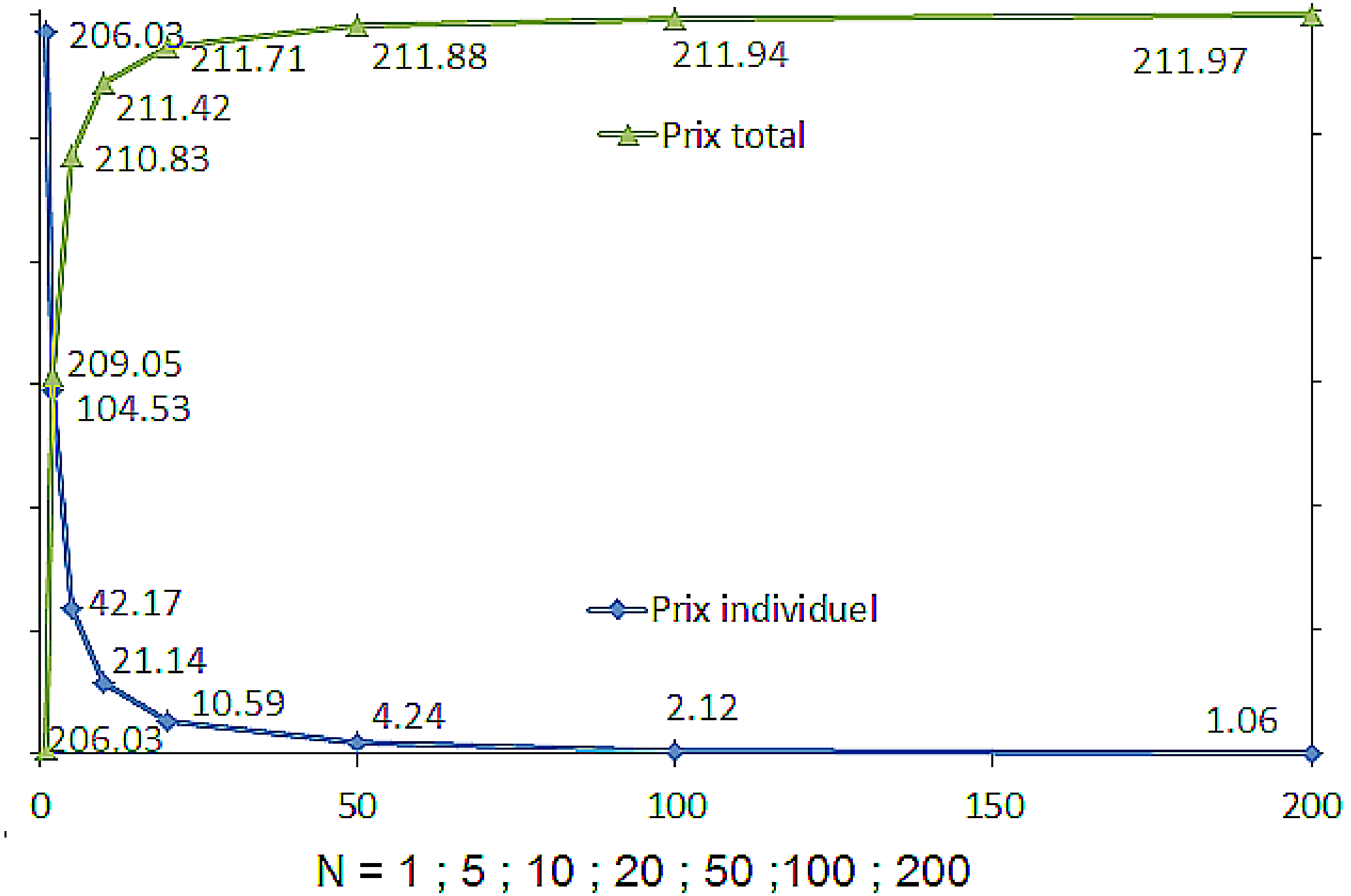
Si une entreprise a de nombreux actionnaires tous dotés d'un patrimoine bien diversifié, alors elle peut se comporter comme si elle était neutre au risque.

Exemple :

Les investisseurs ont une richesse de 1000.
Leur fonction d'utilité VNM est ln(x).
Le revenu moyen de l'investissement est 212.

revenus: 60 % → 300 ; 40 % → 80

prix individuel : p tq. $\ln(1000) = 0{,}6 \ln(1000 + 300/N - p) + 0{,}4 \ln(1000 + 80/N - p)$



5- ASSURANCE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE

5.1- Comportement rationnel optimal de demande d'assurance : contexte

Décideur riscophobe avec fonction d'utilité $u(\ )$

- peut subir un sinistre/une perte/un dommage $x \geq 0$ sur sa richesse initiale w_0
- $\pi(x)$ = prime de risque associée

contrat d'assurance :

- prime P payée par l'assuré
- Indemnité versée par l'assureur $I(x)$

Prime « pure » ou « actuarielle » ou « actuariellement équitable » : $E[I(x)]$

Couverture intégrale : $I(x) = x$

- le décideur est prêt à payer $P = \pi(x)$ pour s'assurer intégralement
- *il est optimal pour le décideur riscophobe de s'assurer intégralement si la prime est actuarielle*

taux de chargement (« loading factor ») c : couvre le coût de gestion subi par l'assureur, pour chaque euro d'indemnité

- Assureur neutre au risque (diversification parfaite…), réalise un profit nul si

$$P = (1+c)\mathrm{E}[I(x)]$$

coassurance : contre prime $P(b)$, l'assureur rembourse une fraction b du dommage

$$I(x) = b\,x.$$

- b = taux de coassurance
- $1 - b$ = taux de rétention

le taux de coassurance est choisi par l'assuré, sachant la tarification :

$$P(b) = (1+c)\ \mathrm{E}[I(x)] = b\,P_0$$

où $P_0 = (1+c)\ \mathrm{E}[x]$ est la prime d'assurance intégrale

Richesse finale de l'assuré : $w = w_0 - b\,P_0 - (1 - b)\,x = w_0 - x + b\,(x - P_0)$

- $b = 1 \rightarrow$ couverture intégrale $\rightarrow w = w_0 - P_0$ non aléatoire
- $b = 0 \rightarrow w = w_0 - x \rightarrow$ pas d'assurance

5.2- Choix de portefeuille rationnel optimal : contexte

Décideur riscophobe avec fonction d'utilité $u(\ )$ et richesse initiale w_0

doit décider comment partager sa richesse entre

- un fonds sans risque (fonds euro, obligation) rémunéré au taux certain r
- un fonds risqué (unités de compte, actions) rémunéré au taux aléatoire y

$\rightarrow$ a en actions

$w_0 - a$ en obligations

richesse finale de l'investisseur : $w = (1 + r)\,(w_0 - a) + (1 + y)\,a$

soit : $w = (1 + r)\,w_0 + (y - r)\,a$

- $m_0 = (1 + r)\,w_0$: richesse finale en cas de placement intégral sans risque
- $z = y - r$: rentabilité excédentaire des actions

choisir a pour maximiser $\mathrm{E}[u(w)] = \mathrm{E}[u(m_0 + z\,a)]$

5.3- Comparaison des problèmes de décision :

contexte	coassurance	choix de portefeuille
objectif	max $E[u(w_0 - b\ P_0 - (1 - b)\ x)]$	max $E[u(m_0 + z\ a)]$
instrument	b	a

$$w_0 - b\ P_0 - (1 - b)\ x\ = w_0 - P_0 + (1 - b)\ (P_0 - x)$$

(ajouter et soustraire P_0, factoriser)

$w_0 - P_0 \leftrightarrow m_0$	richesse finale prime d'assurance intégrale déduite	richesse finale en cas de placement intégral sans risque
$(1 - b)P_0 \leftrightarrow a$	richesse soumise au risque de dommage	richesse placée en actions risquées
	$b = 1$: assurance intégrale	$a = 0$: 100 % sans risque
	$\downarrow b \rightarrow \uparrow$ risque assumé par l'assuré	$\uparrow a \rightarrow \uparrow$ risque du portefeuille
$(P_0 - x)/P_0 \leftrightarrow z$	rendement de la coassurance	rentab. excédent. des actions

5.4- Décision de l'assuré : max $f(b) = E[u(w)] = E[u(w_0 - P_0 + (1-b)(P_0 - x))]$

- CPO : $f'(b) = 0 \rightarrow E[(x - P_0)\, u'(w)] = 0$ → taux de coassurance optimal b^*
- CDO : $f''(b) < 0 \rightarrow E[(x - P_0)^2\, u''(w)] < 0$ toujours vraie car $u''(\ ) < 0$ (aversion pour le risque)

Mossin (1968) a montré :

- si $c = 0$ (prime actuarielle) $b^* = 1$ assurance **intégrale** optimale
- si $c > 0$ (taux de chargement positif) $b^* < 1$ assurance **partielle** optimale

Même si l'aversion pour le risque est élevée, si $c > 0$, l'assuré s'assure partiellement

- économie de dépense (prime) → ↑ richesse attendue : effet de *premier ordre*
  → ↑ risque : effet de *second ordre*

Quelques autres résultats :

- décideur + riscophobe ($u(\ )$ + concave) → taux de coassurance b^* + grand
- $u(\ )$ DARA : ↑ richesse → ↓ taux de coassurance (assurance = bien inférieur)
- $u(\ )$ DARA : ↑ taux de chargement → ? taux de coassurance (bien Giffen ?)
- ↑ « risque » → ? taux de coassurance...

