4- Valorisation des dettes

Objectif :

savoir...

- évaluer une obligation classique
- calculer taux de rendement actuariel, duration, et sensibilité d'une obligation
- interpréter la structure par termes des taux d'intérêt
- calculer des taux *forward* à partir de la structure par termes des taux d'intérêt
- utiliser la structure par termes des taux d'intérêt pour actualiser des cash-flows

- savoir expliquer le concept de risque de défaut
- avoir une idée sur des manières possibles d’évaluer la probabilité de défaut
- savoir expliquer le lien entre exposition au risque, probabilité de défaut, perte en cas défaut et perte attendue
- savoir faire le lien entre valeur des dettes et des fonds propres d’une etp et théorie des options.

Plan :

1. Évaluation d'obligation à taux fixe
2. Structure par termes des taux d'intérêt
3. Risque de taux
4. Risque de défaut

Bibliographie :

Farber, Laurent, Oosterlinck, Pirotte (2011) *Finance*, Pearson Education
Fabozzi (2007), *Fixed Income Analysis*, Wiley
Poncet, Patrice & Roland Portrait (2011), *Finance de Marché*, Dalloz
Harb, Veryzhenko, Masset & Murat (2014), *Finance*, Openbook, Dunod

Tablette (terre cuite, env. 6 cm × 7cm)
emprunt d'orge « à rendre après la moisson »
par Lulu-bâni avec serment devant témoins
(Tell Drehem, Puzrish-Dagan, époque néo-sumérienne, règne de Shu-Sin, 2037-2029 aC)

Tablette (terre cuite, env. 6 cm × 7cm)
Amurru-Erish se porte garant d'un prisonnier
pour dettes et le fait libérer
(Mésopotamie, époque bronze récent, règne de Kudur-Enlil, 1254-1246 aC)

(exposées au Louvre Lens, *"L'Histoire commence en Mésopotamie"*, 2016-2017)

1- ÉVALUATION D'OBLIGATION A TAUX FIXE

1.1- Obligations classiques :

- paiements périodiques (coupon d'intérêt) jusqu'à l'échéance,
- remboursement du principal à l'échéance (**in fine**)

- Valeur faciale ou nominale (le pair) = montant de la dette nominale
- Prime d'émission = valeur faciale – montant versé à l'émetteur
  → émission « au pair » : montant versé à l'émetteur = valeur faciale
- Prime de remboursement = montant payé à maturité – valeur faciale
  → remboursement « au pair » : montant payé à maturité = valeur faciale

- Coupon (paiement annuel en Europe...) = valeur nominale $\times$ taux nominal
- Taux nominal, ou taux du coupon = coupon/valeur faciale en %

- obligation à « taux fixe » : taux nominal fixé à l'émission

1.2- Prix de marché et taux de rendement actuariel (obligation à taux fixe) :

Prix de marché d'une obligation à taux fixe = somme actualisée des cash-flows :

$$P = C \times v_1 + C \times v_2 + \ldots + C \times v_T + V \times v_T$$

C = coupon d'intérêt annuel
V = valeur de remboursement
T = durée jusqu'à échéance
v_t = facteur d'actualisation $v_t = 1/(1+r_t)^t$

Taux de rendement actuariel = taux d'actualisation égalisant la VA des cash-flows au prix de marché (« taux de rendement interne » de « l'investissement dans l'obligation »)

Le taux de rendement actuariel (« yield to maturity »), r, est tel que :

$$\frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^T} + \frac{V}{(1+r)^T} - P = 0$$

Exemple 1 :

On considère une obligation à 10 ans, émise au pair, remboursée au pair in fine, de valeur nominale 1€, au taux nominal de 6 %.
Au moment de l'émission :

(a) quel le montant du coupon annuel ?
(b) quel est le prix d'émission si le taux d'actualisation est (1) 6 % ; (2) 7 % ?

Un an après l'émission, le taux d'actualisation est 7 %.
Quel est le prix de l'obligation :

(c) juste avant le versement du premier coupon ?
(d) juste après le versement du premier coupon ?

Réponse Exemple 1 :

Obligation à 10 ans, émise au pair, remboursée au pair in fine, de nominal 1€, au taux nominal de 6 %. Au moment de l'émission :

(a) quel le montant du coupon annuel ? **6 % x 1€ = 0,06 €**

(b) quel est le prix d'émission si le taux d'actualisation est (1) 6 % ; (2) 7 % ?

Prix = valeur actuelle des coupons et du remboursement

$$\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{C}{(1+r)^N}+\frac{V}{(1+r)^N}=\frac{C}{r}+\frac{V-C/r}{(1+r)^N}$$

r = 6 % → P = 1€

r = 7 % → P = 0,93€

Un an après l'émission, taux d'actualisation 7 %, quel est le prix de l'obligation...

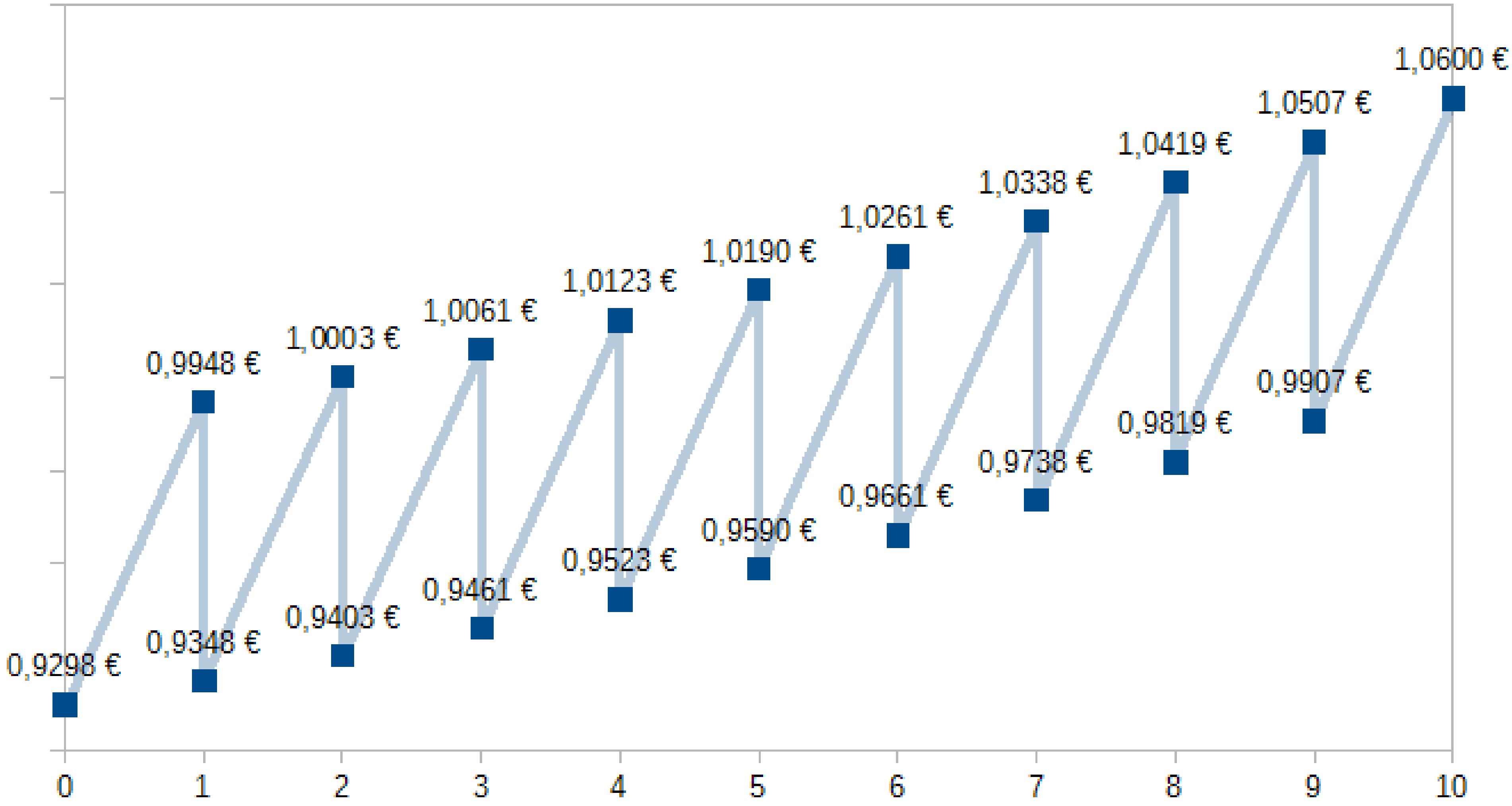
(c) juste avant le versement du premier coupon ?

