3- Valorisation d'options

Valorisation des options classiques :

- options d'achat (call)
- options de vente (put)

Une pierre angulaire de la finance moderne :
- décisions d'investissement (options réelles)
- conditions de financement (approche structurelle du risque de crédit, Merton)

Black et Scholes (1973)
Merton (1973)
Cox, Ross et Rubinstein (1979)

A la fin de ce chapitre, vous devrez savoir :

- définir une option classique, un put, un call
- expliquer les droits et devoirs de détenteurs d'options vanille
- expliquer et représenter graphiquement les cash-flows des positions sur options
- démontrer et utiliser la parité put-call
- calculer la valeur d'une option à partir du modèle binomial par réplication de l'option, réplication d'un portefeuille sans risque ou sur la base des prix des actifs contingents
- expliquer la formule de Black-Scholes
- expliquer les « grecques » associées au prix d'une option
- expliquer le lien entre fonds propres d'une entreprise et options

PLAN :

1- DÉFINITION DES OPTIONS CLASSIQUES
2- CASH-FLOWS ASSOCIÉS À UNE OPTION
3- VALORISATION DES OPTIONS : CAS DU MODÈLE BINOMIAL
4- LA PARITÉ PUT – CALL
5- VALEUR INTRINSEQUE ET VALEUR TEMPS
6- DÉTERMINANTS DU PRIX D'UNE OPTION
7- LES FONDS PROPRES D'UNE ENTREPRISE COMME CALL SUR LA VALEUR DE L'ACTIF

ANNEXE : Formulation générale de l'évaluation des options
Exercices

BIBLIOGRAPHIE essentielle :

Farber, André, Marie-Paule Laurent, Kim Oosterlinck, Hugues Pirotte, *Finance*, 3e édition, Collection Synthex économie gestion, Pearson Education, 2011

Vernimmen, *Finance d'entreprise*, Dalloz

1- DÉFINITION DES OPTIONS CLASSIQUES

Option = droit de réaliser une transaction future à des conditions fixées à l'avance.

call : option d'achat	droit d'**acheter** un actif (**sous-jacent**, de valeur S) à ou jusqu'à une date fixée (**échéance**) à un prix fixé (**prix d'exercice** X)

put : option de vente	droit de **vendre** un actif (**sous-jacent**, de valeur S) à ou jusqu'à une date fixée (**échéance**) à un prix fixé (**prix d'exercice** X)

Option *européenne* : peut être exercée uniquement à l'échéance
Option *américaine* : peut être exercée à tout moment jusqu'à l'échéance

→ Options « vanilles »

QUEL SOUS-JACENT ?

- options sur actions (stock options)
- options sur indices (ex : option sur CAC 40)
- options sur ETFs (Exchange Traded Fund)
- options sur taux d'intérêt
- options sur devises
- options sur matières premières (Maïs, Blé de meunerie, Graine de Colza, Huile de Colza, Tourteau de Colza sur Euronext)

voir :

- Euronext https://derivatives.euronext.com/fr :
- Chicago Mercantile Exchange (CME Group) : http://www.cmegroup.com/
- Chicago Board Options Exchange (CBOE) : http://www.cboe.com/
- Intercontinental Exchange (ICE) : https://www.theice.com/

statistiques sur : http://www.world-exchanges.org/

2- CASH-FLOWS ASSOCIÉS À UNE OPTION EUROPENNE

À la conclusion du contrat, **l'acquéreur** paye une prime à l'émetteur (C pour un call, P pour un put).

→ « valoriser » de l’option = déterminer la prime

À l'échéance,

- **le détenteur** (acheteur) est libre d'exercer,
  - call : exercer si $X < S_T$
  - put : exercer si $X > S_T$

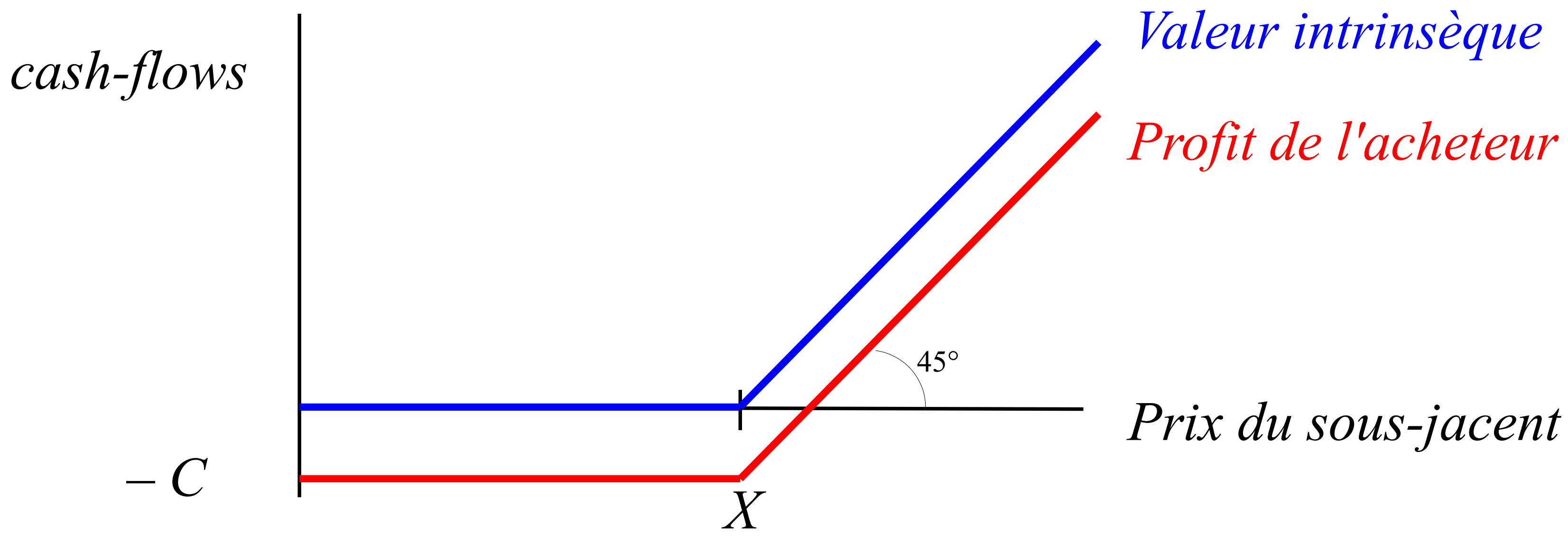
- **l'émetteur** (vendeur) de l'option est obligé de se porter contrepartie.

→ L’option est un instrument de transfert du risque

- risque lié à la valeur du sous-jacent
- acheteur de l’option : « assuré »
- vendeur de l’option : « assureur »