5.5- Décision de l'investisseur : max $g(a) = \mathrm{E}[u(m_0 + z\, a)]$

- CPO : $g\,'(a) = 0 \rightarrow \mathrm{E}[z\, u'(w)] = 0$ → taux de coassurance optimal b^*
- CDO : $f\,''(b) < 0 \rightarrow \mathrm{E}[z^2\, u''(w)] < 0$ toujours vraie car $u''(\ )<0$ (aversion pour le risque)

• si Ez = 0	actions = risque pur	$a^* = 0$	Placer 100 % sans risque
• si Ez > 0	rentabilité excédentaire peut compenser risque	$a^* \geq 0$	Placement en action désirable

Quelques autres résultats si Ez > 0 :

- décideur + riscophobe ($u(\ )$ + concave) → moindre placement action a^*
- $u(\ )$ DARA : ↑ richesse → ↑ a^*
- $u(\ )$ CRRA : a^* est proportionnel à la richesse
- $\dfrac{a^*}{w} \approx \dfrac{\mu}{\sigma^2} \dfrac{1}{R(w)}$ $\mu = \mathrm{E}(z)$ → prime du marché actions (*equity premium*) ; $\sigma^2 = \mathrm{V}(z)$ → variance des rentabilités des actions ('risque')

  La part investie en action est approximativement ...
  … proportionnelle à la prime du marché actions (au ratio de Sharpe!)
  … inversement proportionnelle au risque et à l'aversion relative pour le risque

5.6- Mesurer l'aversion pour le risque :

Première méthode : **à partir du modèle de choix de portefeuille**…

$$\frac{a^*}{w} \approx \frac{\mu}{\sigma^2}\frac{1}{R(w)} \;\; \rightarrow \;\; R(w) \approx \frac{\mu}{\sigma^2}\frac{1}{a^*/w}$$

on suppose homogénéité des croyances (μ et σ^2 égaux pour tous les investisseurs)
→ l'hétérogénéité des choix de portefeuille provient des différences d'aversion pour le risque
→ « préférence révélées » (cf. Friend et Blume 1975)

Deuxième méthode : **à partir d'enquêtes et de questionnaires**

questions qualitatives → classer par « groupe » d'aversion pour le risque ± élevée

questions quantitatives → quantifier l'aversion pour le risque via série de choix de loteries ou en demandant une disposition à payer...

6- FINANCE COMPORTEMENTALE

Typiquement, on observe :

- choix incompatibles avec la maximisation de l'espérance (subjective) d'utilité
- difficultés dans la mise à jour des croyances (application de la loi de Bayes)

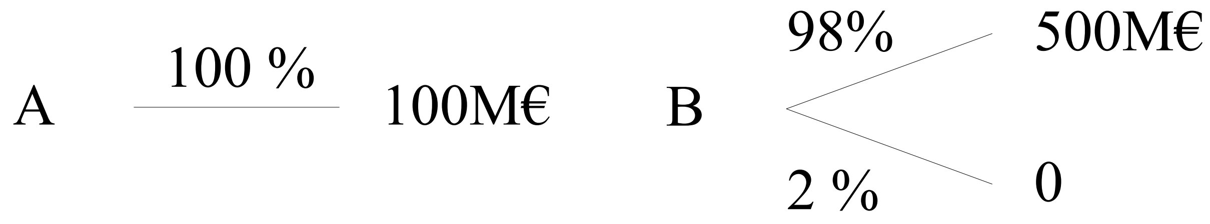
la « finance comportementale » :

- ne suppose pas des agents rationnels et des marchés sans friction
- part des limites à la rationalité, et de la psychologie des décideurs
- met en évidence les biais cognitifs et les erreurs de décisions
- montre les opportunités de profit générées par les erreurs des « noise traders »

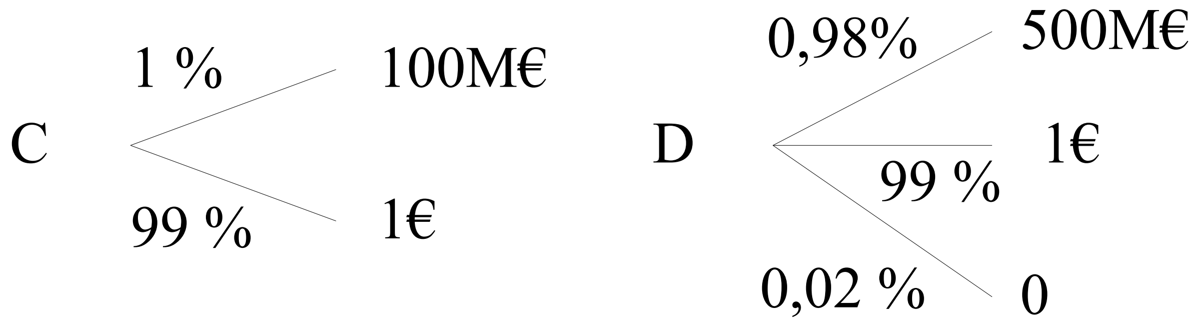
6.1- Paradoxe d'Allais (1953) et axiome d'indépendance

Exemple 1

Choisir entre A et B :



Choisir entre C et D :



Synthèse des choix	A	B
C		
D		

de nombreux individus choisissent A et D...

Or d'après VNM : $A > B \Rightarrow C > D$

En effet :

$$
\begin{aligned}
A > B \quad & \Leftrightarrow u(w_0 + 100) > 0{,}98\, u(w_0 + 500) + 0{,}02\, u(w_0) \\
& \Leftrightarrow 0{,}01\, u(w_0 + 100) + 0{,}99\, u(w_0 + 1) \\
& \qquad > 0{,}01\, [0{,}98\, u(w_0 + 500) + 0{,}02\, u(w_0)] + 0{,}99\, u(w_0 + 1) \\
& \Leftrightarrow 0{,}01\, u(w_0 + 100) + 0{,}99\, u(w_0 + 1) \\
& \qquad > 0{,}0098\, u(w_0 + 500) + 0{,}99\, u(w_0 + 1) + 0{,}0002\, u(w_0) \\
A > B \quad & \Leftrightarrow C > D
\end{aligned}
$$

→ montre la difficulté des décisions dans l'incertain...

→ remet en cause une des hypothèses du théorème de l'utilité espérée :
l'axiome d'indépendance.

6.2- L'axiome d'indépendance :

Axiome d'indépendance : « Si on « mélange » deux loteries avec une troisième loterie, le classement des deux loteries résultantes ne dépend que du classement des deux loteries initiales (il ne dépend pas de la troisième). »

Exemple de « mélange » :

Soit Z la loterie qui donne 1€ avec certitude : $Z \xrightarrow{100\ \%} 1€$

C est construite en « mélangeant » 1 % de A et 99 % de Z
D est construite en « mélangeant » 1 % de B et 99 % de Z

L'axiome d'indépendance dit que : $A > B \Leftrightarrow C > D$

La signification de l'axiome d'indépendance :

Parmi tous les résultats possibles d'un événement aléatoire, un seul se produit.
→ un seul état du monde se produit
→ on peut supposer que les préférences sont telles que la « valeur » d'une somme disponible dans cet état ne dépend pas de ce qui se passe dans un état qui ne s'est pas produit (≠ préférences sur des biens pouvant être consommés simultanément)

→ c'est le sens de l'hypothèse « d'indépendance » : les choix faits dans un état du monde ne dépendent pas des choix prévus dans les autres états.