$$P_{avant}=C+\frac{C}{r}+\frac{V-C/r}{(1+r)^{N-1}}=(1+r)\times P_0 = \rightarrow \boldsymbol{P_{avant}} = \mathbf{0{,}995€}$$

(d) juste après le versement du premier coupon ?

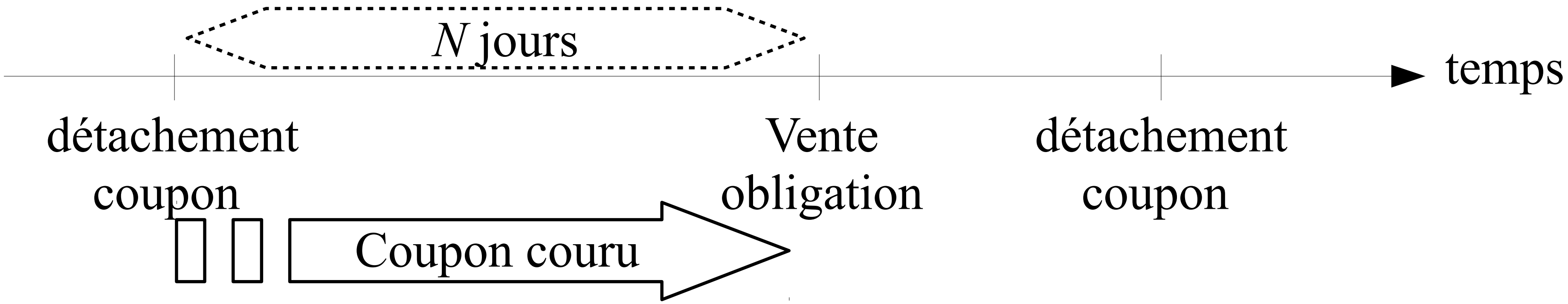
$$P_{après}=P_{avant}-C=\frac{C}{r}+\frac{V-C/r}{(1+r)^{N-1}} \rightarrow \boldsymbol{P_{après}} = \mathbf{0{,}935€}$$

Evolution du prix de l'obligation
(NB : taux d'actualisation > taux nominal → le prix augmente dans le temps)



1.3- Cotation :

- en pourcentage de la valeur nominale
- hors coupon couru



Coupon couru (*accrued interest*) : revient au vendeur $C \times N/365$ ou $C \times N/366$

Cours « pied de coupon » = $(1+r)^{N/365}\left[\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{C}{(1+r)^T}+\frac{V}{(1+r)^T}\right]$

- prix au dernier détachement capitalisé
- coté en pourcentage du nominal

Retrouver le prix d'achat/vente de l'obligation à partir de la cote :

prix d'achat/de vente « *dirty price* » « cours plein coupon »	=	prix coté « *clean price* » « cours pied de coupon »	+	coupon couru (exact/exact)

Exemple 2 :

Une obligation de valeur faciale 5000€ et de taux nominal 6,90 % distribue un coupon le 08/03 de chaque année pendant encore 10 ans, cote au pied du coupon 112,10 le 04/06/N (88 jours après le détachement du précédent coupon).

(a) Quel est le coupon couru ? En Euros ? En pourcentage du nominal ?

(b) Combien vaut le cours plein coupon (en pourcentage du nominal) ?

(c) Quel est le prix de l'obligation (en euros) ?

Réponse exemple 2 :

Une obligation de valeur faciale 5000€ et de taux nominal 6,90 % distribue un coupon le 08/03 de chaque année pendant encore 10 ans, cote au pied du coupon 112,10 le 04/06/N (88 jours après le détachement du précédent coupon).

(a) Quel est le coupon couru ? En Euros ? En pourcentage du nominal ?

Coupon annuel payé le 08/03/N = 6,90 % x 5000€ = 345 €

Coupon couru au 04/06/N = 345 € x 88 / 365 = **83,18 €** (si N+1 non bissextile)

soit **1,66 % du nominal**

(b) Combien vaut le cours plein coupon (en pourcentage du nominal) ?

Cours plein coupon = 112,10 + 1,66 = 113,76

(c) Quel est le prix de l'obligation (en euros) ?