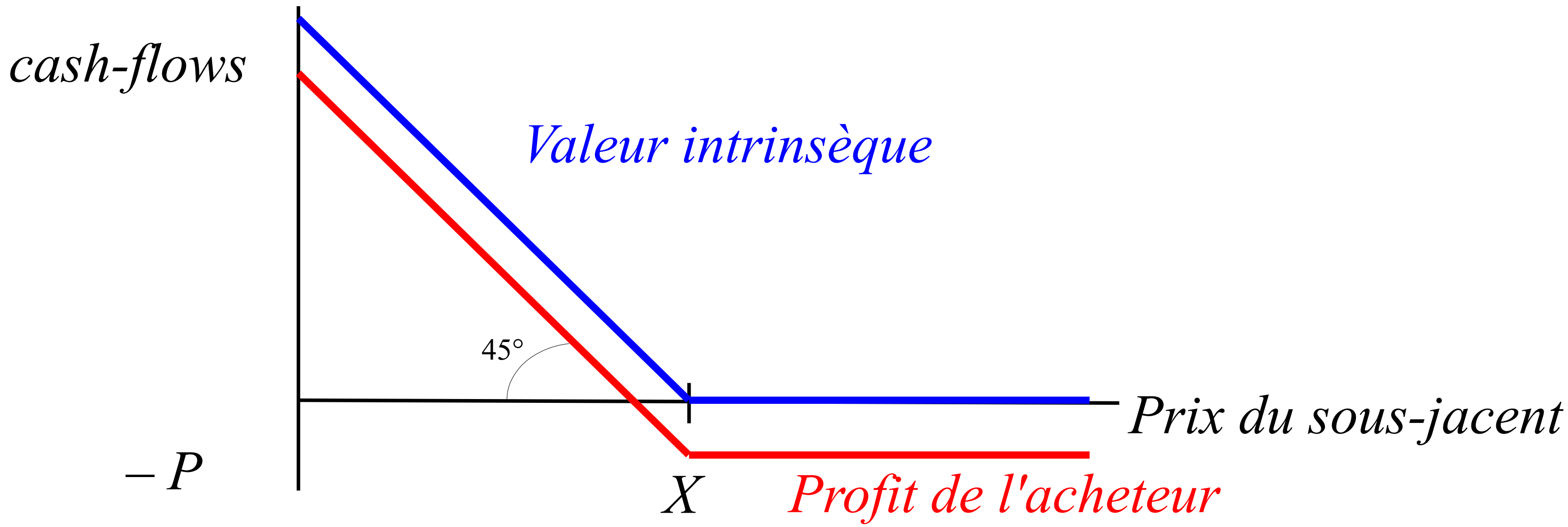
→ représenter les cash-flows de l’option en fonction du prix du sous-jacent

CALL	**Acheteur**		**Vendeur**	
À la conclusion	$-C$		$+C$	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
décision	ne pas exercer	exercer	n.a.	n.a.
valeur du call	0	$S_T - X$	0	$-(S_T - X)$
profit	$-C$	$S_T - X - C$	$+C$	$-(S_T - X) + C$



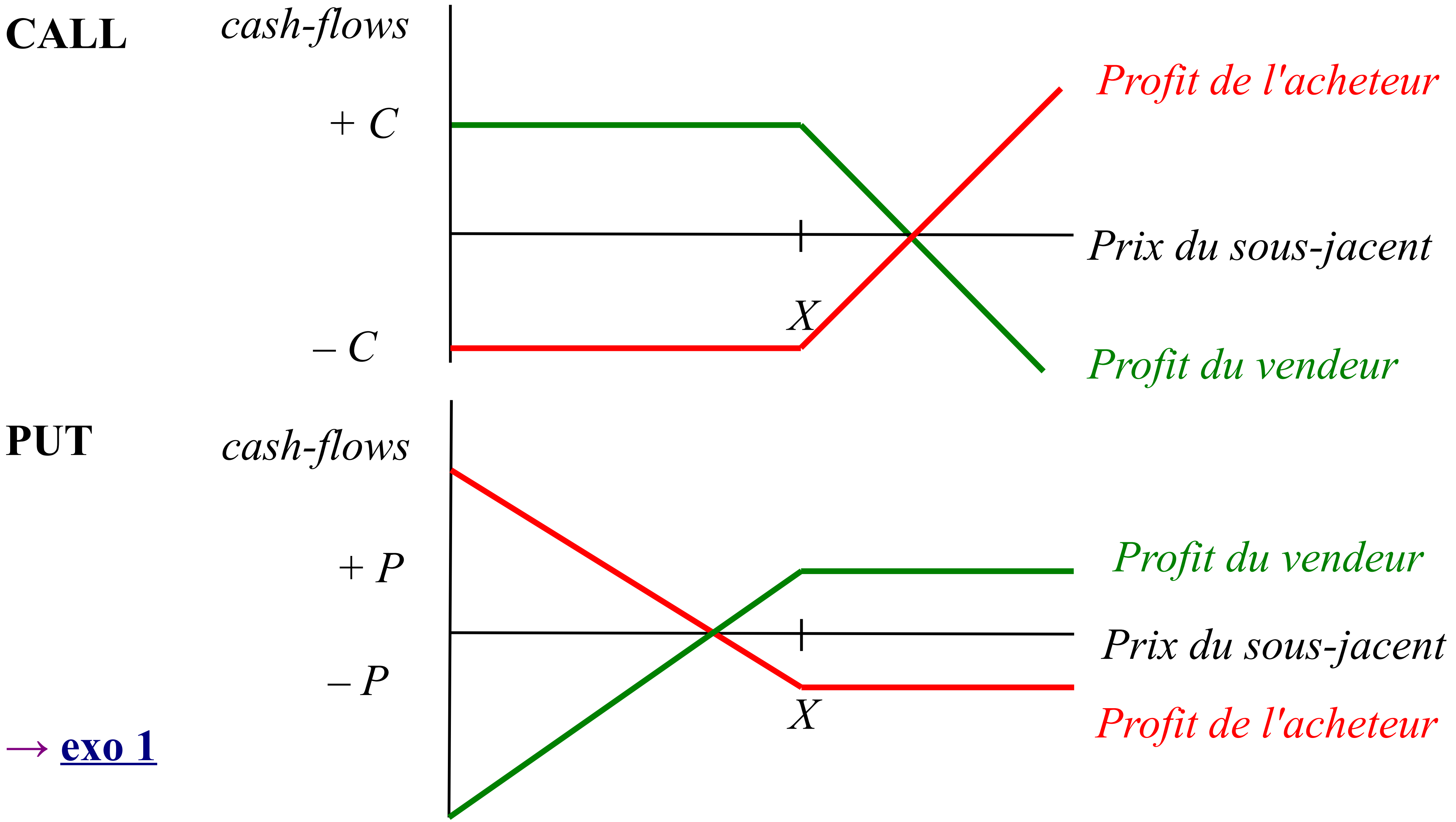
Valeur intrinsèque du call à l'échéance : $C_T = max(0, S_T - X)$

PUT	**Acheteur**		**Vendeur**	
À la conclusion	$-P$		$+P$	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
décision	exercer	ne pas exercer	n.a.	n.a.
valeur du put	$X - S_T$	0	$-(X - S_T)$	0
profit	$X - S_T - P$	$-P$	$-(X - S_T) + P$	$+P$



Valeur intrinsèque du put à l'échéance : $P_T = max(0, X - S_T)$

Les gains de l'acheteur sont les pertes du vendeur (et réciproquement)...
→ options = instruments de transferts des risques !



→ **exo 1**

3- VALORISATION DES OPTIONS : CAS DU MODÈLE BINOMIAL

Chaque méthode d'évaluation des options repose sur un modèle d'évolution du prix de l'actif sous-jacent.

Le modèle binomial :

- deux états du mondes à l'échéance
- le prix du sous-jacent peut monter à *u S* ou baisser à *d S*.

$$\begin{tikzcd} & S_u = u\,S \\ S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_d = d\,S \end{tikzcd}$$

avec : $d < 1 + r_f < u$

Généralisions :

- Extension à plusieurs périodes : modèle Cox, Ross et Rubinstein (1979) – utilisé pour les options américaines
- Version en temps continu : Black et Scholes (1973), Merton (1973)

Exemple : Évaluation d'un **call** européen à un an, de prix d'exercice 53 €, sur l'action A dont le cours actuel est de 51 € et le cours dans un an peut valoir 33 € ou 63 €.
Le taux sans risque est de 10%.

→ Ce call vaut 7 €

(a) Évaluation sur la base des prix des titres contingents.
(b) Évaluation par réplication des cash-flows.

Remarque préliminaire :

sous-jacent

$$51 \begin{cases} \nearrow S_u = 63 = (1+23{,}5\%)\ S \\ \searrow S_d = 33 = (1-35{,}3\%)\ S \end{cases}$$

sans-risque

$$100 \begin{cases} \nearrow RF_u = 110 \\ \searrow RF_d = 110 \end{cases}$$

call

$$C \begin{cases} \nearrow 63 - 53 = 10 \\ \searrow 0 \end{cases}$$

NB : 1 – 35,3% < 1 + 10 % < 1+23,5%... le sous-jacent est bien « risqué » !