→ la fonction d'utilité est « additive » par rapport aux états du monde :

On note $i = 1$ à N les états du monde, p_i les probabilités, l_i les sommes disponibles

$$U(L)=\sum_{i=1}^{N} p_i u(l_i) \text{ soit } U(L)=E[u(l)]$$

$$\rightarrow \quad TMS_{2,1}=\left.\frac{-\partial l_2}{\partial l_1}\right|_{U=cst}=\frac{\partial U(l_1,\dots l_n)/\partial l_1}{\partial U(l_1,\dots l_n)/\partial l_2}=\frac{p_1 u'(l_1)}{p_2 u'(l_2)} \quad \text{indépendant de } \{l_3, \dots l_N\}$$

6.3- axiome d'indépendance et « Dutch book »

« dutch book » : pari qui garantit un gain à coup sûr pour le *bookmaker*
et une perte à coup sûr pour le *parieur.*

Un décideur dont le comportement n'est pas conforme à l'axiome d'indépendance peut se faire manipuler et être victime d'un « dutch book »

- Parmi trois loteries, A, B et C : le décideur les ordonne A > B et A > C.
- Mais il préfère $D = \begin{array}{l} \overset{50\%}{\nearrow}\ B \\ \underset{50\%}{\searrow}\ D \end{array}$ à A (≠ axiome d'indépendance)

  D est une « loterie composée » : on tire à pile ou face pour jouer B ou C .

Scénario de « dutch book »

- proposer au décideur de choisir entre A, B et C → A
- proposer alors au décideur de payer pour remplacer A par D → paye x → D
- tirer à pile ou face et proposer alors au décideur de payer pour remplacer B ou C (selon résultat du tirage) par A → paye x' → A

→ le décideur a payé $x+x'$ pour revenir au point de départ !

6.4- Psychologie : les croyances – biais cognitifs

enseignements sur la manière apparente dont les gens forment leurs croyances

- **sur-confiance :** confiance excessive dans ses jugements (intervalles de confiances trop étroits, probabilités mal calibrées)
  provient de deux biais :
  - auto-attribution : attribuer ses succès à son propre talent/ses échecs à la malchance
  - recul : après un événement, avoir tendance à penser qu'on l'avait prévu
- **optimisme :** surestimer ses capacités (en part. celle de respecter les échéances)
- **représentativité :** estimer la probabilité par la similitude (négliger les probas a priori)
- **conservatisme** : surestimer les probas a priori

→ mauvaises applications de la loi de Bayes sur la révision des croyances

- **persévérance dans les croyances, biais de confirmation :** répugnance à accepter de changer d'avis
- **ancrage :** ajuster ses croyances à partir d'une valeur a priori arbitraire
- **biais de disponibilité :** tous les souvenirs permettant d'estimer les probas d'événements ne sont pas « disponibles » de la même manière

6.5- Psychologie : les préférences (1) - la théorie des perspectives

La théorie des perspectives (prospect theory) – Kahneman & Tversky (1979)

Question 1 : Supposons que vous êtes plus riches de 300 €. Que choisissez-vous ?

A'- un gain certain de 100€

B'- 50 % de chance de gagner 200€ et 50 % de chance de ne rien gagner.

Question 2 : Supposons que vous êtes plus riches de 500 €. Que choisissez-vous ?

C'- une perte certaine de 100€

D'- 50 % de chance de perdre 200€ et 50 % de chance de ne rien perdre.

→ choix :

- majorité de A' : aversion pour le risque en cas de gain.
- majorité de D' : goût pour le risque en cas de perte.

Les positions finales de A' et C' et celles de B' et D' sont pourtant identiques...

- VNM : A' > B' $\Rightarrow$ C' > D'

question 1 → choisir un gain
question 2 → choisir une perte

} même résultat final

→ la présentation influence la décision

→ évaluation de gains et de pertes par rapport à un point de référence

→ attitude à l'égard du risque différente en cas de gains et en cas de pertes

La théorie des perspectives

- remet en cause la théorie de l'utilité espérée (VNM) comme modèle descriptif des décisions en situation de risque.
- fondée sur des constats expérimentaux

Une loterie *L* rapporte *« gain »* avec probabilité *p* et *« perte »* avec probabilité *q*.
L est « évaluée » par :

$$U(L) = \pi(p)\ v(gain) + \pi(q)\ v(perte) \neq E[u(L)] = p\ u(w_0 + gain) + q\ u(w_0 + perte)$$

- v(.) définie sur pertes et gains (s/ **point de référence**) ≠ richesse finale ;

riscophilie si perte
riscophobie si gain **+ aversion pour les pertes** pente de v(.) + forte pour des pertes que pour des gains
$v(x) < -v(-x)$

- $\pi(.)$ = « fonction de pondération » = transformation non linéaire des probas :
  - surestimation des petites probabilités,
  - sous-estimation des probabilités élevées