Prix de l'obligation = 113,76 x 5000 € = 5688 €

1.4- Propriétés :

Pour toute obligation classique à taux fixe :

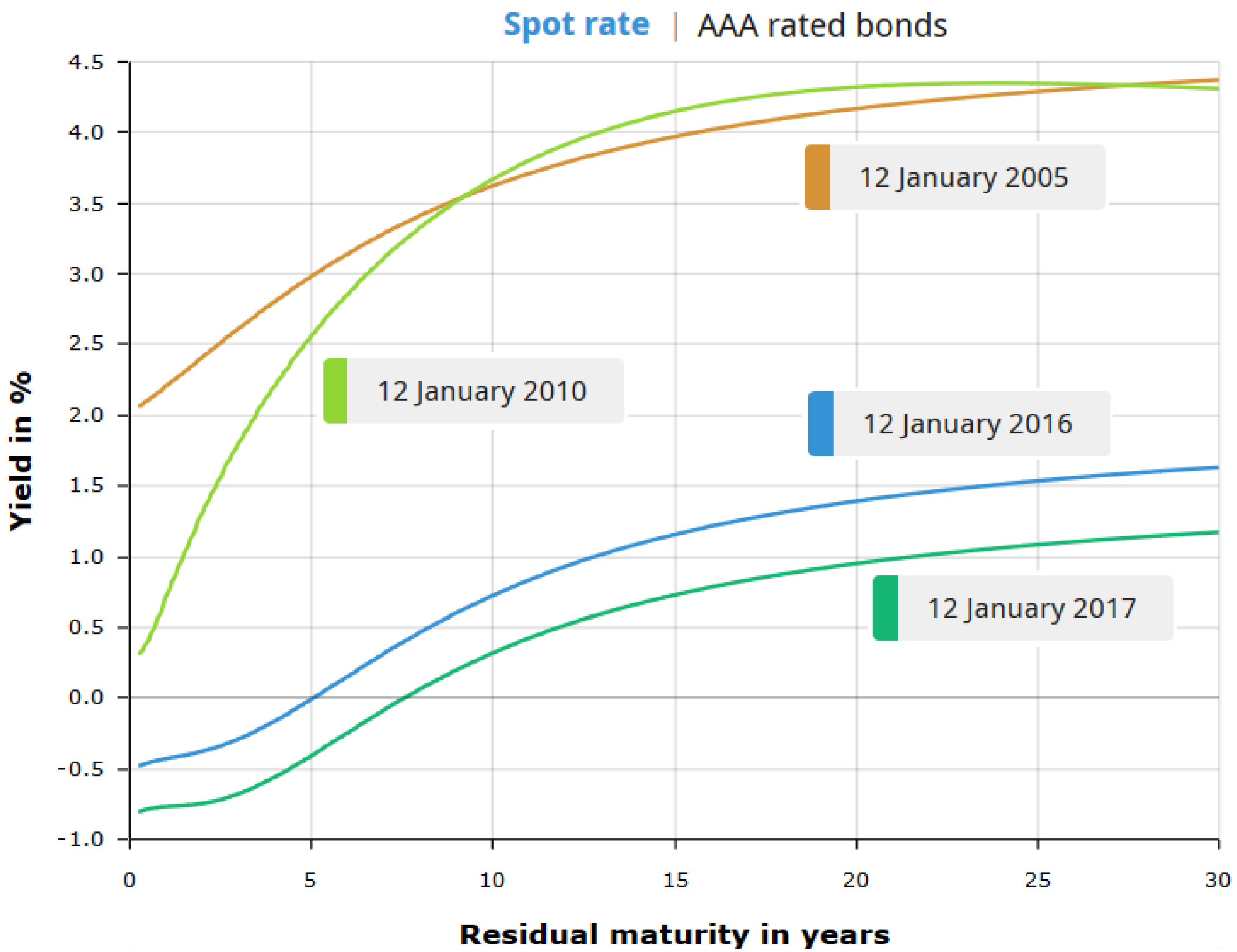
- Si prix actuel = remboursement final = valeur nominale,
  alors taux actuariel = taux nominal (coupon / valeur nominale)

- taux actuariel > taux nominal
  quand prix actuel < valeur faciale (obligation cote en-dessous du pair)

- Prix actuel et taux de rendement actuariel varient en sens inverse

2- STRUCTURE PAR TERMES DES TAUX D'INTÉRÊT

Taux de rendement des obligations souveraines AAA de la zone euro
en fonction de la maturité restante



http://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html

2.1- Courbe des taux

Courbe des taux = niveau des taux d'intérêt de diverses obligations (d'État) en fonction de leur maturité

- courbe des taux « croissante » (habituelle, normale) : taux longs > taux courts
- courbe des taux « plate » : taux longs = taux courts
- courbe des taux « décroissante » (inversée) : taux longs < taux courts.

La théories explique-t-elle le fait observé ?	variation conjointe des taux d'intérêt dans le temps	courbe des taux habituellement croissante	structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
théorie des anticipations	oui	non	oui
théorie de la prime de liquidité	oui	oui	oui

2.2- La théorie des anticipations

Hypothèse : parfaite substituabilité des obligations de maturité différentes

- indifférence de l'acheteur à la maturité
- neutralité au risque de réinvestissement

détermination du taux long : $r_{n,t} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(r_{1,t} + r^a_{1,t+1} + \ldots + r^a_{1,t+n-1} \right)$

« taux d'intérêt à LT = moyenne des taux courts futurs anticipés »

Explication...

- … des formes de la courbe des taux
- … des changements conjoints des taux de maturités différentes
- … d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
- … pas de la courbe des taux *habituellement* croissante

NB : Les taux longs sont moins volatils que les taux courts : $Var\left(r_{n,t}\right) \approx \frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$

2.3- Les théories de la prime de liquidité et de l'habitat préféré

Hypothèse : obligations de maturités différentes *imparfaitement* substituables

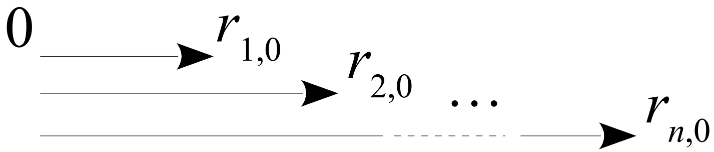
- Théorie de la prime de liquidité : « taux d'intérêt à LT = moyenne des taux courts futurs anticipés + prime de liquidité »
- Théorie de l'habitat préféré : les investisseurs ont une préférence pour pour des obligations d'une certaine maturité (plutôt courte), leur *habitat préféré*

Explication: deux théories voisines qui expliquent

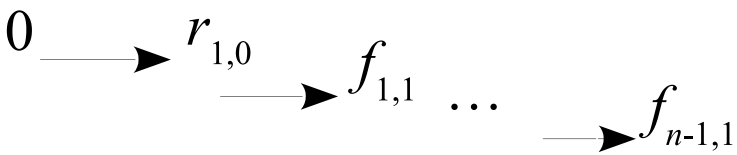
- … des formes de la courbe des taux
- … des changements conjoints des taux de maturités différentes
- … d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
- … de la courbe des taux *habituellement* croissante

2.4- Application : Structure par terme des taux d'intérêt et taux forward

Taux « spots » : taux applicables aujourd'hui sur diverses échéances, « $r_{n,0}$ »



Taux à terme ou taux *forward* : taux applicables à une date ultérieure t sur diverses échéances $n+t$, « $f_{n,t}$ »



Les taux *forward* se déduisent des taux spots par absence d'arbitrage

ex : $(1+r_{2,0})^2=(1+r_{1,0})(1+f_{1,1})$

3- RISQUE DE TAUX

risque de perte en capital en cas de hausse du taux de marché (taux d'actualisation)

3.1- Variation d'une obligation : $\frac{dP}{dr} < 0$ $\quad \uparrow r \Rightarrow \downarrow P$

- mesure la pente de la relation entre prix et taux d'intérêt

3.2- Sensibilité de l'obligation : $S = \frac{-dP/P}{dr}$

- mesure la baisse du prix due à une hausse de 100 pb du taux d'intérêt

exemple : une obligation dont la sensibilité est égale à 6 perd environ 6 % de sa valeur quand le taux d'intérêt augment de 100 points de base.