3.1- ÉVALUATION SUR LA BASE DES PRIX DES TITRES CONTINGENTS

Deux valeurs de l'actif sous-jacent $\Rightarrow$ deux états de la nature
$\Rightarrow$ deux titres contingents

- titre contingent rapportant 1 en cas de hausse du sous-jacent → prix = v_u
- titre contingent rapportant 1 en cas de baisse du sous-jacent → prix = v_d

Chaque actif (sous-jacent, sans-risque, option) est un portefeuille de titre contingent

Les prix de l'actif sans risque et du sous-jacent : $\begin{cases} 100 = 110\, v_u + 110\, v_d \\ 51 = v_u \times 63 + v_d \times 33 \end{cases}$

déterminent les prix des titres contingents : $\begin{cases} v_u = 21/30 = 0{,}7 \\ v_d = 2{,}3/11 \end{cases}$

D'où la valeur de l'option : $C = 0{,}7 \times 10 + v_d \times 0 = 7$

3.2- ÉVALUATION FONDÉE SUR LA RÉPLICATION DES CASH-FLOWS

deux possibilités...

(i) Créer un portefeuille qui réplique exactement la valeur de l'option :

- acheter δ actions
- investir M dans l'actif sans risque

→ δ et M tels que la valeur finale du portefeuille soit égale à celle de l'option.

$$\begin{cases} \delta \times 63 + M(1+10\%) = 10 \\ \delta \times 33 + M(1+10\%) = 0 \end{cases} \qquad \text{D'où :} \quad \begin{cases} \delta = 1/3 \\ M = -10 \end{cases}$$

Absence d'opportunité d'arbitrage $\Rightarrow$ $\boldsymbol{V = \delta S + M}$

$$C = \frac{1}{3} \times 51 - 10 = 7$$

(ii) Créer un portefeuille sans risque : (évaluation d'un call)

- acheter δ actions
- vendre un call

Valeur initiale du portefeuille : $V = \delta S - C = 51\ \delta - C$

Valeur finale du portefeuille :

- en cas de hausse du sous-jacent : $C_u = 10$ et $V_u = 63\ \delta - 10$
- en cas de baisse du sous-jacent : $C_d = 0$ et $V_d = 33\delta$

- portefeuille sans risque si $V_u = V_d$: $\delta = 1/3$ d'où $V_u = V_d = 11$

d'où la valeur initiale du portefeuille sans risque :

- Absence d'opportunité d'arbitrage $\Rightarrow$ $(1 + 10\ \%)\ V = 11$ $\Rightarrow$ $V = 10$

d'où la valeur initiale du call : $(51\ \delta - C) = 10$ et $\delta = 1/3$ $\Rightarrow$ $C = 7$

Remarques :

(1) Réplication de l'option : $\boldsymbol{V = \delta S + M}$
peut se réécrire : $\boldsymbol{\delta S - V = - M}$ → position sans risque

(2) Nombre d'actions en portefeuille de réplication (δ)

- s'appelle le « delta » de l'option.
- s'interprète comme sensibilité du prix de l'option au prix du sous-jacent : $dV/dS=\delta$

  Si le cours actuel de l'action A augmente de 1%, de combien augmente la valeur du call ?
- positif pour un call, négatif pour un put
- delta du call – delta du put = 1 (mêmes sous-jacent et échéance, cf. *PPC*)

(3) Position dans l'actif sans risque (M) :

- négative pour un call, positive pour un put
- δ_{call} actions + vente d'un call ≈ position sans risque < 0 (emprunt sans risque)
- δ_{put} actions + achat d'un put ≈ position sans risque > 0 (placement sans risque)
- option ≈ assurance !

(4) On n'a pas besoin des probabilités des états de la nature !

3.3- PROBABILITÉS RISQUE-NEUTRES

- Les deux méthodes d'évaluation conduisent à la même valeur de l'option :
- La valeur de l'option est indépendante de la probabilité de hausse du sous-jacent.

On peut **évaluer les actifs en considérant que les individus sont neutres au risque**, à condition de **modifier les probabilités** affectées aux états de la nature.

→ écrire le prix de l'option comme valeur actuelle (au taux sans risque) attendue :

$$\text{cas du call : } 7 = \frac{1}{1+10\%}\left[p \times 10 + (1-p) \times 0\right]$$

c'est la valeur estimée par un individu neutre à l'égard du risque

→ en déduire la probabilité de hausse du sous-jacent : p = 77%

D'où le nom de « probabilités risque-neutres »

- une troisième méthode d'évaluation, si on connaît les probabilités risques-neutres
- méthode utile dans le cas multipériodique

4- LA PARITÉ PUT – CALL

Les valeurs d'un call et d'un put <u>européens</u> de même échéance et de même prix d'exercice sont liées...

Deux portefeuilles :

- « put + actif sous-jacent »
- « call + placement de la valeur actuelle du prix d'exercice »

Valeur à l'échéance du portefeuille...

	si $S_T < X$	si $S_T > X$
… « put + actif sous-jacent »	$(X - S_T) + S_T = X$	$0 + S_T = S_T$
… « call + placement »	$0 + X = X$	$(S_T - X) + X = S_T$

quelque soit le prix du sous-jacent,
les deux portefeuilles ont la même valeur

- **à l'échéance**
- **à toute date intermédiaire** si le sous-jacent ne verse pas de revenus

→ Loi du prix unique ⇒ $\boldsymbol{C + VA(X) = S + P}$

Exemple : Un call européen à un an, de prix d'exercice 53 €, sur l'action A dont le cours actuel est de 51 € et le cours dans un an peut valoir 33 € ou 63 €, vaut **7 €**.
Le taux sans risque est de 10%.

- **Évaluation** d'un put de mêmes sous-jacent, échéance et prix d'exercice ?

(i) adapter au cas du put les deux méthode d'évaluation par réplication
(ii) utiliser la parité put-call :

$\boldsymbol{C + VA(X) = S + P} \Rightarrow \quad P = 7 + 53/1{,}1 - 51 =$

- Si le cours de l'action A augmente de 1%, de combien augmente le prix du put ?

utiliser la parité put-call pour déduire le delta du put de celui du call

$\boldsymbol{C + VA(X) = S + P} \;\Rightarrow\; \delta_{\text{call}} = 1 + \delta_{\text{put}} \quad \Rightarrow \quad \delta_{\text{put}} = \delta_{\text{call}} - 1 = -\,2/3$

Plusieurs présentations possibles de la parité put-call :

- signe + → position longue (achat)
- signe – → position courte (emprunt et vente)

Par exemple :

$\boldsymbol{C = S + P - VA(X)}$
→ call « synthétique » obtenu par emprunt, achat du sous-jacent et du put.

$\boldsymbol{P = C - S + VA(X)}$
→ put « synthétique » obtenu par vente du sous-jacent, placement et achat du call.

$\boldsymbol{C - P = S - VA(X)}$
→ achat du call et vente du put ≈ achat du sous-jacent par emprunt
≈ achat à terme du sous-jacent (cours à terme = prix d'exercice)

(représenter les profils de gain brut des portefeuilles)

NB : la parité put-call n'est valable que pour les options européennes.