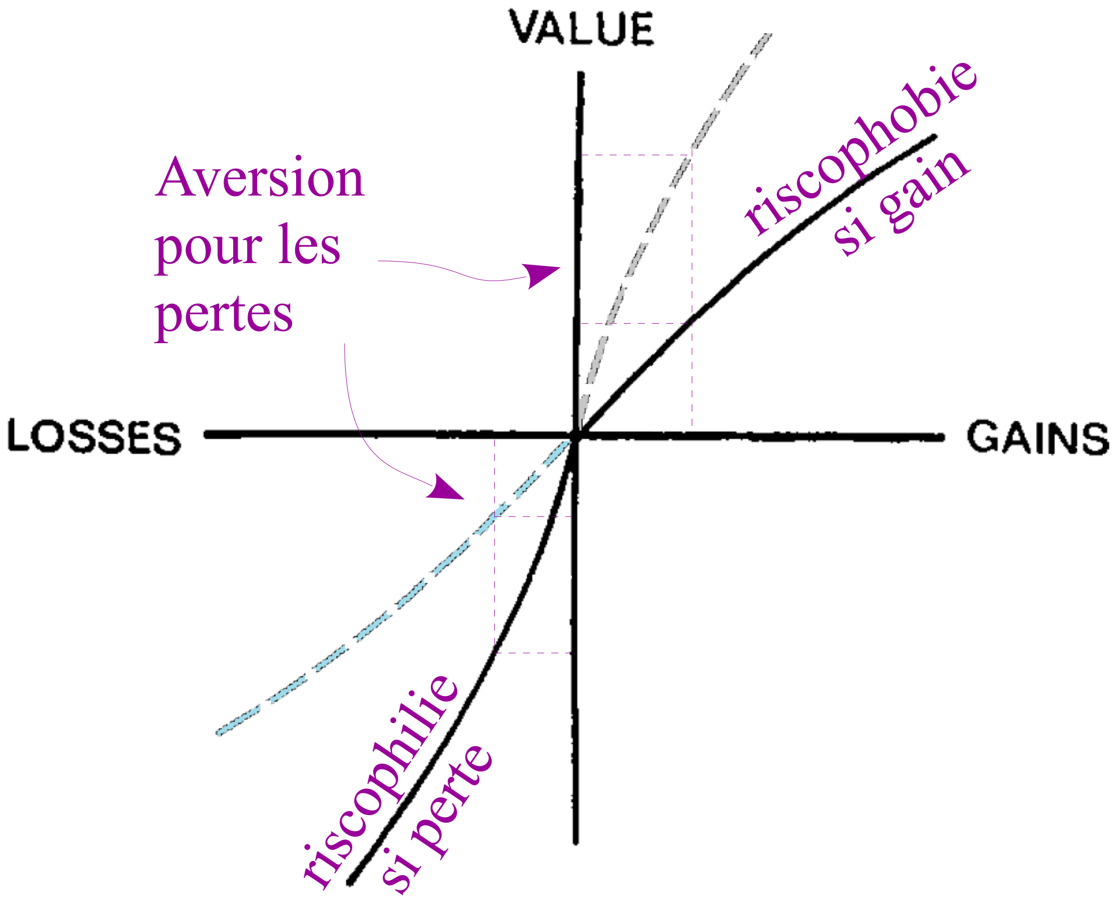


FIGURE 3.—A hypothetical value function

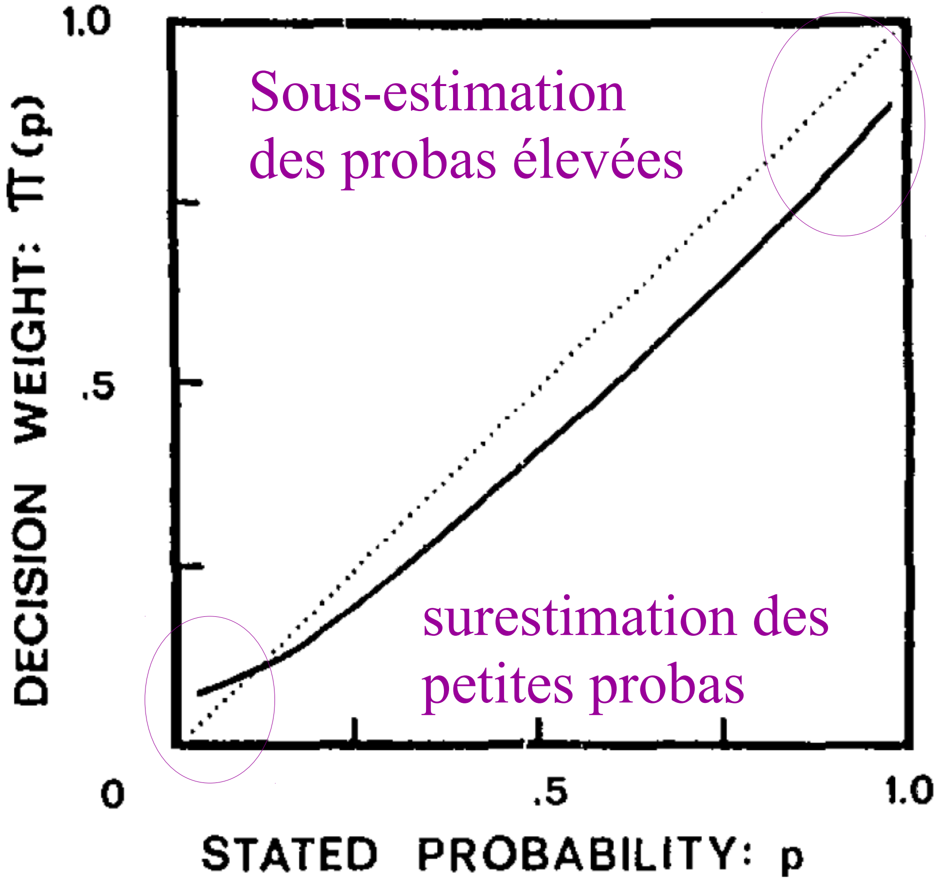
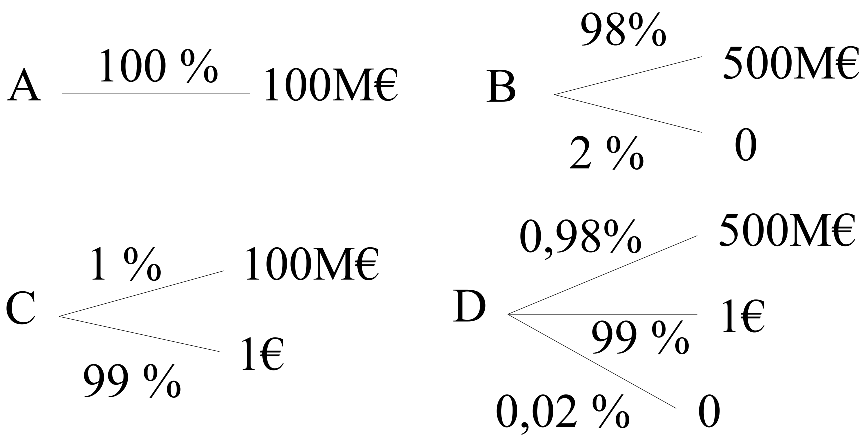


FIGURE 4.—A hypothetical weighting function.

source :Kahnemann & Tversky (1979)

La fonction de pondération explique le paradoxe de Allais

- une majorité choisit A (plutôt que B) et D (plutôt que C)



A > B

$\pi(100\%)v(100M€) > \pi(98\%)v(500M€)$

avec $v(0) = 0$

D > C

$\pi(0{,}98\%)v(500M€) + \pi(99\%)v(1€) >$

$\pi(1\%)v(100M€) + \pi(99\%)v(1€)$

- pour ces gens : $\pi(0{,}98\%)/\pi(1\%) > v(100M€)/v(500M€) > \pi(98\%)/\pi(100\%)$

  $\pi(0{,}98\%)/\pi(1\%) > \pi(98\%)/\pi(100\%)$
- choix cohérent si :
  - sur-pondération des petites probas : $\pi(0{,}98\%) > 0{,}98\ \pi(1\%)$
  - sous-pondération des probas élevées : $\pi(98\%) < 0{,}98\ \pi(100\%)$

en **théorie des perspectives**

décisions fondées sur 2 opérations cognitives distinctes :

(1) création de « comptes mentaux » (résultant d’une « présentation » - *framing*)

→ la présentation peut influencer la prise de décision (*framing*)
même si les décideurs n’en ont pas toujours conscience

(2) application de règles de décisions différentes sur ces comptes

→ chaque compte mental est évalué séparément
la valeur de l’ensemble est la somme des valeurs séparées

un décideur qui maximise U(L) préfère

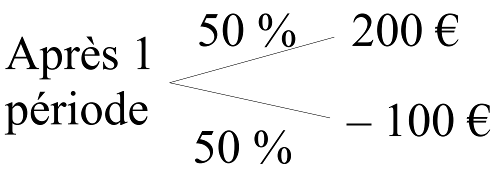
- allouer un gain g sur deux comptes séparés car v(g) concave → $2v(g/2) > v(g)$
- allouer une perte l sur deux comptes séparés car v(l) convexe → $v(l) > 2v(l/2)$
- séparer une grosse perte et un petit gain : $v(g) + v(l) > v(g+l)$

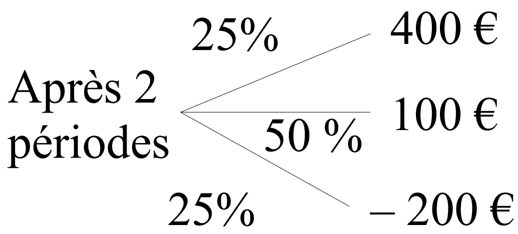
à cause de l'aversion pour les pertes, la *comptabilité mentale* influence les choix.

Exemple (rôle de la *comptabilité mentale* sur la décision)

Un actif peut engendrer un gain de 200 € ou une perte de 100 € de manière équiprobable chaque période.

→ Changement de richesse (par rapport au statu quo) :





évaluation par

$U(x) = x$ si $x \geq 0$

$U(x) = 2{,}5\ x$ si $x < 0$

→ acquisition pour 2 périodes : $U(x_2) = +\ 25$

mais pas pour 1 période : $U(x_1) = -\ 25$

→ un décideur ayant aversion pour les pertes accepte de prendre des risques si les performances ne sont pas évaluées trop fréquemment.

[aversion pour les pertes + myopie dans l'évaluation → prime de risque actions]

Fonction d'évaluation de Kahneman & Tversky :

Une loterie (un actif) donne des sommes $w_1 < \ldots < w_i < \ldots < w_N$ avec des probas p_i

Les sommes sont comparées à une référence θ : $x_i = w_i - \theta$.

- Placement initial w_0 : $\theta = w_0$
- Placement sans risque au taux r_f : $\theta = (1+r_f)w_0$
- ...