3.3- Convexité de l'obligation : $\Gamma = \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dr^2}$

- La relation entre prix et taux de rendement actuariel n'est pas linéaire
- La *variation* n'est pas constante : $\Gamma = \frac{1}{P} \frac{d V}{dr}$

approximation linéaire de la relation entre prix et taux d'intérêt :

$$\Delta P \approx \frac{dP}{dr} \times \Delta r$$

approximation quadratique de la relation entre prix et taux d'intérêt :

$$\Delta P \approx \frac{dP}{dr} \times \Delta r + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \times (\Delta r)^2 \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta P}{P} \approx -S \times \Delta r + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta r)^2$$

Conséquences de la convexité :

- mesurer variation du prix à partir de la sensibilité → surévaluation en val. abs. des effets d'une hausse du taux d'int. et sous-évaluation des effets d'une baisse
- effets de Δr sur P plus fort à la baisse $(\Delta r < 0)$ qu'à la hausse $(\Delta r > 0)$.

Exemple 3 :

1. Calculer le prix, la variation, la sensibilité et la convexité d'un zéro-coupon unitaire à 2 ans en fonction du taux d'intérêt (noté r).

2. Calculer le prix, la variation, la sensibilité et la convexité d'un zéro-coupon unitaire à 2 ans quand le taux d'intérêt vaut 10 % ,puis quand le taux d'intérêt vaut 11 %.

3. Calculer la variation attendue du prix du zéro-coupon unitaire à 2 ans en cas de passage de 10 % à 11 % du taux d'intérêt, par approximation linéaire, puis par approximation quadratique.

4. Commenter les résultats.

5. Représenter sur un graphique la relation en prix d'un zéro-coupon unitaire à 2 ans et taux d'intérêt.

Réponse Exemple 3 :

1. *Calculer le prix, la variation, la sensibilité et la convexité d'un zéro-coupon unitaire à 2 ans en fonction du taux d'intérêt (noté r).*

$$P=\frac{1}{(1+r)^N} \text{ ; d'où : } \frac{dP}{dr}=\frac{-N}{(1+r)^{N+1}} \text{ ; } S=\frac{-dP}{P\,dr}=\frac{N}{1+r} \text{ ; } \Gamma=\frac{1}{P}\frac{d^2P}{dr^2}=\frac{N(N+1)}{(1+r)^2}$$

2. *Calculer le prix, la variation, la sensibilité et la convexité d'un zéro-coupon unitaire à 2 ans quand le taux d'intérêt vaut 10 % ,puis quand le taux d'intérêt vaut 11 %.*

Taux d'intérêt	prix	sensibilité	convexité
10 %	82,645	1,8182	4,9587
11 %	81,162	1,8018	4,8697

Si le taux d'intérêt passe de 10 % à 11 %, le prix du ZC à 2 ans baisse de 1,483.

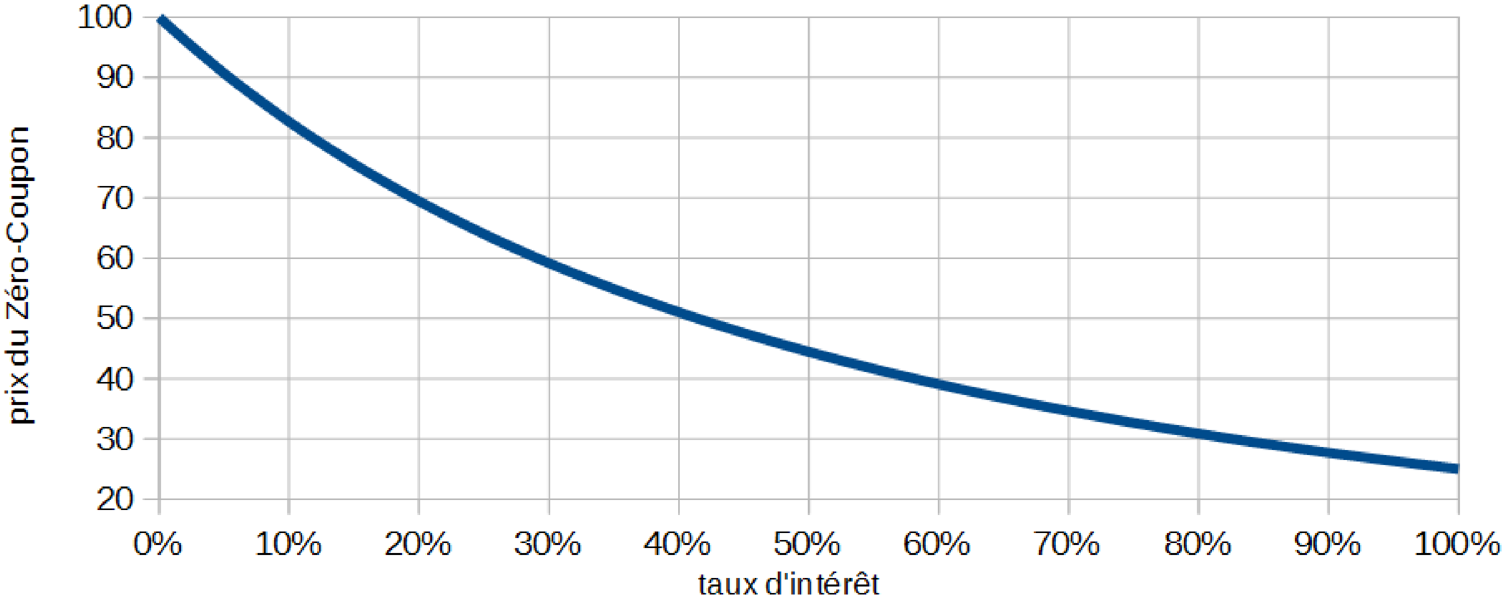
3. Calculer la variation attendue du prix du zéro-coupon unitaire à 2 ans en cas de passage de 10 % à 11 % du taux d'intérêt, par approximation linéaire, puis par approximation quadratique.