Pour les options américaines :

- prime supérieure à celle d'une option européenne (mêmes caractéristiques) :
  - $C_{europ} \leq C_{amér}$ et $P_{europ} \leq P_{amér}$
  - car option américaine inclut droit d'exercice précoce (avant échéance)

- on peut montrer :
  - $C_{amér} + X \geq S + P_{amér} \geq C_{amér} + VA(X)$
    d'où :
    $S - VA(X) \geq C_{amér} - P_{amér} \geq S - X$

- NB : en fait, il n'est jamais rentable d'exercer avant échéance un call américain (sur action ne versant pas de dividende) :

$\rightarrow C_{europ} = C_{amér}$

5- VALEUR INTRINSEQUE ET VALEUR TEMPS :

prix de l'option (en *t*) = valeur intrinsèque + valeur temps

valeur intrinsèque : valeur qu'aurait l'option (en *t*) si elle était arrivée à maturité

- valeur intrinsèque du call : $VIC_t = max(0, S_t - X)$
- valeur intrinsèque du put : $VIP_t = max(0, X - S_t)$

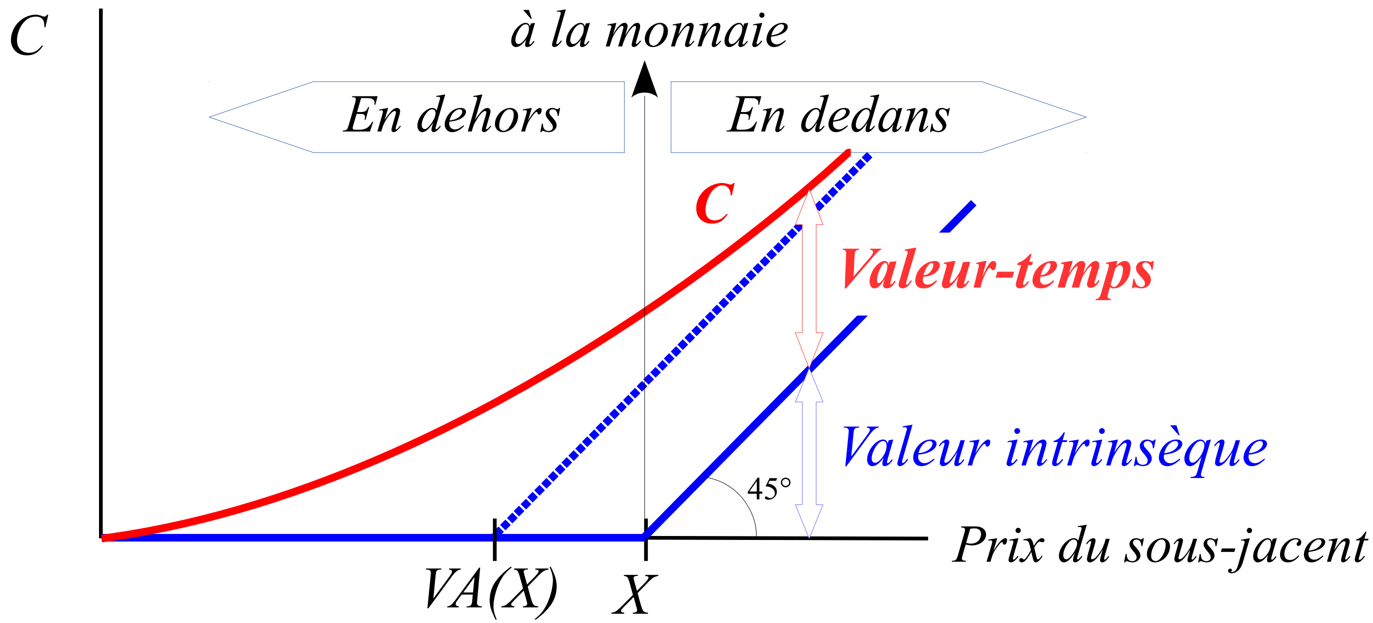
	call	*put*
$S_t > X$	*en dedans/dans la monnaie/in the money*	*en dehors/hors de la monnaie/out of the money*
$S_t < X$	*en dehors/hors de la monnaie/out of the money*	*en dedans/dans la monnaie/in the money*
$S_t = X$	*à la monnaie/at the money*	*à la monnaie/at the money*

valeur temps : liée aux potentialité d'appréciation/dépréciation du sous-jacent

- call : valeur temps > 0
- put européen : valeur temps peut être < 0

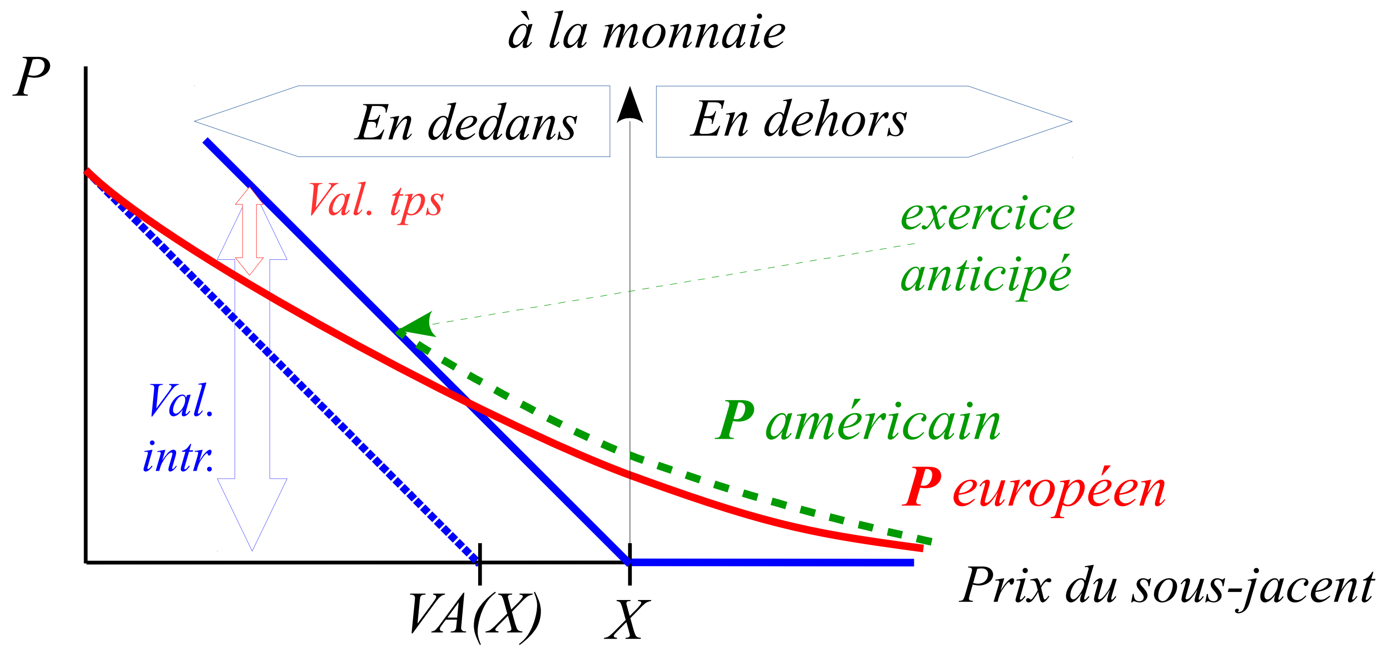
→ anticipation de l'augmentation de la valeur intrinsèque avant échéance

CALL



- quand S augmente, C tend vers $S - VA(X)$
- C vaut 0 quand S vaut 0
- valeur temps toujours positive (car $VA(X) < X$)

PUT



Put européen

- quand S augmente, P tend vers 0
- P vaut $VA(X)$ quand S vaut 0
- valeur temps négative pour un put européen très *en dedans*

Put américain :

- peut être exercé avant échéance (si valeur temps devient < 0)
- vaut plus qu'un put européen

6- DÉTERMINANTS DU PRIX D'UNE OPTION

6.1- Formule de Black – Scholes – Merton

Formule de valorisation d'une option européenne sur une action ne versant pas de dividende et dont la volatilité est constante.

Extension du modèle binomial en temps continu.

