2- La relation risque – rentabilité attendue

L'incertitude / le risque est au cœur de la logique financière.

Actualiser des cash-flows futurs... inconnus → prévoir → se tromper
- risque économique : variabilité des cash-flows d'exploitation
- risque financier (de détresse financière) : lié à l'endettement (charges fixes + effet de levier)

Composition de portefeuille d'actifs → choix d'un profil de risque.

- Si on suppose que les rentabilités sont distribuées selon une loi normale, alors deux paramètres sont déterminants : l'espérance mathématique et l'écart-type.
- À l'équilibre des marchés, il existe une relation entre la rentabilité attendue d'un actif et son risque (mesuré par l'écart-type de la rentabilité ou par le bêta).

Objectifs : étudier la relation entre risque et rentabilité attendue

À la fin de ce chapitre, vous devrez savoir :

- définir les concepts fondamentaux (et, le cas échéant, calculer) : ratio de Sharpe, risque total, risque systématique, risque spécifique, bêta, frontière efficiente singulière, frontière efficiente régulière, portefeuille tangent, CML, SML, MEDAF, (CAPM), MEA (APT)
- expliquer le lien entre risque et rentabilité d'un actif
- représenter graphiquement les frontières efficientes et le choix de portefeuille
- expliquer l'intérêt et les limites de la diversification d’un portefeuille pour réduire le risque
- décomposer le risque total d'un actif entre risque diversifiable et risque systématique
- expliquer la méthode d'évaluation des actifs qui résulte du MEDAF
- choisir en portefeuille en fonction de l'aversion au risque (dans le cadre du modèle de Markowitz).

BIBLIOGRAPHIE

Manuel de référence :

Farber, André, Marie-Paule Laurent, Kim Oosterlinck, Hugues Pirotte, *Finance*, 3e édition, Collection Synthex économie gestion, Pearson Education, 2011

Lectures recommandées :

Perold, André F. (2004), « The Capital Asset Pricing Model », *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 18, No. 3. (Summer, 2004), pp. 3-24.

Fama, Eugene F. & Kenneth R. French (2004), « The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence », *The Journal of Economic Perspectives*, Vol. 18, No. 3. (Summer, 2004), pp. 25-46.

Burmeister, Edwin, Richard Roll & Steven Ross (1994), *A Practitioner's Guide to Factor Models*, The Research Foudation of the Institute of Chartered Financial Analysts

PLAN :

INTRODUCTION
1- LA DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ DES RENTABILITÉS
2- RENTABILITÉ ET RISQUE D'UN PORTEFEUILLE DE 2 À *N* ACTIFS
3- RÉDUCTION DU RISQUE PAR LA DIVERSIFICATION
4- AMÉLIORER LA PERFORMANCE DU PORTEFEUILLE
5- LE CHOIX DU PORTEFEUILLE OPTIMAL
6- LE MEDAF
7- LE MODÈLE D'ÉVALUATION PAR ARBITRAGE

ANNEXE 1 : Détermination de le frontière efficiente
ANNEXE 2 : EXERCICES

INTRODUCTION

QUESTION :

Si je constitue un « portefeuille » de deux titres, en proportions x_A et $x_B = 1 - x_B$

- Quelle rentabilité puis-je espérer ?
- Quel est le niveau de risque que je prends ?

Propriétés statistiques des rentabilités :

	titre A	titre B
moyenne	$\mu_A = \mathbf{12\%}$	$\mu_B = \mathbf{5\%}$
écart-type	$\sigma_A = \mathbf{40\%}$	$\sigma_B = \mathbf{20\%}$
coefficient de corrélation	$\rho_{AB} = \mathbf{0{,}2}$	

RAPPELS :

Espérance = moyenne pondérée par les probabilités :
→ règle de calcul : $\boxed{E(aX+bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)}$
→ inégalité de Jensen : $\boxed{f(x) \text{ concave} \rightarrow f(E[X]) > E[f(X)]}$

Variance = moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $\boxed{V(X) = E[(X - E(X))^2]}$
= moyenne des carrés moins carré de la moyenne : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$
→ règle de calcul : $\boxed{V(aX+bY) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y) + 2\,a\,b\,Cov(X,Y)}$

Écart-type= racine carrée de la variance : $\sigma_X^2 = V(X)$

Covariance de X et de Y = espérance du produit – produit des espérances :
$\boxed{Cov(X, Y) = E[X\,Y] - E[X]\,E[Y]}$
→ règle de calcul : $\boxed{Cov(aX, Y+Z) = a\,Cov(X, Y+Z) = a\,Cov(X, Y) + a\,Cov(X, Z)}$