par approximation linéaire : $\Delta P \approx -S \times \Delta r \times P$

$$\Delta P \approx -1{,}8181 \times 0{,}01 \times 82{,}645 = -1{,}503$$

par approximation quadratique : $\Delta P \approx -S \times \Delta r \times P + \frac{1}{2} \Gamma \times (\Delta r)^2 \times P$

$$\Delta P \approx -1{,}503 + 0{,}5 \times 4{,}9587 \times (0{,}01)^2 \times 82{,}645 \approx -1{,}4825$$



3.4- Lien entre maturité et risque de taux :

définir la maturité :

- Pour une obligation zéro-coupon : un seul cash-flow → maturité = échéance

- Pour toute autre obligation, il existe plusieurs cash-flows à dates différentes

  - **Durée de vie moyenne** : moyenne arithmétique des dates de remboursement (= échéance finale si remboursement *in fine*)

  - **Duration :** moyenne des dates de paiements pondérées par les cash-flows actualisés → une *durée moyenne*

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \frac{CF_t (1+r)^{-t}}{\sum_{t=1}^{T} CF_t (1+r)^{-t}}$$

- La sensibilité est appelée aussi « **duration modifiée** » car $S = \dfrac{D}{1+r}$

→ l**a sensibilité est d'autant plus forte que la duration est élevée**

Toutes choses égales par ailleurs (rendement actuariel, maturité), plus le taux nominal est bas, plus la sensibilité de l'obligation est élevée.

Étant donnés le taux de rendement actuariel r
et l'échéance N,
le prix P et le taux nominal i sont reliés par :

$$P = \frac{i}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) + \frac{1}{(1+r)^N}$$

i	9%	9%	6%	6%	0%	0%
r	6,0%	6,5%	6,0%	6,5%	6,0%	6,5%
N	20	20	20	20	20	20
P (% nominal)	134,4098	127,5463	100,0000	94,4907	31,1805	28,3797
$\Delta P / P$	5,11%		5,51%		8,98%	
sensibilité	-10,21		-11,02		-17,96	

Un zéro-coupon a une sensibilité plus élevée qu'une obligation versant coupon de même maturité et de même rendement.

Toutes choses égales par ailleurs (rendement actuariel, maturité),
Plus la maturité est longue (échéance éloignée), plus la duration est élevée et **plus la sensibilité de l'obligation est élevée.**

i	9%	9%	9%	9%	9%	9%
r	6,0%	6,5%	6,0%	6,5%	6,0%	6,5%
N	20	20	10	10	5	5
P (% nominal)	127,5463	122,0803	117,9721	112,6371	110,3892	127,5463
$\Delta P / P$	5,11%		3,37%		2,00%	
sensibilité	-10,21		-6,73		-3,99	

→ obligations à LT soumises à un *fort risque de taux* : placements risqués pour des périodes brèves.
→ les obligations à CT ont un *moindre de risque de taux* MAIS un plus fort *risque de réinvestissement*
(maturité inférieure à la durée du placement : taux sur la fin période inconnu)

3.5- Remarques :

(1) obligation à taux flottant :

taux = taux de référence+marge (référence et marge fixées à l'émission)

- *taux révisable : connu en début de période (prédéterminé)*
- *taux variable : connu en fin de période (post-déterminé)*

→ variation du coupon ≈ variation du taux d'intérêt
prix ≈ valeur nominale (pas de risque de taux)

(2) **évaluer des cash-flows de maturités différentes avec la courbe des taux**

→ pour mesurer le risque de taux, il faut prendre en considération la déformation de la courbe des taux :

- niveau + pente + convexité changent
- le calcul précédent de sensibilité supposait un déplacement *parallèle*

4- RISQUE DE DÉFAUT

4.1- Spread de signature et prime de risque

L'emprunteur peut ne pas payer les intérêts et/ou rembourser le principal (à la date convenue)...

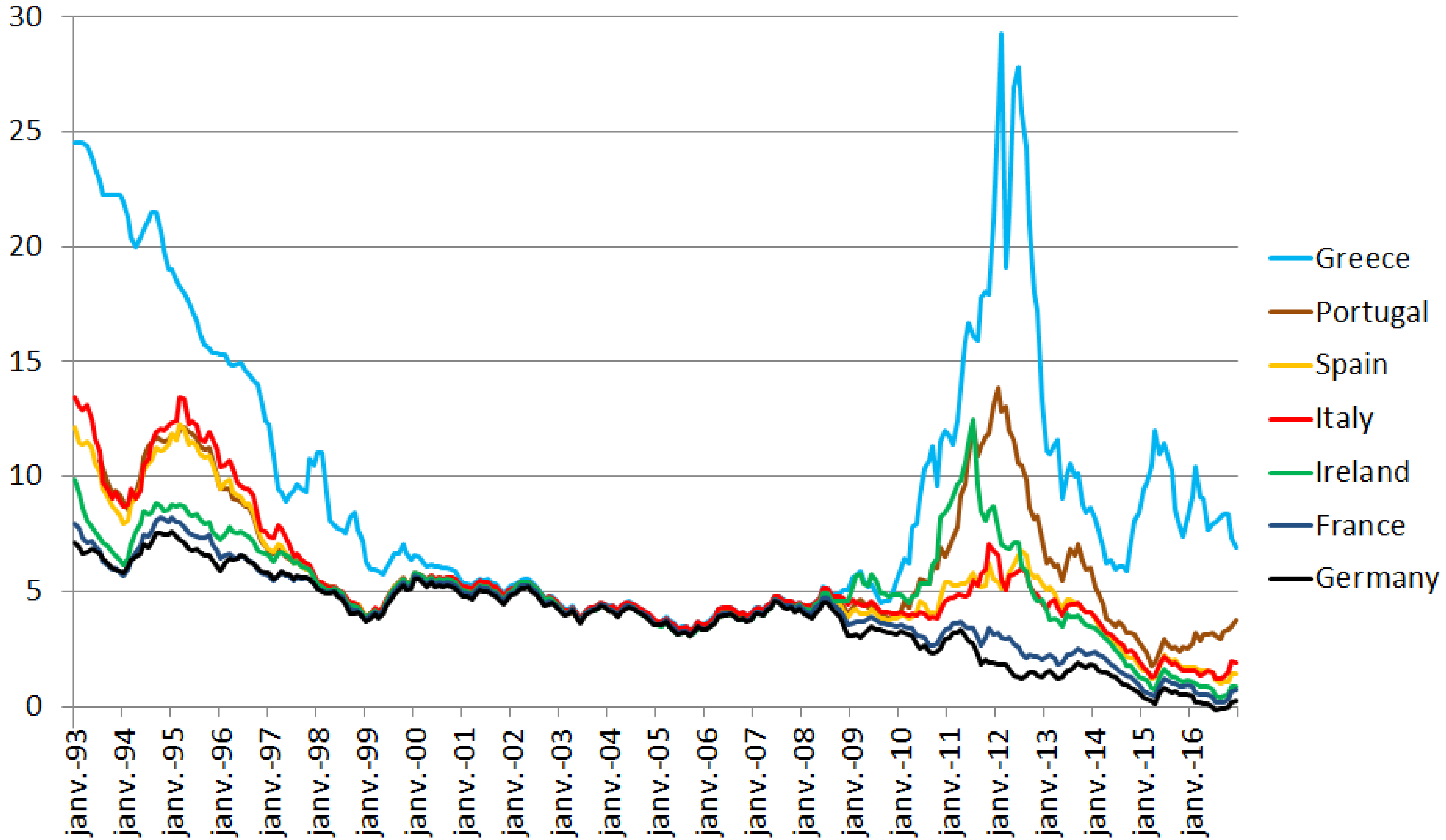
Les obligations d'État sont considérées comme « sans risque de défaut »…
car le gouvernement peut toujours payer en créant de la monnaie...
MAIS : risque d'(hyper-)inflation
union monétaire (cf. zone euro : Allemagne vs *PIIGS*)