Évaluation : $U(L) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i v(x_i)$

$v(x_i) = x_i^\alpha$ si $x_i \geq 0$ (gain) avec $0 \leq \alpha \leq 1$ (v concave)

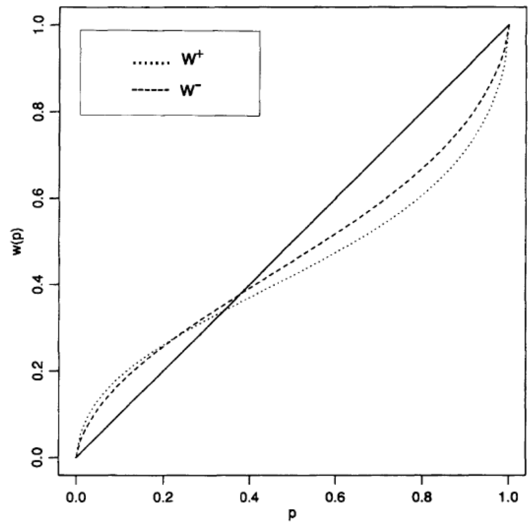
$v(x_i) = -\lambda(-x_i)^\beta$ si $x_i < 0$ (perte) avec $0 \leq \beta \leq 1$ (v convexe)

Déformation des probabilités cumulées :

$\pi_i = \omega(P_i) - \omega(P_i^*)$

avec : $P_i = \Pr(x \geq x_i)$ et $P_i^* = \Pr(x > x_i)$;

$$\omega(p) = \frac{p^\gamma}{\left(p^\gamma + (1-p)^\gamma\right)^{1/\gamma}}$$



$\alpha = \beta = 0{,}88$

$\lambda = 2{,}25$

$\gamma = 0{,}65$

T&K (1992)

Exemple : évaluer une richesse aléatoire distribuée de la manière suivante :

probabilité	richesse
10%	95
30%	100
40%	104
20%	109

Le point de référence est 100.

$v(w_i) = (w_i - 100)^{0,88}$ si $w_i \geq 100$ (gain)

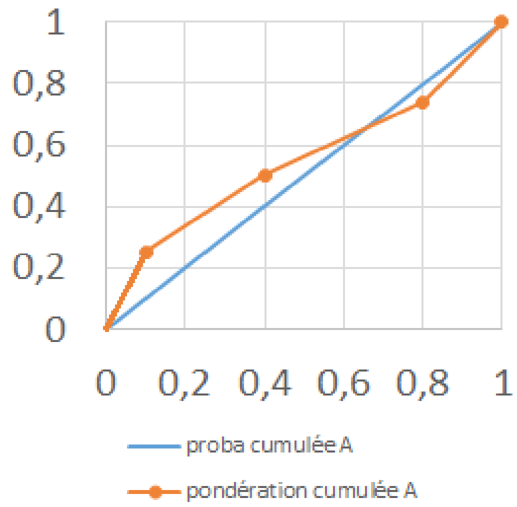
$v(w_i) = -\,2,25\,(100 - w_i)^{0,88}$ si $w_i < 100$ (perte)

Déformation des probabilités cumulées :

$\pi_i = \omega(P_i) - \omega(P_i^*)$

avec : $P_i = \Pr(w \geq w_i)$ et $P_i^* = \Pr(w > w_i)$;

$$\omega(p) = \frac{p^{0,65}}{\left(p^{0,65} + (1-p)^{0,65}\right)^{1/0,65}}$$



	Évaluation		Déformation des probabilités cumulées		
Richesse w_i	$v(w_i)$	$\Pr(w = w_i)$	$\Pr(w \geq w_i)$	$\Pr(w > w_i)$	pondération π_i
95	$-2{,}25\,(100-95)^{0{,}88}$ $= -9{,}2742$	0,1	1	0,9	0,2545
100	$(100-100)^{0{,}88}$ $= 0$	0,3	0,9	0,6	0,2480
104	$(104-100)^{0{,}88}$ $= 3{,}3870$	0,4	0,6	0,2	0,2376
109	$(109-100)^{0{,}88}$ $= 6{,}9141$	0,2	0,2	0	0,2599

$$U(W)=\sum_{i=1}^{4}\pi_i v(w_i) \approx 0{,}2545 \times (-9{,}2742) + 0{,}2376 \times 3{,}3870 + 0{,}2599 \times 6{,}9141 \approx 0{,}2412$$

- $U(W) > 0 \rightarrow W$ est préférable à la « référence »
- comparer à l'utilité obtenue en choisissant une autre alternative...

6.6- Psychologie : les préférences (2) - l'aversion pour l’ambiguïté :

En réalité, les probabilités sont rarement connues objectivement
- cf. distinction « risque » vs « incertitude »

→ Savage (1964) : théorie de « l’espérance d’utilité subjective »

Mais les gens n’aiment pas l’« **ambiguïté** » = les situations où les distributions de probabilités sont elles-même incertaines :
- sentiment d’incompétence
- préférence pour le familier

→ Des comportements inexplicables par le théorie de l’utilité espérée
→ Les préférences ne s’expriment pas toujours par des jugements probabilistes

cf. paradoxe d’Ellsberg (1961)

Paradoxe d'Ellsberg :

Deux urnes contiennent chacune 100 boules

- *Urne 1 : ?? bleues + ?? rouges*
- *Urne 2 : 50 bleues + 50 rouges*

Lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *a1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*
- *a2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*

Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *b1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*
- *b2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*

Paradoxe d'Ellsberg :

Deux urnes contiennent chacune 100 boules

- *Urne 1 : ?? bleues + ?? rouges*
- *Urne 2 : 50 bleues + 50 rouges*

Lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *a1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*
- *a2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*

Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *b1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*
- *b2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*

typiquement, les gens préfèrent a2 (plutôt que a1) et b2 (plutôt que b1)

→ incohérent avec théorie de « l'espérance d'utilité subjective » (proba subjectives)

a2 > a1 si Pr(rouge | urne 1) > Pr(rouge | urne 2) ;

b2 > b1 si Pr(bleu | urne 1) > Pr (bleu | urne 2)

→ **aversion pour l'ambiguïté** cf. Barberis & Thaler (2003)

Paradoxe d'Ellsberg – autre version :

cf. Eber & Willinger (2012), *L'économie Expérimentale*, collection Repères, La découverte

Une urne contient 90 boules : 30 rouges, les autres noires ou jaunes...

Lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *c1 : tirer une boule, gagner 100 si « rouge », 0 sinon*
- *c2 : tirer une boule, gagner 100 si « noire », 0 sinon*

Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *d1 : tirer une boule, gagner 100 si « rouge » ou « jaune », 0 sinon*
- *d2 : tirer une boule, gagner 100 si « noire » ou « jaune », 0 si « rouge »*

Typiquement, les gens préfèrent c1 (plutôt que c2) et d2 (plutôt que d1)

→ incohérent avec théorie de « l'espérance d'utilité subjective » (proba subjectives)

c1 > c2 si Pr(rouge) > Pr (noire) ;

d2 > d1 si Pr(noire ou jaune) = Pr(noire) + Pr(jaune) > Pr(rouge ou jaune) = Pr(rouge) + Pr(jaune)

→ aversion pour l'ambiguïté

6.7- Application au comportement des investisseurs

(1) Effet de disposition/de dotation :
valoriser davantage un bien que l'on possède déjà *(dotation)*
répugner à vendre / garder trop longtemps un titre dont le cours a baissé *(disposition)*

- dû à *croyance irrationnelle* en un « retour vers la moyenne »
- dû à *l'aversion pour les pertes* (théorie des perspectives)

exemple : une action achetée 50 cote aujourd'hui 45, faut-il vendre, ou attendre (l'action pourra alors être cotée 50 ou 40, de manière équiprobable) ?

en théorie des perspectives :	utilité de vendre = v(–5) utilité de garder = ½ v(0) + ½ v(–10)	*région des pertes, riscophilie v(.) convexe*	→ garder

(2) transactions trop nombreuses :
de meilleures performances seraient possibles avec moins de transactions (coûts de transaction, mauvaise sélection des titres)

- dues à *sur-confiance* : penser avoir une info justifiant une transaction...

(3) Faible diversification des portefeuilles d'actifs risqués

due à *aversion pour l'ambiguïté* :

- difficulté à traiter l'information financière, à envisager les résultats possibles, à évaluer les probabilités, même subjectives
  → renoncer à participer aux marchés financiers
  → concentrer sur une entreprise ou sur un secteur d'activité connu
    → possible biais de sur-confiance
    → diversification naïve (1/n) ou insuffisante

due à *comptabilité mentale* **:** segmentation des choix (investissement dans un portefeuille d'actifs risqués traité indépendamment des autres choix de placement).