Coefficient de corrélation : rapport de la covariance au produit des écarts-types :
$\boxed{\rho(X, Y) = Cov(X, Y) / (\sigma_X\,\sigma_Y)}$

REPONSE :

μ_A = **12%** ; μ_B = **5%**

σ_A = **40%**; σ_B = **20%**; ρ_{AB} = **0,2** ; $Cov(R_A, R_B) = \sigma_{AB} = 0{,}016$

$$R_P = x_A R_A + x_B R_B$$

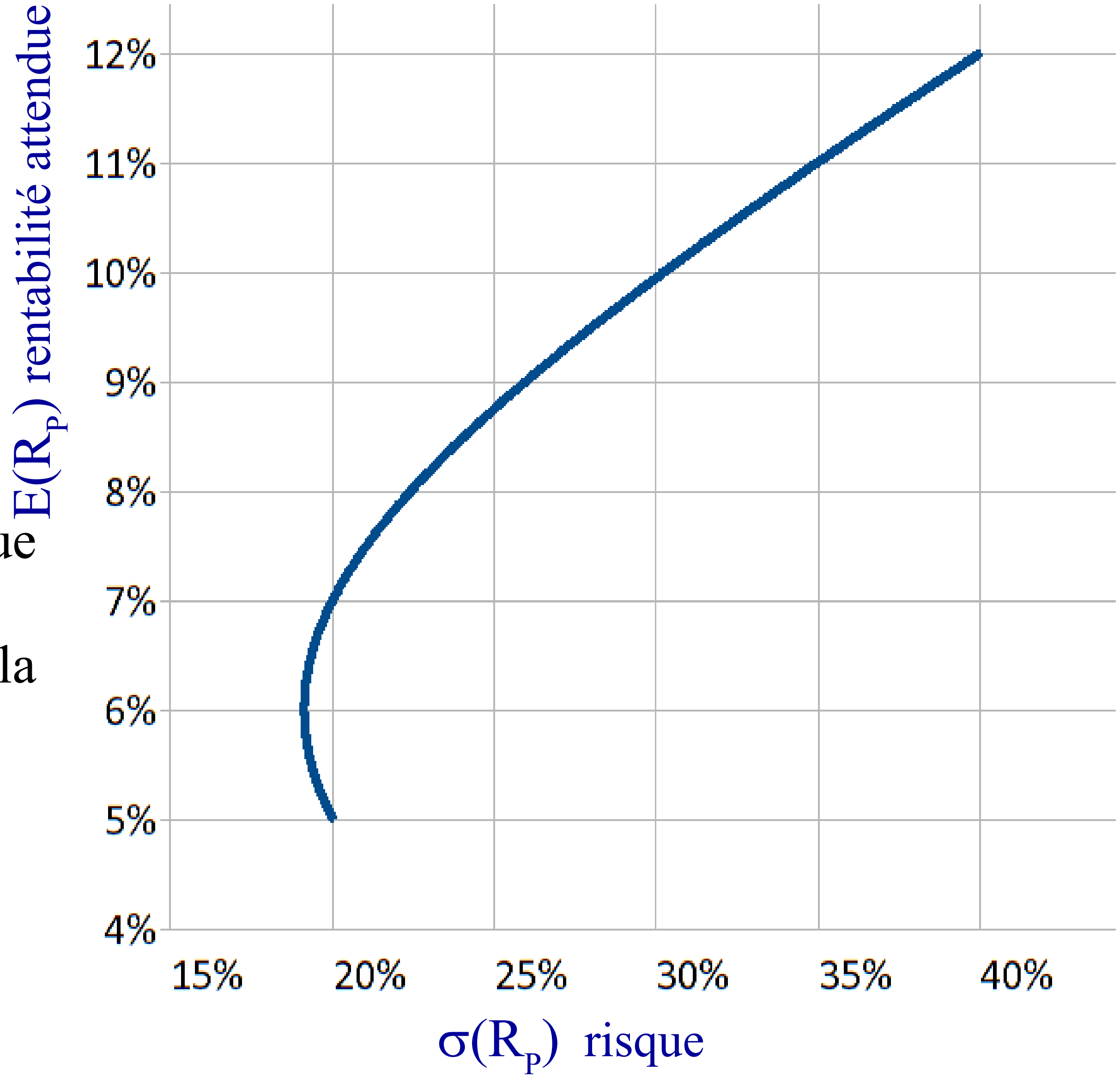
$$E(R_P) = x_A \times 12\% + x_B \times 5\%$$

$$\sigma(R_P) = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2 x_A x_B \sigma_B \sigma_A \rho_{AB}} = \sqrt{x_A^2 \times 0{,}16 + x_B^2 \times 0{,}04 + x_A x_B \times 0{,}032}$$