Une entreprise peut faire défaut (voire faillite).

- dans le meilleur des cas (pas de défaut) : taux de rentabilité maximum r_{max}
- à cause du risque de défaut : rentabilité espérée E(r) < rentabilité maximale
- à cause de l'aversion au risque : rentabilité espérée > taux sans risque

→ taux de rentab. max = taux sans risque + spread de signature + prime de risque

Harmonised long-term interest rates for convergence assessment purposes



source : ECB http://www.ecb.int/stats/money/long/html/index.en.html

Long-term interest rate for convergence purposes - 10 years maturity, denominated in Euro

4.2- Exemple :

- prêter 1 au gouvernement au taux r_f
- prêter 1 à une entreprise qui :
  - « réussit » avec une proba $1 - P$ et rembourse le prêt au taux convenu r_{max},
  - « échoue » avec une proba P et rembourse $1 + r_{max} - l$

    (l : taux de perte en cas de défaut, $1 > l > 0$).

en cas de neutralité au risque : rentabilité attendue exigée = r_f

- rentabilité moyenne du prêt à l'entreprise : $(1 - P)\, r_{max} + P\,(r_{max} - l)$
- absence d'opportunité d'arbitrage → $\boldsymbol{r_{max} = r_f + P\,l}$

EAD : « exposition at default » = 1

LGD : « loss given default » = l

P : « probability of default » = P

EL :« expected loss » = $P\,l$:

$$EL = EAD \times LGD \times P$$

en cas d'aversion au risque : ajouter une prime de risque

rentabilité attendue exigée = $r_f + \pi$

4.3- Approche structurelle (Merton) : principes

Bilan (structure financière) en valeur de marché : $S_t = A_t + D_t$

- actions : $A_T = \max(0, S_T - X) \rightarrow$ call sur la valeur des actifs
- dette (zéro coupon à échéance T) : $D_T = \min(X, S_T) = X - \max(0, X - S_T)$
  $\rightarrow$ dette sans risque + put court sur la valeur des actifs

Avec la formule de Black-Scholes-Merton :

Valeur (actualisée) de la dette risquée : $D_0 = D_T \mathrm{e}^{-r_f T} = X \mathrm{e}^{-r_f T} - P_0$

où : X est la valeur faciale de la dette (prix d'exercice du put)
S_0 est la valeur des actifs (sous-jacent du put)
P_0 est le prix du put : $P_0 = S_0 [N(d_1) - 1] + X \mathrm{e}^{-r_f T} [1 - N(d_2)]$

avec :

- $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale. NB : $N(-x) = 1 - N(x)$
- $d_1 = \dfrac{\ln(S_0 / X) + (r_f + \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$

La valeur de la dette risquée s'écrit : $D_0 \;=\; X\,\mathrm{e}^{-r_f T} N(d_2) + S_0 N(-d_1)$

soit : $D_0 \;=\; X\,\mathrm{e}^{-r_f T} - N(-d_2)\left[X\,\mathrm{e}^{-r_f T} - S_0 \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}\right]$

Valeur actuelle de la dette sans risque

Probabilité risque-neutre de défaut

Valeur actuelle espérée de la perte en cas de défaut, entre []

Valeur actuelle espérée du recouvrement

Le rendement à l'échéance de la dette risquée est *r* tel que : $D_0 \;=\; X\,\mathrm{e}^{-r T}$

Le spread de crédit vaut : $r - r_f \;=\; -\frac{1}{T} \ln\left[1 - N(-d_2)\left(\mathrm{e}^{-r_f T} - \frac{S_0}{X}\frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}\right)\right]$

Exemple d'évaluation d'actions et de dette risquée (Merton)

Entreprise créée pour 1 an

- Investissement de durée de vie d'1 an : I_0 = 1 M€
- Financement par dette (D) ou fonds propres (FP) : $I = D + FP$.

Taux d'intérêt sans risque r_f = 5%.

Les cash-flows sont :

$$C \begin{cases} \xrightarrow{50\%} 1{,}9 \\ \xrightarrow{50\%} 0{,}6 \end{cases}$$

→ Cash-flow attendu : 1,25 M€

- Dette (zéro coupon à échéance 1 an) : 0,65 M€ dus dans un an.

→ Défaut de paiement dans le « mauvais état »

- perte (absolue) en cas de défaut : 0,05 M€
- probabilité de défaut : 50 %

Bilan (structure financière) en t = 1 en valeur de marché : $S_t = FP_t + D_t$
X = la valeur faciale de la dette

	État 1	État 2
Compte de résultat		
Bénéfice = résultat d'exploitation :	1,90	0,60
Affectation		
Remboursement (responsabilité limitée) :	0,65	0,60
Dividendes :	1,25	0

- actions : $FP_1 = \max(0, S_1 - X)$
  → call long sur la valeur des actifs
- dette : $D_1 = \min(X, S_1) = X - \max(0, X - S_1)$
  → dette sans risque + put court sur la valeur des actifs

Évaluation des actions : évaluation d'un call par réplication.

$$A = \delta_A \; V - B$$

call = portefeuille contenant « delta » projet d'investissement et le titre sans risque … constitué de manière à dupliquer les cash-flows.

	prix en t = 0	cash-flow dans l'**état 1**	cash-flow dans l'**état 2**
Titre sans risque	1	1,05	1,05
Actif (immo)	1	1,90	0,60
Dette risquée	?	0,65	0,60
Fonds propres	?	1,25	0