- prépondérance d'actifs non risqués pour l'essentiel du patrimoine financier
- faible diversification, fort risque pour le complément (actifs risqués)
  → le patrimoine financier est clairement segmenté, ou encore stratifié
  → chaque strate (typiquement deux) est associée à une fonction d'utilité propre
    - aversion pour le risque pour la première
      (se prémunir contre la pauvreté, garantir un certain niveau de patrimoine)
    - un goût du risque pour la deuxième (s'enrichir)

6.8- Les conseillers financiers peuvent-ils en profiter ? exemples...

Théorie des perspectives :

→ manipuler le point de référence

- pub/processus de vente : inclure des options ou des caractéristiques inutiles pour augmenter/baisser le point de référence (cf. « conventions de compte »)
- stratégie tarifaire : tarification « au goutte à goutte » (ajouter des éléments au fur et à mesure du processus de vente)

→ exploiter les effets de dotation et l'aversion pour les pertes :

- pub/processus de vente : présentation (pointer pertes en l'absence d'assurance)
- conception du produit : ex. assurance pour des petits risques
- stratégie tarifaire : périodes d'essai gratuit, réduction temporaire (sur premières échéances)

Comptabilité mentale :

→ manipuler la présentation de la performance des produits (période, inflation...)

Erta & al. (2013), *Applying Behavioural Economics at the Financial Conduct Authority*, FCA occasional-paper n°1

Importance de la présentation :

- aversion pour les pertes → meilleure acceptation d'une présentation positive plutôt que d'une présentation négative

- présentation des performances passées : échelle de temps , en courbe/en bâtons, en valeur/en pourcentage

- Tendance à choisir l'option moyenne / l'option par défaut
→ l'exposition au risque varie selon la présentation.

trois options / deux présentations	présentation A	présentation B
« conservateur »	0 % UC ; 100 % euro	10 % UC ; 90 % euro
« modéré »	40 % UC ; 60 % euro	50 % UC ; 50 % euro
« agressif »	80 % UC ; 20 % euro	90 % UC ; 10 % euro

- faire la promotion d'un « package » en insistant sur l'économie réalisée
(coût de l'ensemble < coût des options prises séparément)
même si certains éléments ne sont jamais utilisés
+ options supplémentaires avec possibilité de « sortie » ultérieure

ANNEXE – RAPPELS sur les variables aléatoires :

1.1- Densité et répartition :

Une variable aléatoire réelle **discrète** X peut prendre plusieurs valeurs réelles $\{x_1, \ldots x_i, \ldots x_N\}$ avec des probabilités $\{P_1, \ldots P_i, \ldots P_N\}$

- fonction de répartition : $F(x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$
  fonction de densité : $f(x_i)$ = Proba$(X = x_i)$
- $F(x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$ = Proba $(X = x_1$, ou $X = x_2 \ldots$ ou $X = x_i) = \sum_{j=1}^{i} f(x_j)$
  $f(x_i)$ = Proba$(X = x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$ – Proba $(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Une variable aléatoire **continue** X prend des valeurs sur un intervalle $[min, max]$

- fonction de répartition : $F(x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$; $F(x_i) = \int_{j=min}^{x_i} f(x)\,dx$

  fonction de densité : $f(x_i) = F'(x_i)$

NB : $0 \leq F(x_i) \leq 1$; $0 \leq f(x_i) \leq 1$; $\sum_{j=1}^{N} f(x_j) = 1$ ou $\int_{x=min}^{max} f(x)\,dx = 1$

1.2- Moments d'une variable aléatoire

Espérance mathématique = moyenne pondérée par les probabilités

$E[X]=\sum_{i=1}^{N} P_i x_i$ ou $E[X]=\int_{x=min}^{max} x\, f(x)\, dx$ → un indicateur de **niveau**

→ règle de calcul : $\boxed{E(aX+b) = a\,E(X) + b}$

- aX + b est une variable aléatoire qui peut peut les valeurs $\{a\, x_1 + b, \ldots\, a\, x_N + b\}$ avec des probabilités $\{P_1, \ldots\, P_N\}$
- « centrer la variable » = soustraire l'espérance mathématique pour obtenir une variable d'espérance nulle : Y = X – E[X] → E(Y) = E[X] – E[X] = 0

f(X) est une variable aléatoire qui peut peut les valeurs $\{f(x_1), \ldots\, f(x_N)\}$ avec des probabilités $\{P_1, \ldots\, P_N\}$

→ inégalité de Jensen : $\boxed{f(x) \text{ concave } \leftrightarrow f(E[X]) > E[f(X)]}$

Et pour des variables aléatoires continues ?

Variance = moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $\boxed{V(X) = E[(X - E(X))^2]}$

= moyenne des carrés moins carré de la moyenne : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$

$$V[X] = \sum_{i=1}^{N} P_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$$

Écart-type= racine carrée de la variance : $\sigma_X^2 = V(X)$

→ des indicateurs de **dispersion** (« risque »)

Règle de calcul : $\boxed{V(aX+b) = a^2\, V(X)}$ et $\sigma_{aX+b} = a\, \sigma_X$

Centrer une variable ne modifie pas sa variance : $Y = X - E[X] \rightarrow V(Y) = V(X)$

Variance = « moment centré d'ordre 2 »... car $V(X) = E[(X - E(X))^2]$

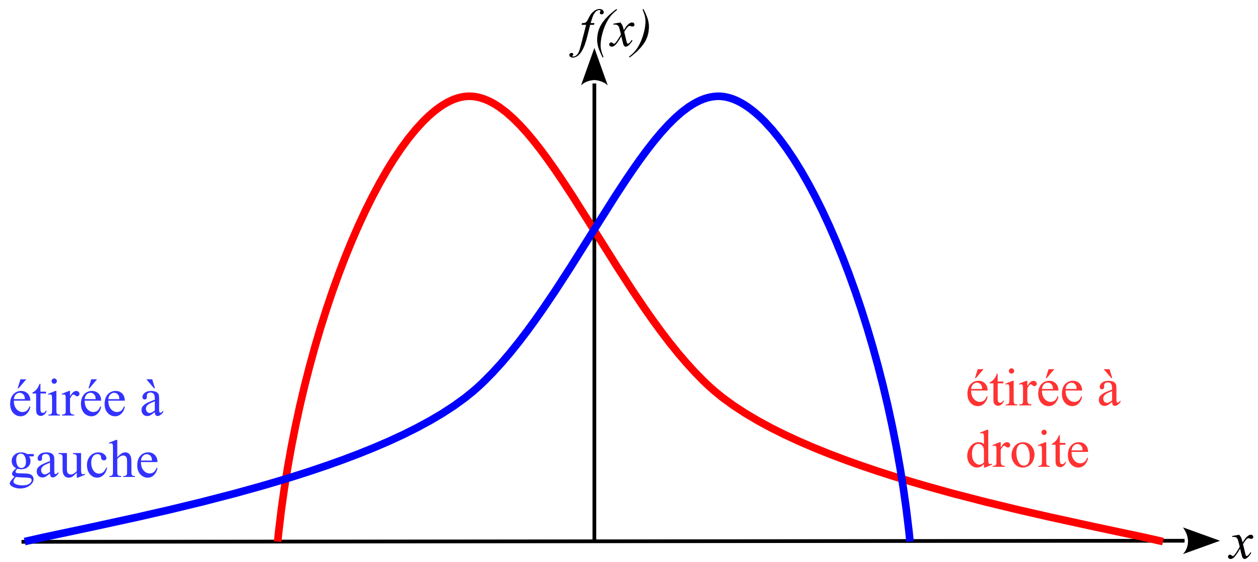
Asymétrie (skewness) :

$E[(X-\mu)^3] \rightarrow$ moment centré d'ordre 3

ou $S(X) = E[(X-\mu)^3]/\sigma^3$ (Coefficient d'asymétrie de Fischer)

ou (moyenne – mode) / écart-type (1er coefficient d'asymétrie de Pearson)

Asymétrie négative	Asymétrie positive
densité étirée **à gauche** (par ex. à cause d'une valeur plafond)	densité étirée **à droite** (par ex. à cause d'une valeur plancher)
sur-représentation des valeurs « basses »	sur-représentation des valeurs « hautes »
moyenne < médiane mode « trop à droite »	moyenne > médiane mode « trop à gauche »