Entrer les formules dans un tableur :

	A	B	C	D	E
1	**Détermination des portefeuilles possibles avec 2 titres risqués**				
2	Coeff de corrélation	A	B	Rentabilité moyenne	Écart type
3	A	1	**0,20**	**12%**	**40%**
4	B	=C3	1	**5%**	**20%**
5					
6	Portefeuille	%A	%B	E(R)	σ(R)
7	1	0	=1-B7	=B7*D3+C7*D4	=RACINE(B7^2*E3^2+C7^2*E4^2+2*B7*C7*E3*E4*C3)
8	2	0,01	=1-B8	=B8*D3+C8*D4	=RACINE(B8^2*E3^2+C8^2*E4^2+2*B8*C8*E3*E4*C3)
9	3	0,02	=1-B9	=B9*D3+C9*D4	=RACINE(B9^2*E3^2+C9^2*E4^2+2*B9*C9*E3*E4*C3)

REPONSE (graphique)



commentaire :

- positionner A et B
- décrire la relation entre risque et rentabilité attendue
- conclure sur le résultat de la diversification

NB : risque minimum pour :

$$x_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} \approx 14{,}29\,\%$$

- $\sigma(R_P) = 19{,}12\ \%$
- $E(R_P) = 6\ \%$

1- LA DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ DES RENTABILITÉS

1.1- LA RENTABILITÉ

La rentabilité d'une action au cours d'une période est définie par :

$$R = \frac{Div_1 + P_1 - P_0}{P_0}$$ … si on suppose que le dividende est payé en fin de période

NB : La distribution d'un dividende fait baisser le cours du montant du dividende, mais ne provoque pas de « discontinuité » dans la rentabilité...

Si le dividende est payé à l'instant intermédiaire t :

de 0 à t : $R_{0t} = \frac{Div_t + P_t - P_0}{P_0}$

de t à 1 : $R_{t1} = \frac{P_1 - P_t}{P_t}$

de 0 à 1 : $R_{01} = (1 + R_{0t})(1 + R_{t1}) - 1$ *comme si le dividende est réinvesti dans l'action*

où P_t est le cours *ex-dividende* (juste après le paiement du dividende à la date t)

Exemple de calcul de rentabilité d'une action versant un dividende :

cours au 28/02 :	**46,28**
cours au 31/03 :	**45,12**
versement d'un dividende le 01/04 :	**1,70**
cours ex-dividende le 01/04 :	**44,98**
cours au 30/04 :	**42,70**

rentabilité en mars : $$R_{mars}=\frac{45{,}12-46{,}28}{46{,}28}\approx-2{,}51\,\%$$

rentabilité en avril : $$R_{avril}=\left(1+\frac{44{,}98+1{,}70-45{,}12}{45{,}12}\right)\times\left(1+\frac{42{,}70-44{,}98}{44{,}98}\right)-1$$

$$R_{avril}\approx-1{,}79\,\%$$

En l'absence de dividendes :

taux de rentabilité « simple » ou « arithmétique » : $R_a = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$

- mesure la plus-value en pourcentage

taux de rentabilité « logarithmique » : $R_l = \ln \frac{P_1}{P_0} = \ln P_1 - \ln P_0$

- R_l est une approximation de R_a : $R_l = \ldots = \ln(1+R_a) \approx R_a$

  mais comme $x \geq \ln(1+x)$, $R_l \leq R_a$.

- R_l est le taux de rentabilité continu équivalent au taux R_a : $e^{R_l} = 1 + R_A$

x

1.2- LA DISTRIBUTION DES RENTABILITES ET LOI NORMALE

Les prix futurs des actifs et les rentabilités sont « risqués » :

- μ = espérance mathématique de la rentabilité (« rentabilité attendue »)
- σ = écart-type de la rentabilité (mesure du risque, ou de la « volatilité »).

hypothèse : la rentabilité (arithmétique) suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$
→ deux paramètres décrivent la distribution : μ et σ
→ pb : le prix P_1 suit une loi normale (valeur négatives possibles !)

hypothèse alternative : la rentabilité *logarithmique* suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$

→ le prix P_1 suit une loi log-normale (ln P_1 suit une loi normale) :

- P_1 ne prend pas de valeur négative (responsabilité limitée des actionnaires)
- hypothèse cohérente avec l'efficience faible du marché (non corrélation sérielle des rentabilités) et l'application du théorème central limite.