- La durée de la période tend vers 0
- Le nombre période tend vers l'infini

$$C = S\,N(d_1) - X \exp(-r_f T)\,N(d_2)$$

avec :

- $N(x)$ la fonction de répartition de la loi normale
- $d_1 = \dfrac{\ln(S/X) + (r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Interprétation :

$$C = S\,N(d_1) - X\exp(-r_f T)\,N(d_2)$$

on retrouve : $\boldsymbol{V = \delta S + M}$

$\boldsymbol{\delta = N(d_1)}$ et $\boldsymbol{M = -X\,\mathbf{exp}(-r_f T)\,N(d_2)}$ (emprunt pour un call)

$\boldsymbol{X\,\mathbf{exp}(-r_f T)}$ = valeur actualisée au taux sans risque « continu » du prix d'exercice

$\boldsymbol{N(d_2)}$ **=** probabilité risque-neutre d'exercer le call

$\boldsymbol{X\,\mathbf{exp}(-r_f T)\,N(d_2)}$ = valeur actuelle attendue risque-neutre du prix d'exercice

Remarque : si l'action verse un dividende (d : taux de dividende en % de S)

$$C = S\exp(-d\,T)\,N(d_1) - X\exp(-r_f T)\,N(d_2) \quad \text{(Merton)}$$

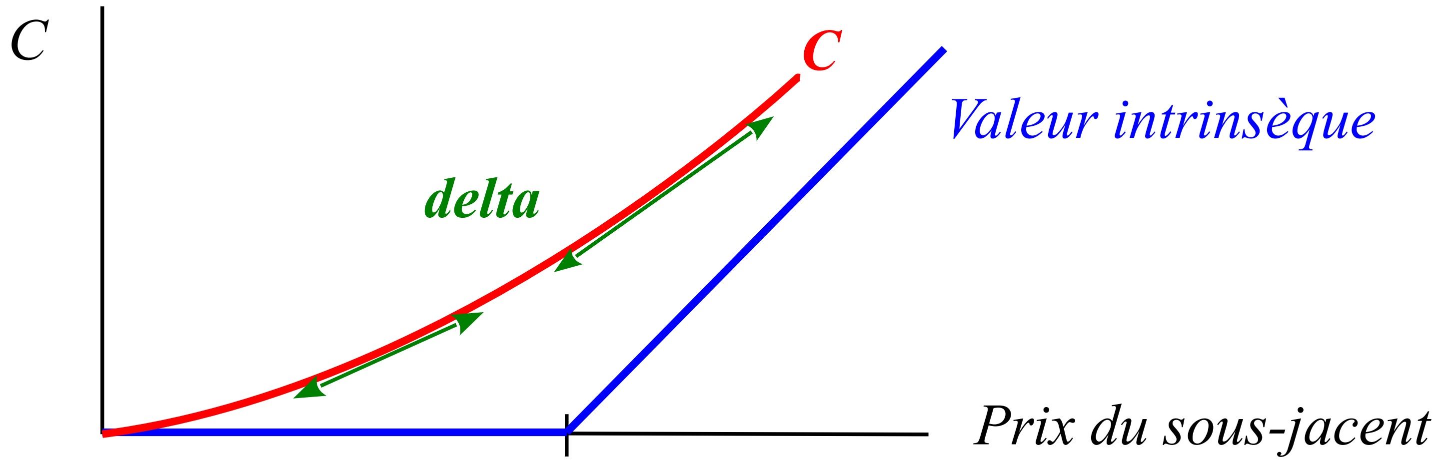
$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_f - d + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

6.2- Le prix du call dépend du prix du sous-jacent

- Le prix du call augmente avec le prix du sous-jacent : le « delta » de l'option : $dC/dS = \delta > 0$

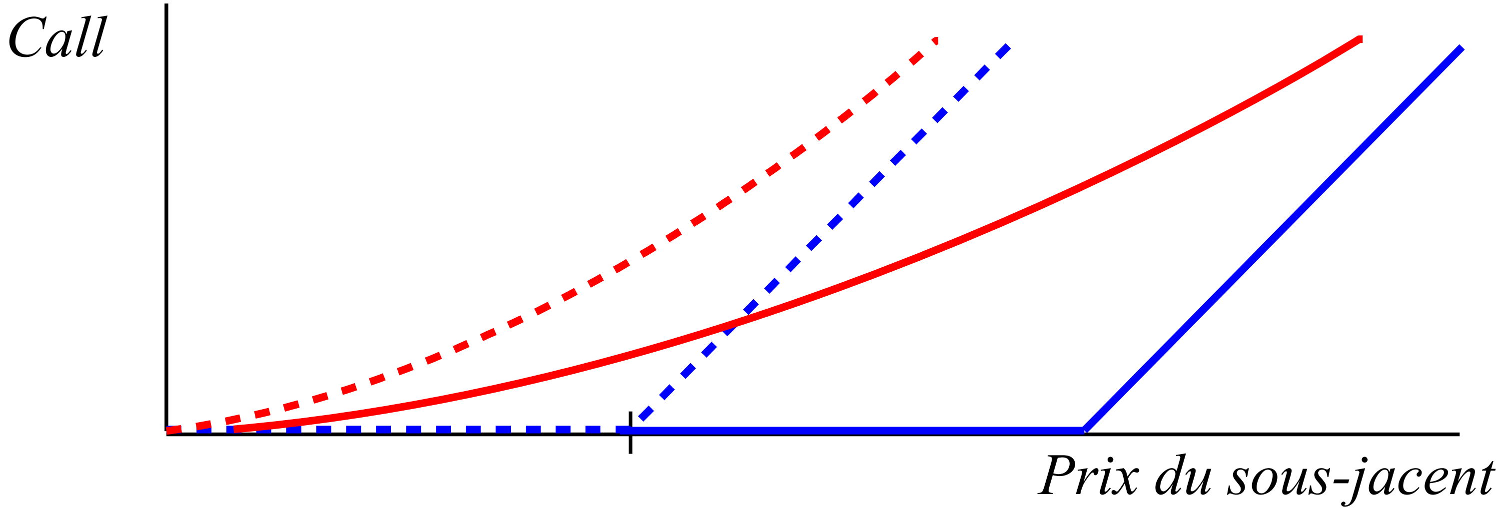
- La relation est convexe : le « gamma » de l'option

le « delta » augmente avec le prix du sous-jacent $d^2C/dS^2 = d\delta/dS = \Gamma > 0$

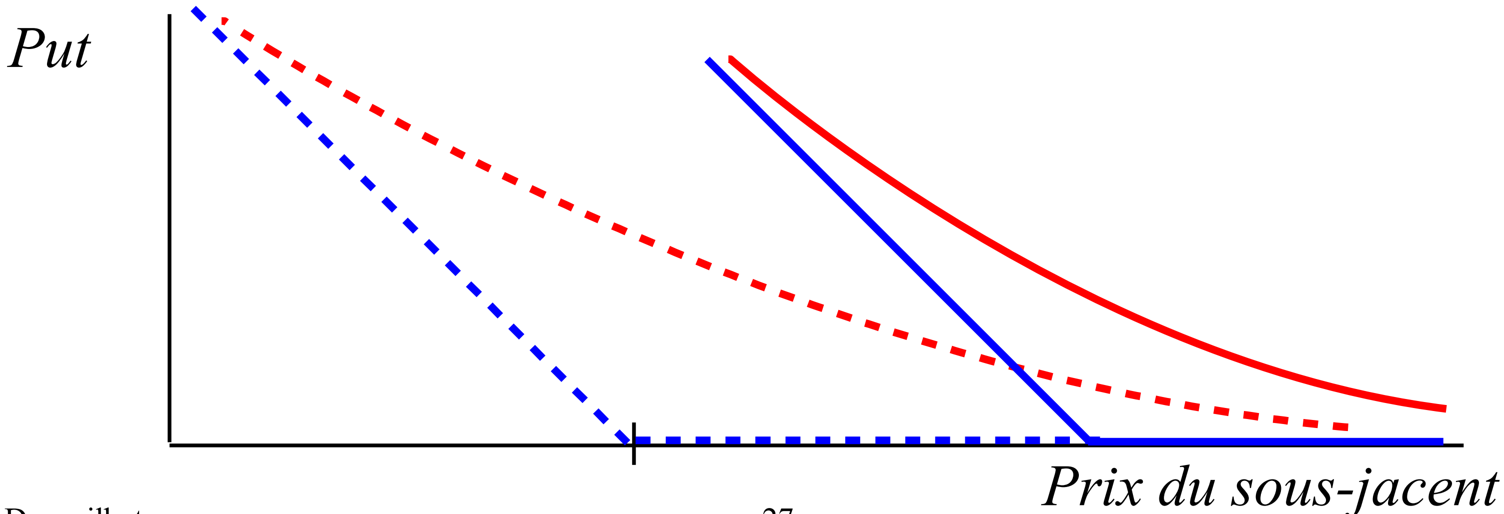


6.3- Le prix du call dépend du prix d'exercice

- Le prix du call diminue quand le prix d'exercice augmente



- Le prix du put augmente quand le prix d'exercice augmente



6.4- Le prix du put se déduit du prix du call par la parité put-call

$$
\begin{aligned}
P &= C - S + VA(X) \\
P &= S\left[N(d_1) - 1\right] + X \exp(-r_f T)\left[1 - N(d_2)\right]
\end{aligned}
$$

- Le delta du put est négatif

- La valeur du put peut être négative :
  put très en dedans → exercer : attendre l'échéance → coût d'opportunité

- Il peut être intéressant d'exercer un put avant échéance : la formule de Black-Scholes ne peut pas être utilisée pour évaluer un put américain (il n'existe pas de formule)

6.5- Le prix de l’option dépend de la volatilité du sous-jacet

option ≈ contrat d’assurance

hausse du « risque » → hausse de la « prime »

La volatilité n'est pas connue :
- estimation fondée sur la volatilité historique (écart-type des rentabilités passées)
- tenir compte de la variation dans le temps (cf. modèles statistiques GARCH Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity).