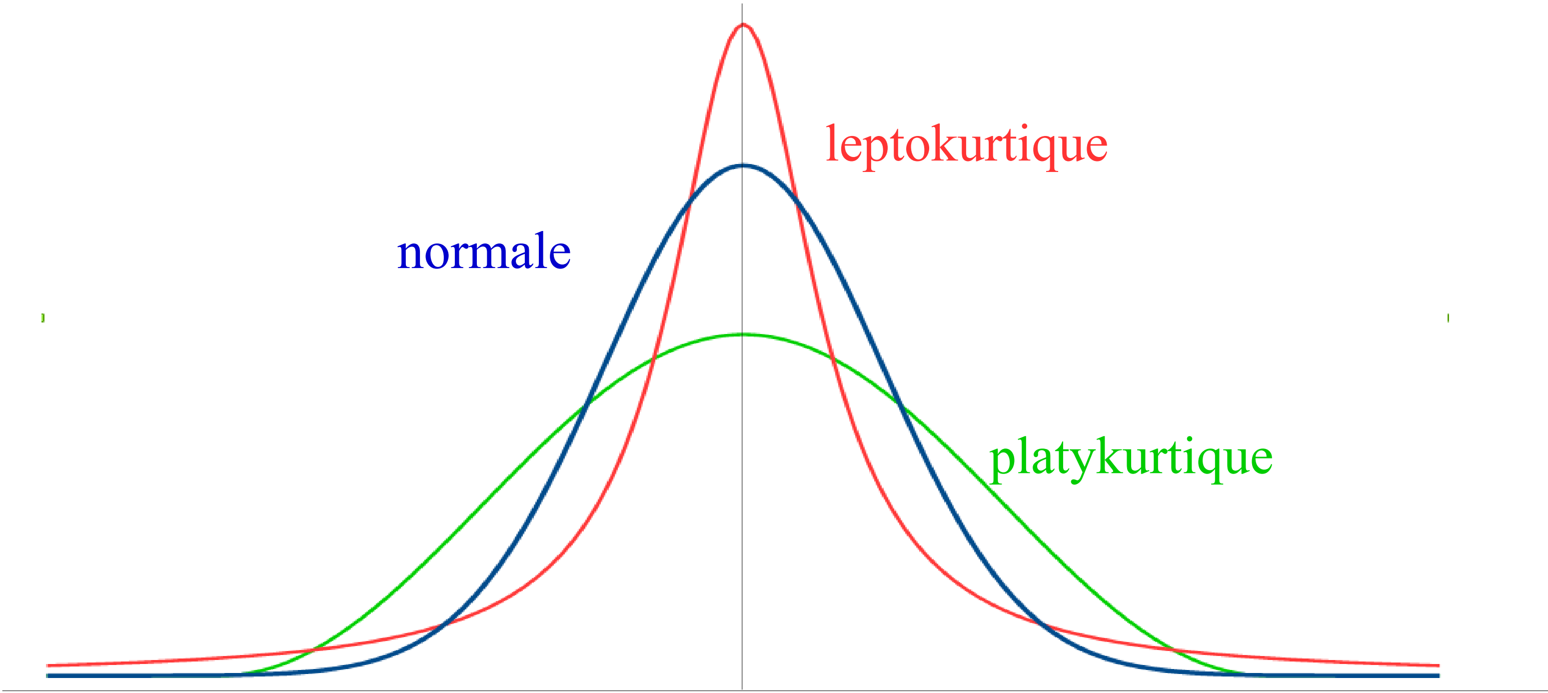


Aplatissement (kurtosis) :

$E[(X - E(X))^4] \rightarrow$ moment centré d'ordre 4

ou $K(X) = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3$ (Coefficient d'aplatissement de Fischer)

Kurtosis (excédentaire) négative distribution *platykurtique*	Kurtosis (excédentaire) positive distribution *leptokurtique*
Trop de valeurs « moyennes » par rapport à une loi normale	Trop de valeurs « extrêmes » par rapport à une loi normale (*queues épaisses*)



1.3- Les quantiles de la distribution :

Quantiles
Fractiles : valeurs-seuils qui partitionnent des données en intervalles de taille égale

ex : centiles : partagent en 100
déciles : partagent en 10
quartiles : partagent en 4

- Si le 99ème centile est la valeur de X vaut 7 : $Pr(X \leq 7) = 99\ \%$
- Si la distribution de X est $F(x)$, le 99ème centile est $F^{-1}(99\ \%)$.

- 5ème décile = 2ème quartile = médiane (partage en deux)

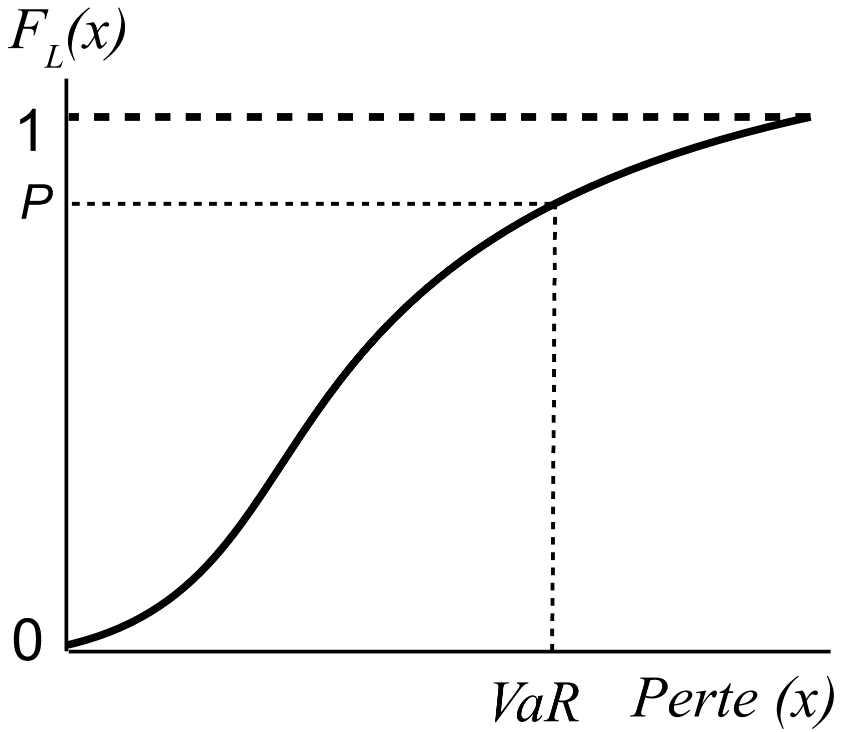
Généralisation : le q-quantile de la répartition de X est la valeur V telle que
- $Pr(X \leq V) = q$
- $q = F^{-1}(P)$

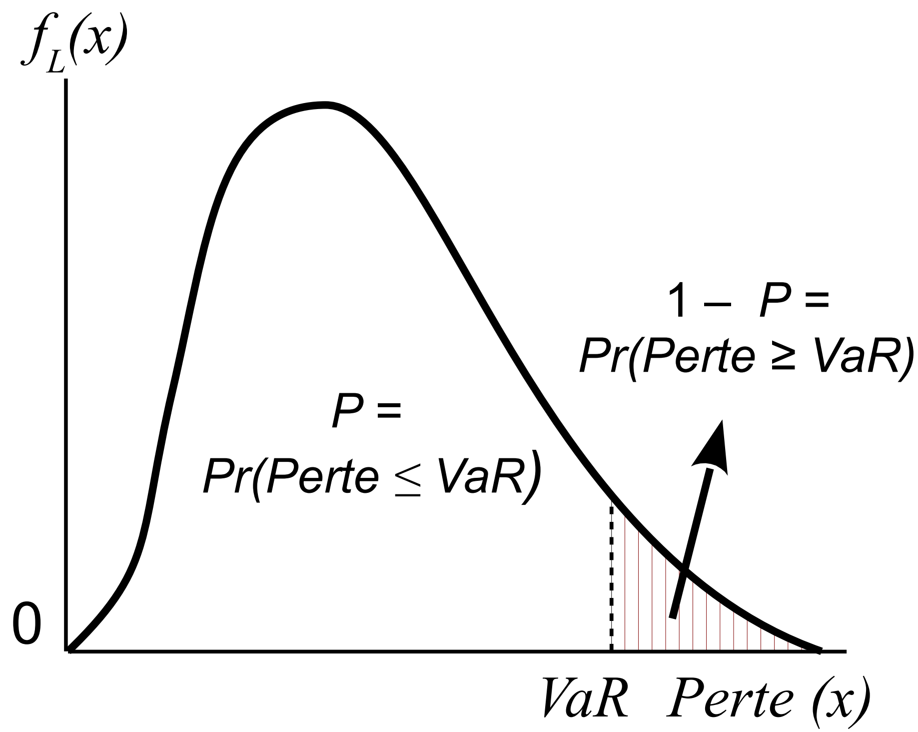
Exemple : Value-at-risk d'un portefeuille