Rentabilités log-normales et théorème central limite :

On découpe la période de mesure de rentabilité en T sous-périodes
$R_1 = \ln P_1 - \ln P_0$ → rentabilité « logarithmique » sur la période [0, 1]
$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ → rentabilité « logarithmique » sur la sous-période $[t - 1, t]$

$$R_1 = \sum_{t=1}^{T} r_t$$

si les r_t sont iid d'espérance μ et d'écart-type σ :
→ espérance : $E(R_1) = T\mu = \mu_1$
→ variance : $V(R_1) = V\left(\sum_{t=1}^{T} r_t\right) = T\sigma^2$ → volatilité : $Volat(R_1) = \sigma_1 = \sigma\sqrt{T}$

Le théorème central limite dit que : $\dfrac{R_1 - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}$ converge en loi vers $N(0; 1)$
→ R_1 converge en loi vers $N(\mu_1 ; \sigma_1)$

2- RENTABILITÉ ET RISQUE D'UN PORTEFEUILLE DE 2 À *N* ACTIFS

2.1- RENTABILITÉ D'UN PORTEFEUILLE DE 2 ACTIFS

Portefeuille constitué de deux titres, en proportions x_1 et $x_2 = 1 - x_1$

$x_i > 0$: position longue (on a acheté l'actif *i*)
$x_i < 0$: position courte (on a emprunté l'actif *i*)

Les taux de rentabilité sont considérés comme des variables aléatoires R_i, dont les propriétés statistiques sont connues (observations des séries passées).

Valeur d'un actif en t : $P_{i,t}$ $\Rightarrow$ Rentabilité arithmétique de l'actif : $R_i = \dfrac{P_{i,1} - P_{i,0}}{P_{i,0}}$

- Espérance : $E(R_i) = \mu_i$, $\rightarrow$ **$\mu_i \approx$ rentabilité attendue** (espérée, moyenne)
- Variance : $V(R_i) = \sigma_i^2$, $\rightarrow$ **$\sigma_i \approx$ « volatilité », « risque »**
- Covariance : $\mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \sigma_{12} = \sigma_{21}$
- Coefficient de corrélation : $\rho_{12} = \sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$

Rentabilité arithmétique du portefeuille :

Valeur d'un portefeuille contenant n_1 actifs 1, et n_2 actifs 2 : $V_t = n_1 P_{1,t} + n_2 P_{2,t}$
(valeur du portefeuille = somme des valeurs des actifs qui le composent)

Part de l'actif *i* dans le portefeuille : $x_i = \frac{n_i P_{i,0}}{V_0}$

Rentabilité arithmétique du portefeuille : $R_P = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \ldots = x_1 R_1 + x_2 R_2$

La rentabilité arithmétique du portefeuille est égale à la moyenne des rentabilités arithmétiques des actifs qui le composent, pondérée par les poids des actifs en portefeuille.

NB : La rentabilité *logarithmique* du portefeuille *n'est pas égale* à la moyenne des rentabilités *logarithmiques* des actifs qui le composent...
… mais *approximativement égale*, et pour des variations infinitésimales des prix.

NB : Si les rentabilités des actifs suivent des lois normales, alors la rentabilité du portefeuille suit également une loi normale.

Rentabilité attendue et risque total du portefeuille :

Espérance de la rentabilité du portefeuille (**rentabilité attendue**) : $\mu_P = x_1\mu_1 + x_2\mu_2$

Variance de la rentabilité : $\sigma_P{}^2 = x_1{}^2\,\sigma_1{}^2 + x_2{}^2\,\sigma_2{}^2 + 2\,x_1\,x_2\sigma_{12}$

soit : $\sigma_P{}^2 = x_1{}^2\,\sigma_1{}^2 + x_2{}^2\,\sigma_2{}^2 + 2\,x_1\,x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$

Écart-type de la rentabilité (**risque *total***) : $\sigma_P = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2\,x_1\,x_2\,\sigma_2\,\sigma_1\,\rho_{12}}$

3 cas particuliers :

- Cas n°1 : un des deux actifs est sans risque
- Cas n°2 : les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés positivement
- Cas n°3 : les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés négativement

Cas général :

- Cas n°4 : les deux actifs sont risqués et imparfaitement corrélés

$\mu_P = x_1\,\mu_1 + x_2\,\mu_2$ et $\sigma_P = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2\,x_1\,x_2\,\sigma_2\,\sigma_1\,\rho_{12}}$

Cas n°1 : un des deux actifs est sans risque (Tobin 1958)

L'**actif sans risque** paie un taux de rentabilité réelle fixe, sans risque de défaut (type obligation d'État indexée).