Pour des options cotées :
- le prix est donné
- on peut en déduire une « volatilité implicite » du sous-jacent

Les options sont parfois cotées en volatilité

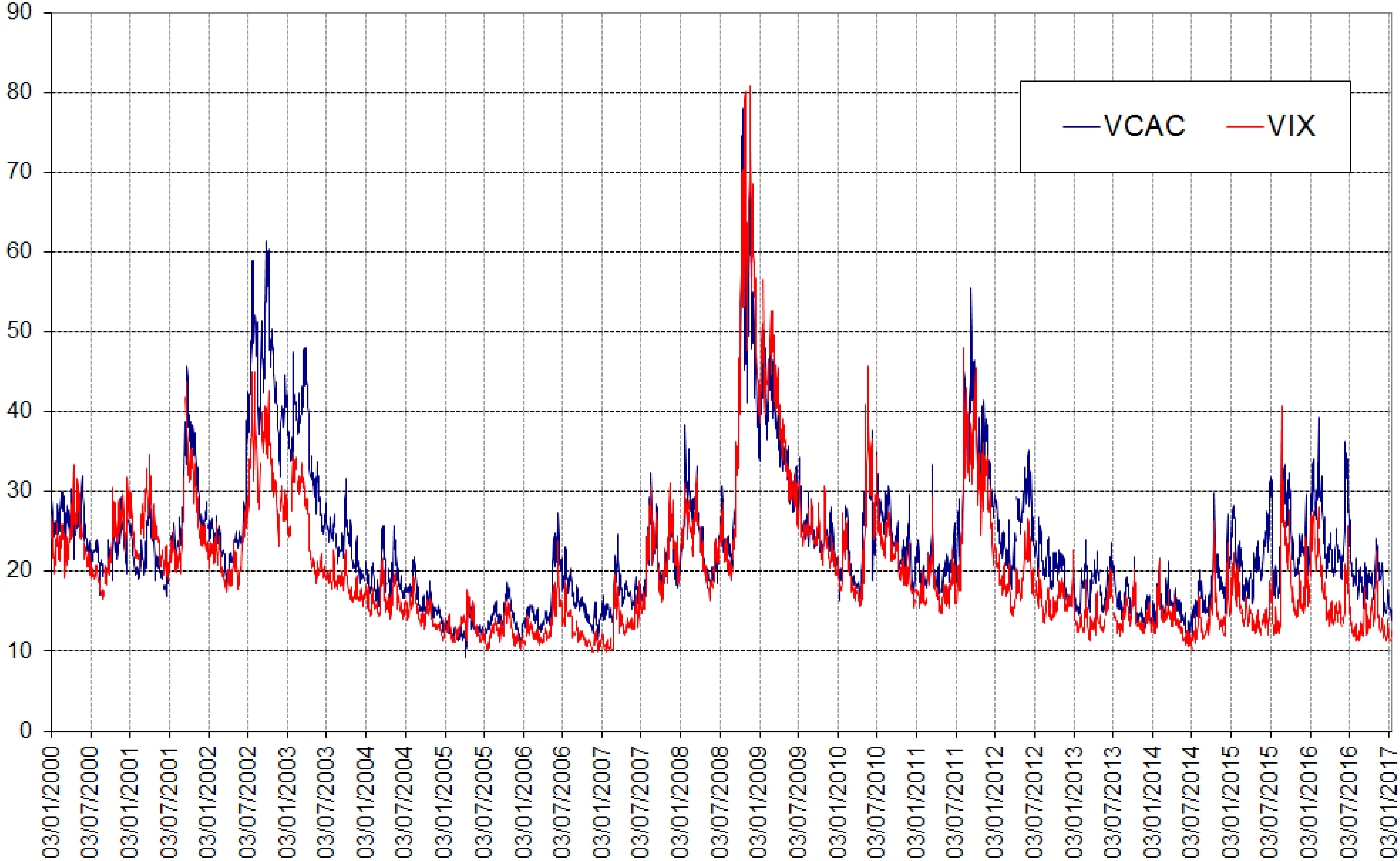
Indice de volatilité :

VIX : volatilité du S&P 500 http://www.cboe.com/micro/vix-and-volatility.aspx
VCAC : volatilité du CAC 40 https://www.euronext.com/fr/products/indices/QS0011052139-XPAR

- mesurent la volatilité implicite de l'indice
- à partir des prix d'exercice hors de la monnaie des calls et puts sur indices

Exprimés en points de pourcentage, ces indices reflètent, sur une base annualisée, la variation attendue de l'indice sous-jacent durant les trente prochains jours.
Un niveau élevé traduit des anticipations de fluctuations plus importantes de l'indice sous-jacent, et inversement.

VCAC et VIX 2000-2016



6.6- Récapitulation : les « grecques »

La valeur d'une option dépend de 6 paramètres (les « grecques ») :

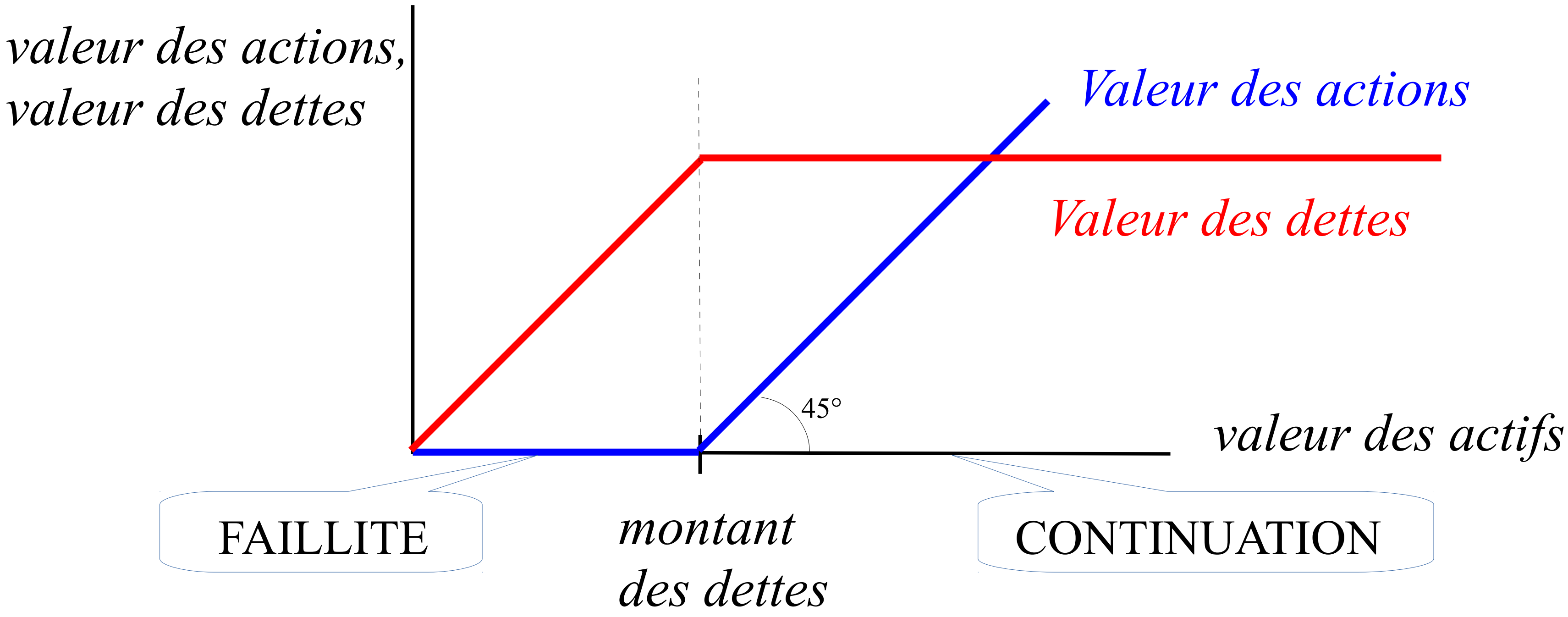
paramètres	**« grecque »**	**call**	**put**
cours du sous-jacent	« delta »	+	–
prix d'exercice		–	+
volatilité du sous-jacent	« véga »	+	+
durée jusqu'à échéance	« thêta »	–	–
taux sans risque	« rho »	+	–
dividendes versés		–	+