Les cash-flows du titre sans risque, des actions et du « sous-jacent » :

$$\begin{cases} 1{,}90\,\delta_A + 1{,}05(-B) = 1{,}25 \\ 0{,}60\,\delta_A + 1{,}05(-B) = 0 \end{cases}$$

… déterminent le delta des actions et l'emprunt sans risque :

$$\begin{cases} \delta_A \approx 0{,}9615 \\ B \approx 0{,}5495 \end{cases}$$

D'où la **valeur initiale des fonds propres** (du *call*) :

$$FP_0 = \delta_A \times I_0 - B \quad \text{soit} \quad FP_0 \approx 0{,}9615 \times 1 - 0{,}5495 \approx 0{,}4121$$

On en déduit le **bilan initial en valeur de marché…**

Immobilisations : I_0	1
Capitaux propres : FP_0	0,4121
Dettes : $D_0 = 1 - FP_0$	0,5879

Et le **taux d'intérêt sur dette risquée** : (0,65 – 0,5879)/0,5879 = **10,5607 %**

Rentabilités attendues des actifs :

- Proba de hausse du sous-jacent = 50 %
- Probabilité de défaut : PD = 50 %

Rentabilité attendue	des fonds propres : $r_A = E(DIV)/FP_0 - 1$	51,67 %
	de la dette risquée : $r_D = E(REMB)/D_0 - 1$	6,31 %
	des immobilisations : $E(C)/I_0 - 1$	25,00 %

Rem : coût moyen pondéré du capital **CMPC** = $r_A(FP_0/I_0) + r_D(D_0/I_0)$ = 25,00 %

Lien entre perte en cas de défaut, probabilité de défaut et spread de signature

Exposition au défaut : EAD = 0,5879

Perte en cas de défaut : absolue : LGDA = 0,65 – 0,60 = 0,05

relative : LGD = 0,05 / 0,5879 = 8,5048 % = LGDA / EAD

Spread de taux = taux risqué (10,56 %) – taux sans risque (5 %) = 5,56 %

- spread de signature = PD x LGD = 50 % x 8,5048 % = 4,25 %
- prime de risque = $r_D - r_f$ = 6,31 % – 5% = 1,31 %

Les **rentabilités** attendues (risque-neutres) des actifs :

- Proba r-neutre de hausse du sous-jacent = (1,05 – 0,6)/(1,9 – 0,6) = 34,62 %
- Probabilité risque-neutre de défaut : PD = 1 – 34,62 % = 65,38 %

Rentabilité attendue	des fonds propres : r_A = E(DIV)/FP_0 – 1	5 %
	de la dette risquée : r_D = E(REMB)/D_0 – 1	5 %
	des immobilisations : E(C)/I_0 – 1	5 %

Lien entre perte en cas de défaut, probabilité de défaut et spread de signature

Exposition au défaut : EAD = 0,5879

Perte en cas de défaut : absolue : LGDA = 0,05

relative : LGD = 0,05 / 0,5879 = 8,5048 % = LGDA / EAD

Spread de taux = taux risqué (10,5607 %) – taux sans risque (5 %) = 5,56 %

spread de signature = PD x LGD = 65,38 % x 8,5048 % = 5,56 %

→ neutralité au risque : prime de risque = 0, tout le spread est « de signature »

4.4- Rôle des agences de notation (de *rating*) :

Moody's	→	http://www.moodys.com/
Standard & Poor's	→	http://www.standardandpoors.com/
Fitch	→	http://www.fitchratings.com/
Banque de France	→	http://www.fiben.fr/fiben.htm
COFACE	→	http://www.coface.fr/

Notation → « score » de crédit, attribué par confrontation

- de résultats de « systèmes experts » : modèles statistiques utilisant des critères quantitatifs :
  levier financier (dettes sur capitaux propres) → solvabilité structurelle
  ratio de couverture des intérêts (EBE / intérêts) → solvabilité liée à la liquidité

- du jugement de l'analyste

4.5- méthodes statistiques :

(i) analyse discriminante multiple (Altman 1968 http://pages.stern.nyu.edu/~ealtman/)

méthode de classification (en faillite ou non) et de prédiction

à partir de caractéristiques (X_i) de l'entreprise (1 an ou 2 ans auparavant)

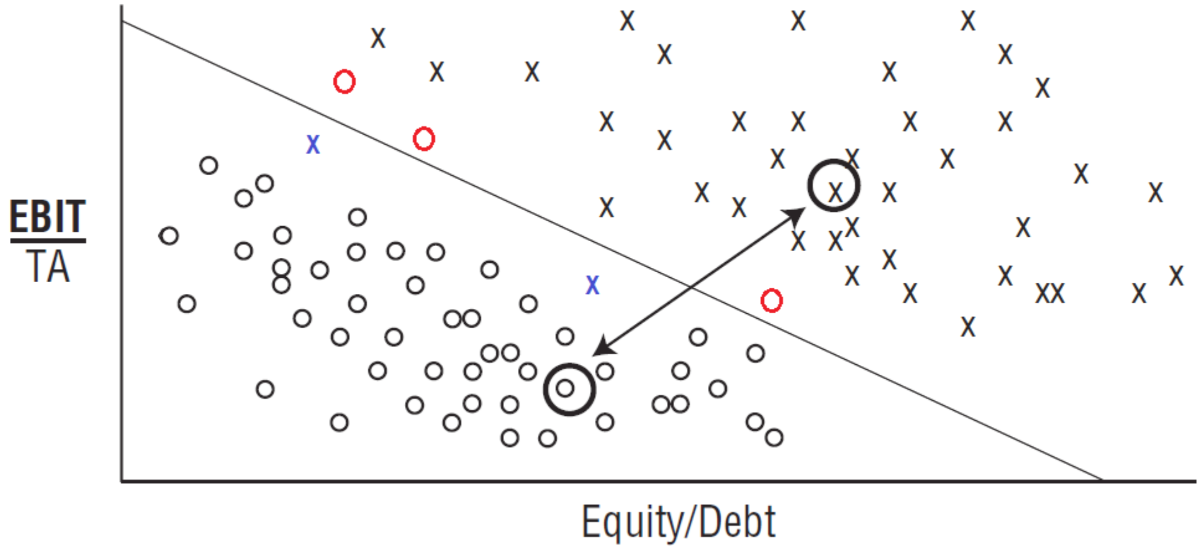
1. fonds de roulement / actifs totaux → proportion d'actifs liquides
2. bénéfices non distribués / actifs totaux → profitabilité
3. EBE / actifs totaux → efficacité opérationnelle
4. valeur $\begin{pmatrix}\text{de marché} \\ \text{ou comptable}\end{pmatrix}$ du capital / valeur de la dette → levier, solvabilité structurelle
5. chiffre d'affaires / actifs totaux → mesure du *turnover*

et de coefficients a_i calculés à partir d'un échantillon d'entreprises (faillite ou non)

on calcule le « Z-score » : $Z = a_1 X_1 + \ldots + a_5 X_5$

→ La faillite est d'autant plus vraisemblable que le score est bas.