Un portefeuille comprenant

– un titre (ou portefeuille) risqué, (σ_i, μ_i), en proportion x,

– et un actif sans risque, $(0, r_f)$, en proportion $(1 - x)$,

a une rentabilité : $R_P = x\,R_i + (1 - x)r_f$

donc une rentabilité attendue : $\mu_P = x\,\mu_i + (1 - x)r_f$

un risque : $\sigma_P = |x|\,\sigma_i$

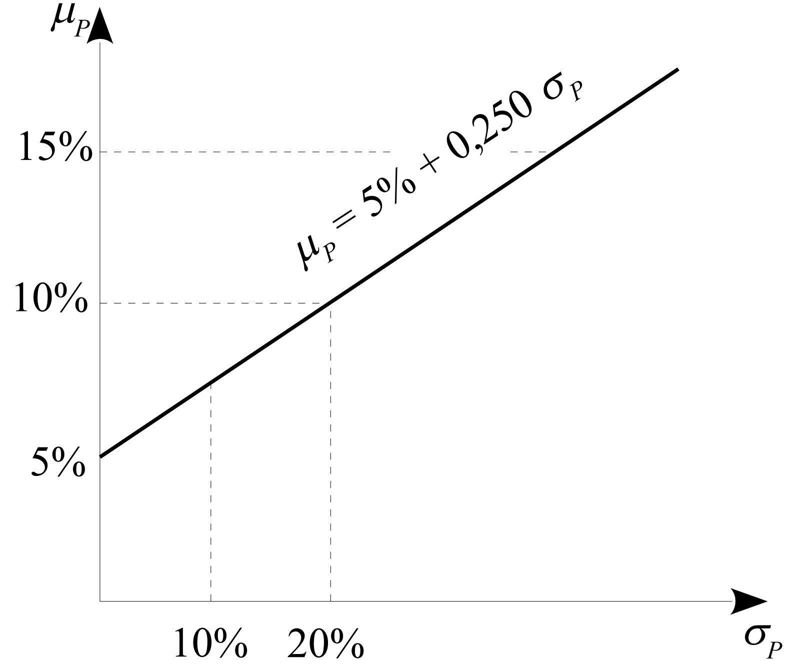
D'où : $\mu_P = r_f + \dfrac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\sigma_P$ si $x \geq 0$ [… et si $x \leq 0$?]

→ Rentabilité espérée et risque se combinent linéairement

Représentation graphique :

relation entre risque total et rentabilité attendue de portefeuilles combinant :

- l'actif sans risque rapportant 5 %
- un actif risqué de rentabilité R caractérisée par $(\sigma, \mu) = (20\%, 10\%)$...



représenter :

- portefeuille 100 % « sans risque »
- portefeuille 100 % actif risqué
- portefeuilles avec une proportion x placée en actif risqué, $0 \leq x \leq 1$
- portefeuilles avec $x < 0$… quelle signification ?
- portefeuilles avec $x > 1$… quelle signification ?

… Comment obtenir $\mu_P = 15\%$?
… Comment obtenir $\sigma_P = 10\%$?

Le ratio de Sharpe :

$\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du titre risqué *i*.

$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du portefeuille.

On a donc : $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$

Le portefeuille a le même ratio de Sharpe que l'actif risqué qu'il contient.