8- LES FONDS PROPRES D'UNE ENTREPRISE COMME CALL SUR LA VALEUR DE L'ACTIF

entreprise financée par dette et par fonds propres :

bilan :

<table>
<tr><th>actif</th><th>passif</th></tr>
<tr><td rowspan="2">valeur des actifs</td><td>fonds propres</td></tr>
<tr><td>dettes</td></tr>
</table>



Les fonds propres de l’entreprise :

- call sur la valeur des actifs
- prix d’exercice = montant des dettes

les actionnaires endettés ont acheté aux créanciers le droit de poursuivre l’activité si la valeur des actifs est supérieure à la valeur de la dette (à l’échéance).

→ Évaluation des actions de l’entreprise (Merton 1973)

- ↑ risque (économique) → ↑ valeur des fonds propres

- option en dehors (actif < dette) : valeur des fonds propres = valeur temps (espoir d’amélioration de la situation)
- option en dedans (actif >> dette) : valeur des fonds propres = valeur de l’actif (risque de faillite faible, dette quasi sans risque)

ANNEXE : Formulation générale de l'évaluation des options

Formulation générale dans le cas d'un modèle binomial de l'évolution du sous-jacent

Le modèle binomial :

- deux états du mondes à l'échéance
- le prix du sous-jacent peut monter à $u\,S$ ou baisser à $d\,S$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & S_u = u\,S \\ S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & S_d = d\,S \end{tikzcd}$$

avec : $d < 1 + r_f < u$

Option à échéance en fin de période :

valeur en cas de hausse : $V_u = max\left(0, \theta\left(S_u - X\right)\right)$

valeur en cas de baisse : $V_d = max\left(0, \theta\left(S_d - X\right)\right)$

$V = C$ et $\theta = +1$ pour un **call**

$V = P$ et $\theta = -1$ pour un **put**

a-ÉVALUATION SUR LA BASE DES PRIX DES TITRES CONTINGENTS

Deux valeurs de l'actif sous-jacent $\Rightarrow$ deux états de la nature

$\Rightarrow$ deux titres contingents

- titre contingent rapportant 1 en cas de hausse du sous-jacent → prix = v_u
- titre contingent rapportant 1 en cas de baisse du sous-jacent → prix = v_d

Les prix de l'actif sans risque et du sous-jacent : $\begin{cases} v = v_u + v_d \\ S = v_u S_u + v_d S_d \end{cases}$

déterminent les prix des titres contingents : $\begin{cases} v_u = \dfrac{1 - v\,d}{u - d} \\ v_d = \dfrac{v\,u - 1}{u - d} \end{cases}$

D'où la valeur de l'option : $V = v_u V_u + v_d V_d$

b- ÉVALUATION FONDÉE SUR LA RÉPLICATION DES CASH-FLOWS

(a) Créer un portefeuille qui réplique exactement la valeur de l'option :

- acheter δ actions
- investir M dans l'actif sans risque

$\rightarrow$ δ et M tels que la valeur finale du portefeuille soit égale à celle de l'option.

$$\begin{cases} \delta \; S_u + M(1+r_f) = V_u \\ \delta \; S_d + M(1+r_f) = V_d \end{cases} \qquad \text{D'où :} \quad \begin{cases} \delta = \dfrac{V_u - V_d}{(u-d)S} \\ M = v \dfrac{u V_d - d V_u}{u-d} \end{cases}$$

avec $v = \dfrac{1}{1+r_f}$

Absence d'opportunité d'arbitrage $\Rightarrow$ $\boldsymbol{V = \delta S + M}$

(b) Créer un portefeuille sans risque : (évaluation d'un call)

- acheter δ actions
- vendre un call

Valeur initiale du portefeuille : $V = \delta S - C$

Valeur finale du portefeuille :

- en cas de hausse du sous-jacent : $C_u = u S - X$ et $V_u = (\delta - 1) u S + X$
- en cas de baisse du sous-jacent : $C_d = 0$ et $V_d = \delta d S$
- portefeuille sans risque si $V_u = V_d$: $\delta = \dfrac{uS - X}{(u-d)S}$

Absence d'opportunité d'arbitrage $\Rightarrow$ $(1 + r_f)\, V = V_u = V_d$

$$(1 + r_f)\,(\delta S - C) = \delta d S$$

$$C = \frac{1 + r_f - d}{(1 + r_f)(u - d)}(uS - X)$$

c- PROBABILITÉS RISQUE-NEUTRES

Les deux méthodes d'évaluation conduisent à la même valeur de l'option :

$$V = v_u V_u + v_d V_d \quad \text{avec} \quad v_u = \frac{1 - v\,d}{u - d} \quad \text{et} \quad v_d = \frac{v\,u - 1}{u - d}$$

La valeur de l'option est indépendante de la probabilité de hausse du sous-jacent.

On peut évaluer les actifs en considérant que les individus sont neutres au risque, à condition de modifier les probabilités affectées aux états de la nature.

→ écrire le prix de l'option comme valeur actuelle (au taux sans risque) attendue :

$$V = v\left[p V_u + (1-p) V_d\right]$$

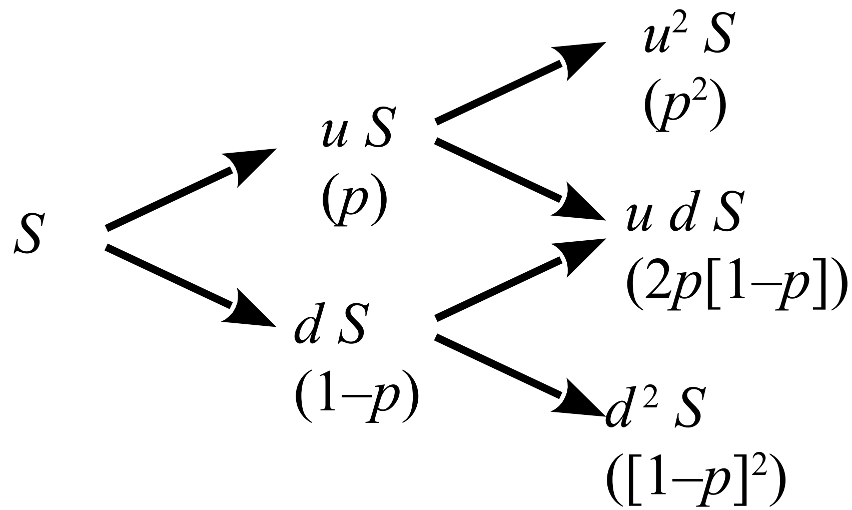
→ la valeur estimée par un individu neutre à l'égard du risque

D'où le nom de « probabilités risque-neutres » $p = \dfrac{1 - v\,d}{v(u-d)}$ et $1 - p = \dfrac{v\,u - 1}{v(u-d)}$

d- EXTENSION À PLUSIEURS PÉRIODES

Le modèle binomial peut être étendu à n périodes :

exemple avec 2 périodes…



- équivalence des hausses et baisses successives :
  u puis d revient au même que d puis u.
- évolution suit une marche au hasard (indépendance par rapport au passé)
- à l'échéance : n + 1 valeurs possibles du sous-jacent, donc de l'option.