Prévoir la détresse financière avec le score :



équation de la droite :

$$Z^* = a_3 X_3 + a_4 X_4$$

au-dessus de la droite : $Z < Z^*$
au-dessous de la droite : $Z > Z^*$

O = etp en bonne santé
X = etp en détresse financière
X bleu : erreur de type I
O rouge : erreur de type II

le score Z discrimine efficacement si :

- peu d'erreurs de type I (classer « en bonne santé » une entreprise en faillite : X sous de la droite)
- peu d'erreurs de type II (classer « en faillite » une etp en bonne santé : O au-dessus de la droite)

Altman (1968) $\boldsymbol{Z = 1{,}2\, X_1 + 1{,}4\, X_2 + 3{,}3\, X_3 + 0{,}6\, X_4 + 1{,}0\, X_5}$ (etp cotées)

$Z < 1{,}81$: faillite ; $Z > 2{,}99$: bonne santé

Altman (1993) $\boldsymbol{Z' = 0{,}717\, X_1 + 0{,}847\, X_2 + 3{,}107\, X_3 + 0{,}42\, X_4 + 0{,}998\, X_5}$ (etp non cotées)

$Z' < 1{,}23$: faillite ; $Z' > 2{,}90$: bonne santé

cf. Altman & Hotchkiss (2006) *Corporate Financial Distress and Bankruptcy*, Wiley

(ii) méthodes économétriques : logit, probit

méthodes de régression où :
- la variable expliquée est la probabilité de faillite (entre 0 et 1)
- les variables explicatives sont des caractéristiques de l'entreprise

Pour garantir que le résultat de la régression est bien compris entre 0 et 1, on utilise des fonctions spécifiques plutôt qu'une régression linéaire :
- répartition logistique → logit,
- répartition gaussienne → probit.

$$P = \mathrm{F}(a_1 X_1 + \ldots + a_5 X_5 + \epsilon) \quad \text{avec} \quad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \text{ pour logit,}$$

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt \quad \text{pour probit}$$

Application : évaluer une dette risquée à l'aide d'un modèle binomial.

Une entreprise récemment introduite en bourse (250000 actions, 10€/action).
Pas de dette, pas d'IS. Projet d'investissement : 2 M€.
Au cours d'une année, la valeur de l'entreprise peut soit doubler, soit diminuer de moitié.

Financement par émission d'un zéro-coupon à 2 ans, de nominal 3 M€.
Une banque est prête à souscrire pour 2M€ (soit un taux d'intérêt de 22,47 %).
Le taux sans risque est 2 %:

- (a) Décrire l'évolution de la valeur (des actifs) de l'entreprise.
- (b) Valeurs possibles des actions dans deux ans ?
- (c) Valeur des actions et de la dette aujourd'hui ? Conclusion ?
- (d) A quel taux (maximum) l'entreprise emprunte-t-elle ?

éléments de réponse :

Le taux d'intérêt proposé par la banque est 22,47 % tel que : $2 = 3/(1+22{,}47\%)^2$

(a) (b)

t=0	t=1	t=2		
Actifs	Actifs	Actifs	Dette	**Actions**
4,5	9	18	3	**15**
		4,5	3	**1,5**
	2,25			
		1,125	1,125	**0**

(c) Valeur des actions à l'échéance : $\max\{V_2 - 3\ ;\ 0\}$

→ **Valeur initiale des actions** = valeur d'un call européen =...= 2,385749
VAN des fonds propres = –0,114151 !

→ **Valeur initiale de la dette risquée** = 4,5 – 2,385749 = 2,114151
valeur de la dette en l'absence de risque : $3/(1 + 2\%)^2 = 2{,}883506$
dette risquée = dette sans risque + put court → valeur du put = 0,114251

→ la banque a vendu aux actionnaires le droit de faire faillite… trop cher !

(d) 18,17 %, tel que la valeur de la dette risquée est égal au montant obtenu, 2.

(c) Évaluation des actions :

par actualisation au taux sans risque de l'espérance risque-neutre des valeurs en t=2 :

(1) probabilité risque neutre de hausse : $p = (1{,}02 - 0{,}5)/(2 - 0{,}5) = 34{,}67\ \%$

(2) espérance risque neutre de la valeur des actions :

$(34{,}67\ \%)^2 \times 15 + 2 \times (34{,}67\ \%) \times (1 - 34{,}67\ \%) \times 1{,}5 + (1 - 34{,}67\ \%)^2 \times 0 = 2{,}482133$

(3) valeur actuelle : $2{,}482133/(1 + 2\%)^2 = 2{,}385749$

(d)

t=0	t=1	t=2		
Actifs	Actifs	Actifs	Dette	Actions
		18	M	18 – M
	9			
4,5		4,5	M	4,5 – M
	2,25			
		1,125	1,125	0

Trouver M (montant dû en t = 2) et r (taux d'intérêt) tels que :

- $M/(1 + r)^2 = 2$; montant emprunté = 2
- VAN des actions = 0, valeur initiale des actions = 4,5 – 2 = 2,5

espérance risque neutre de la valeur des actions :

$$(34{,}67\ \%)^2 \times (18 - M) + 2 \times (34{,}67\ \%) \times (1 - 34{,}67\ \%) \times (4{,}5 - M)$$

soit : $4{,}2016 - 0{,}573156\ M$

valeur actuelle des actions : $(4{,}2016 - 0{,}573156\ M)/(1 + 2\%)^2 = 2{,}5$

$\rightarrow$ M = 2,792610 et **r = 18,17 %**

Lien entre perte en cas de défaut, probabilité de défaut et spread de signature :

Exposition au défaut : EAD = 2

Perte en cas de défaut : absolue : LGDA = 2,792610 – 1,125 = 1,667610
relative : LGD = 1,667610 / 2 = 83,3805 % = LGDA / EAD

Probabilité (risque neutre) de défaut : PD = 42,68 %

Espérance de perte : EL = EAD x LGD x PD = PD x LGDA = 0,711810

Spread de signature (à deux ans = biennal) :

taux risqué biennal = $(1 + 18{,}17\ \%)^2 - 1 = 39{,}6305\%$
taux sans risque biennal = $(1 + 12\ \%)^2 - 1 = 4{,}04\%$

spread de signature biennal = taux risqué biennal – taux sans risque biennal = 35,5905%

spread de signature biennal = PD x LGD = 35,5905%