« Si la VaR d'un portefeuille est de 1M€ à 10 jours au seuil de 99% , il y 99% de chances que la perte à 10 jours subie n'excède pas 1 M€ »

- à partir de la distribution des pertes à 10 jours : *Pr*(Perte ≤ *VaR*) = *P*

  → VaR au seuil *P* = « *P* quantile » de la distribution des pertes





1.4- Exemples de fonctions de répartition :

a- Loi de Bernoulli

- X peut prendre deux valeurs, 1 si « succès », ou 0 si « échec » : « épreuve »

- $Pr(X = 1) = \mathrm{p}$; $Pr(X = 1) = 1 - p$.
- $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

→ la valeur du château de Moulinsart...

b- Loi binomiale : $X \sim B(n, p)$

- loi du nombre de succès dans n « épreuves » de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

- $Pr(X=k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ où $k!=k\times(k-1)\times(k-2)\times\ldots\times 2\times 1$
- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

c- Loi de Poisson : $X \sim P(\lambda)$

- nombre de succès dans des « épreuves » de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, répétées indéfiniment, à nombre moyen de succès donné (λ)
- loi du nombre d'événements indépendants sur une période donnée, survenant en moyenne λ fois durant cette période (« loi des événements rares »)

- $Pr(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$
- $E(X) = V(X) = \lambda$

la loi de Poisson peut être utilisée comme approximation d'une loi binomiale $B(n, p)$ quand n est « grand » et p « petit » ($n > 50$, $p < 0{,}1$ et $np < 10$) avec $\lambda = np$.

- Si 3% des dossiers de crédit arrivent au contentieux pendant l'année suivant la signature, $e^{-3} 3^k / k!$ est la probabilité que k dossiers sur un lot de 100 deviennent contentieux avant un an.

d- Loi uniforme : $X \sim U(a, b)$

toutes les valeurs de l'intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$ sont équiprobables

- $Pr(X \leq x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ et $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
- $E(X) = (a + b)/2$ et $V(X) = (b - a)^2/12$

Un prêt à un an de 10 M€ au taux d'intérêt de 2 % a une probabilité de défaut de 1,25%. Le taux de recouvrement en cas de défaut est uniforme sur [0; 1].

Quelle est la fonction de répartition du revenu du prêt pour la banque ?

e- Loi normale (gaussienne) : $X \sim N(\mu, \sigma)$

- X peut prendre toutes les valeurs de de $\mathbb{R}$
- fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
- $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

loi normale centrée réduite : $N(0, 1)$

- $x \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow (x-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$
- $y \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$

Pour une variable gaussienne :

- distribution symétrique → *skewness* = 0
- distribution mésokurtique → *kurtosis* = 0

Théorème central-limite

Lindeberg et Lévy :

- Une suite de variables aléatoires X_1, X_2, … X_n, indépendantes de même loi et de même paramètres ayant une variance finie σ^2 (et donc une espérance μ) vérifie :

  la somme centrée et réduite $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)$ converge en loi vers $N(0,1)$.

  la moyenne centrée et réduite $\frac{1}{\sigma^2/n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)$ converge en loi vers $N(0,1)$.

Lyapunov :

- Une suite de variables aléatoires X_1, X_2, … X_n, indépendantes ayant chacune un moment d'ordre 3 (donc une variance finie σ_i^2 une espérance μ_i) vérifie :

  $\frac{1}{\sigma_\Sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_\Sigma\right)$ converge en loi vers $N(0,1)$ avec $\mu_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ et $\sigma_\Sigma{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

Conséquence :

- la loi normale est la loi limite de toutes les lois stables dans l'addition

par exemple : la loi normale est la loi limite de la loi binomiale quand n $\rightarrow \infty$

- **En finance :**
  On découpe la période de mesure de rentabilité en T sous-périodes
  $R_1 = \ln V_1 - \ln V_0$ $\rightarrow$ rentabilité logarithmique sur la période [0, 1]
  $r_t = \ln V_t - \ln V_{t-1}$ $\rightarrow$ rentabilité logarithmique sur la sous-période $[t - 1, t]$

$R_1 = \sum_{t=1}^{T} r_t$: pour T « assez grand » on peut considérer que R_1 suit une loi normale...

- la loi normale est la loi qui régit les phénomènes ayant des causes multiples, indépendantes, aux effets additifs et de faible ampleur (aucune cause ne domine)
  $\rightarrow$ « loi des effets additifs »

f- Loi log-normale : $X \sim LogN(\mu, \sigma)$

- X peut prendre toutes les valeurs strictement positives de $\mathbb{R}$
- $\ln X \sim N(\mu, \sigma)$
- fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
- $E(x) = e^{\mu+\sigma^2/2}$ et $V(x) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$

le logarithme transforme un produit en somme → « loi des effets multiplicatifs »

En finance :

$R_1 = \ln V_1 - \ln V_0$ suit une loi normale → V_1 suit une loi normale log-normale

1.5- Couple de variables aléatoires :

distribution jointe : $F(x_{0,} y_0) = Pr(X \leq x_0 \, et \, Y \leq y_0)$

→ règle de calcul : $\boxed{E(aX+bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)}$

→ règle de calcul : $\boxed{V(aX+bY) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y) + 2\,a\,b\,Cov(X,Y)}$

Covariance de X et de Y = espérance du produit – produit des espérances :

$$\boxed{Cov(X, Y) = E[X\,Y] - E[X]\,E[Y]}$$

→ règle de calcul : $\boxed{Cov(aX, Y+Z) = a\,Cov(X, Y+Z) = a\,Cov(X, Y) + a\,Cov(X, Z)}$

Coefficient de corrélation : rapport de la covariance au produit des écart-types :

$$\boxed{\rho(X, Y) = Cov(X, Y) / (\sigma_X\,\sigma_Y)}$$

1.6- La règle de Bayes :

- A et B deux événements aléatoires,
- $\bar{A}$ le complémentaire de A : P($\bar{A}$) = 1 – P(A)

Règle de Bayes → comment réviser la probabilité de A, après observation B.

- P(A) « probabilité *a priori* (marginale) de A » aussi appelée probabilité de A.
- P(A|B) = « la probabilité *a posteriori* (conditionnelle) de A sachant B »
- P(B|A), pour un B connu = « vraisemblance de A sachant B »

P(A & B) = P(B|A) P(A) = P(A|B) P(B)

→ règle de Bayes : **P(A|B) = P(B|A) P(A) / P(B)**

P(B) = P(A & B) + P($\bar{A}$ & B) = P(B|A) P(A) + P(B|$\bar{A}$) P($\bar{A}$)

$$\rightarrow \boldsymbol{P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}}$$

Application : Vous savez que...

- 80 % de vos clients (emprunteurs) sont « sûrs », 20 % sont « risqués »
- 90 % des clients « sûrs » payent « à temps »
- 50 % des clients « risqués » payent « en retard »

Un de vos client paye à temps... est-il « sûr » ou « risqué » ?

- La probabilité qu'il soit « sûr » est de …
- Globalement, la probabilité qu'un client paye à temps est de...

A = « le client est de type 'sûr' » ; $\bar{A}$ = « le client est de type 'risqué' »
B = « client 'ponctuel' » ; $\bar{B}$ = « client 'retardataire' »

P('*ponctuel*') = P('*ponctuel*'|'*sûr*') P('*sûr*') + P('*ponctuel*'|'*risqué*') P('*risqué*')

→ globalement (a priori), 82 % des clients sont '*ponctuels*'

P('*sûr*'|'*ponctuel*') = P('*ponctuel*'|'*sûr*') P('*sûr*') / P('*ponctuel*')

→ la probabilité a posteriori qu'un client ayant payé à temps soit sûr est de :

$$\frac{72\,\%}{82\,\%} \approx 87{,}8\,\%$$

→ remplir le tableau de contingence !