Pour une option européenne : (ne peut être exercée qu'à l'échéance)

(1) actualiser l'espérance risque-neutre au taux d'intérêt sans risque

exemple avec 2 périodes…

$$V = v^2\left[p^2 V_{uu} + 2\mathrm{p}(1-p)V_{ud} + (1-p)^2 V_{dd}\right]$$

(2) itérer l'évaluation mono-périodique en partant de l'échéance et en remontant vers la date initiale

exemple avec 2 périodes…

période 1 : $\begin{cases} V_u = v\left[p V_{uu} + (1-p) V_{ud}\right] \\ V_d = v\left[p V_{ud} + (1-p) V_{dd}\right] \end{cases}$

période 0 : $V = v\left[p V_u + (1-p) V_d\right]$

Pour un option américaine : (peut être exercée avant l'échéance)

(1) itérer l'évaluation mono-périodique en partant de l'échéance et en remontant vers la date initiale

& vérifier à chaque étape si l'option doit être exercée

au nœud j, la valeur de l'option est le maximum

de la valeur intrinsèque et de la valeur en l'absence d'exercice

$$V_j = Max\left[Max\left(0,\ \theta(S_j - X)\right),\ v\left(pV_{ju} + (1-p)V_{jd}\right)\right]$$

NB :

- Il n'y a pas intérêt à exercer un call américain sur une action ne versant pas de dividende avant l'échéance → sa valeur est égale à celle d'un call européen.
- Il peut être intéressant d'exercer le call américain juste avant le versement du dividende.

→ Exo 3

Exercice 1 :

Représenter le profil de gain (brut) d'un portefeuille composé :

(a) d'une position longue sur un call de prix d'exercice X et d'échéance T, et d'une position longue sur un actif sans risque délivrant un cash-flow X en T.

(b) d'une position longue sur un put de prix d'exercice X et d'échéance T, et d'une position longue sur le sous-jacent du put.

(c) Que pouvez-vous en conclure ?

retour

Exercice 2 : valoriser une option (cas binomial à une période)

On considère une action dont le cours est 1 € aujourd'hui, et peut valoir 1,9 € ou 0,6 € dans un an. Le taux d'intérêt sans risque (r_f) vaut 5%.

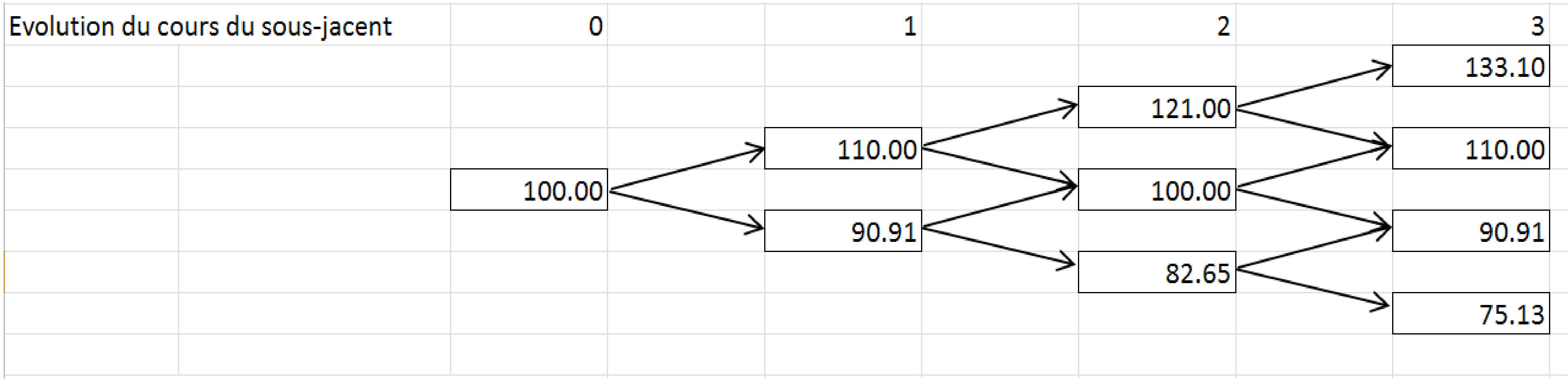
1. Représentez sur un graphique le profil de gain brut d'une position longue sur un call européen sur une action, de prix d'exercice 0,65, en fonction du prix du sous-jacent.
2. Le prix actuel de l'action est de 1€. Un call de prix d'exercice 0,65 € est-il « dans la monnaie » ? Et un put de même prix d'exercice ?
3. Représentez sur un graphique le profil de gain brut d'une position longue sur une action valant aujourd'hui 1 €, couverte par une position longue sur un put européen « à la monnaie », de prix d'exercice 1 €, en fonction du prix du sous-jacent.
4. Si le call sur cette action, de prix d'exercice 0,65 €, à un an, vaut 0,412 €, montrez qu'un put de même échéance, et de même prix d'exercice, vaut 0,031 €.
5. Montrez, par réplication des cash-flows, qu'un call à 1 an, de prix d'exercice 0,65 € sur cette action, a les mêmes caractéristiques qu'un portefeuille comportant une position sur 0,9615 actions et une position sans risque de € (vous préciserez si ces positions sont courtes ou longues), et vaut aujourd'hui 0,412 €.

Exercice 3 : valoriser une option (cas binomial à 3 périodes)

L'action de l'entreprise B peut soit monter de 10 %, soit baisser de 9,09 % chaque mois. Elle ne verse pas de dividende, et vaut aujourd'hui 100 €. Le taux d'intérêt en capitalisation continue est de 0,5 % par mois.

1. Représenter l'arbre d'évolution du prix de l'action B sur 3 mois.
2. Combien valent les probabilités risque-neutres de hausse et de baisse du cours ?
3. Évaluer (à 7,85 €) un call américain sur l'action B d'échéance 3 mois, de prix d'exercice 100 €.
4. Évaluer (à 6,48 €) un put américain sur l'action B d'échéance 3 mois, de prix d'exercice 100 €.

Réponse exercice 3 :



Probabilité risque-neutre de hausse :

- identique à chaque période
- rend équivalente l'évaluation de l'option par réplication et l'évaluation par actualisation des cash-flows attendus « risque-neutres »
- $p = \dfrac{1/v - d}{u - d} = \dfrac{e^{0,005} - (1 - 9,09\,\%)}{10\,\% - 9,09\,\%} = 50,24\,\%$

Call :

CALL	EUROPEEN	0	1	2	3
prix exercice	100				33.10
				21.50	exercer
			13.22		10.00
		7.85		5.00	exercer
			2.50		0.00
				0.00	ne pas exercer
					0.00
					ne pas exercer

CALL	AMERICAIN	0	1	2	3
prix exercice	100				33.10
				21.50	exercer
			13.22	ne pas exercer	10.00
		7.85	ne pas exercer	5.00	exercer
		ne pas exercer	2.50	ne pas exercer	0.00
			ne pas exercer	0.00	ne pas exercer
				ne pas exercer	0.00
					ne pas exercer

Put :

PUT	EUROPEEN	0	1	2	3
prix exercice	100				0.00
				0.00	ne pas exercer
			2.23		0.00
		6.36		4.50	ne pas exercer
			10.59		9.09
				16.85	exercer
					24.87
					exercer

PUT	AMERICAIN	0	1	2	3
prix exercice	100				0.00
				0.00	ne pas exercer
			2.23	ne pas exercer	0.00
		6.48	ne pas exercer	4.50	ne pas exercer
		ne pas exercer	10.84	ne pas exercer	9.09
			ne pas exercer	17.35	exercer
				exercer	24.87
					exercer

retour