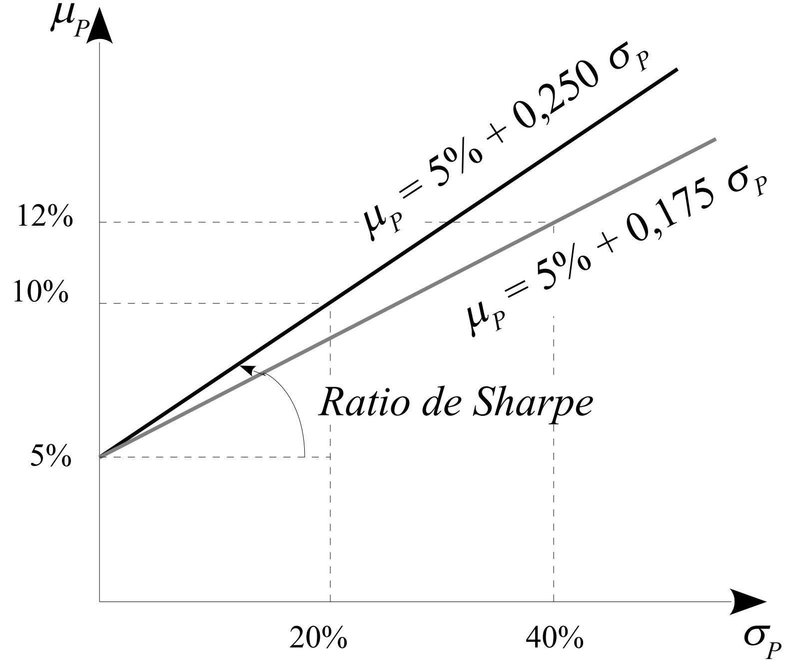
Interprétation :

$\mu_i - r_f$ → mesure la rentabilité excédentaire moyenne (rémunération du risque)

σ_i → mesure la « quantité de risque *total* »

$\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$ → **Le ratio de Sharpe s'interprète comme la rémunération *unitaire* du risque total**

Parmi des actifs risqués mutuellement exclusifs, choisir l'actif ayant le ratio de Sharpe le plus élevé.



<u>Exemple :</u>

actif sans risque : $r_f = 5\%$

actifs risqués, de rentabilités :

- R_1 caractérisé par $(\sigma_1, \mu_1) = (40\%, 12\%)$
- R_2 caractérisé par $(\sigma_2, \mu_2) = (20\%, 10\%)$

Comment obtenir un risque total de 20 % en combinant l'actif sans risque et R_2

- Tous les portefeuilles combinant l'actif sans risque et R_1 sont dominés par ceux qui contiennent R_2 au lieu de R_1.

Cas n°2 : les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés positivement

$$\rho_{12} = +1$$

rentabilité attendue du portefeuille : $\mu_P = x_1\,\mu_1 + x_2\,\mu_2$

risque du portefeuille : $\sigma_P^2 = x_1^2\,\sigma_1^2 + x_2^2\,\sigma_2^2 + 2\,x_1\,x_2\sigma_1\sigma_2$

soit : $\sigma_P = x_1\,\sigma_1 + x_2\,\sigma_2$

D'où : $\mu_P = \mu_1 + \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(\sigma_P - \sigma_1)$

→ Rentabilité espérée et risque se combinent linéairement

Constitution d'un **portefeuille sans risque** à partir de 2 actifs parfaitement corrélés positivement :

$$x_1 = \sigma_2 / (\sigma_2 - \sigma_1) \quad \text{et} \quad x_2 = -\sigma_1 / (\sigma_2 - \sigma_1)$$

→ acheter le titre ayant la volatilité la plus basse, emprunter (vendre à découvert) celui qui a la volatilité la plus haute.

Cas n°3 : les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés négativement

$$\rho_{12} = -1$$

rentabilité attendue du portefeuille : $\mu_P = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2$

risque du portefeuille : $\sigma_P^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 - 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2$

soit : $\sigma_P = |x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2|$

Le portefeuille est **sans risque** avec : $x_1 = \sigma_2 / (\sigma_2 + \sigma_1)$ et $x_2 = \sigma_1 / (\sigma_2 + \sigma_1)$

Et : $$\mu_P = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 - \sigma_1} (\sigma_P - \sigma_1) \quad \text{pour} \quad x_1 > \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\mu_P = \mu_2 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2 - \sigma_1} (\sigma_P - \sigma_1) \quad \text{pour} \quad x_1 < \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2)$$

→ Relation entre rentabilité attendue et risque donnée par deux segments de droite

Cas n°4 : les deux actifs sont risqués et imparfaitement corrélés

$$-1 < \rho_{12} < +1$$

rentabilité attendue du portefeuille : $\mu_P = x_1\,\mu_1 + x_2\,\mu_2$
risque du portefeuille : $\sigma_P^2 = x_1^2\,\sigma_1^2 + x_2^2\,\sigma_2^2 + 2\,x_1\,x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$

→ **La relation entre rentabilité attendue et risque est non linéaire**.

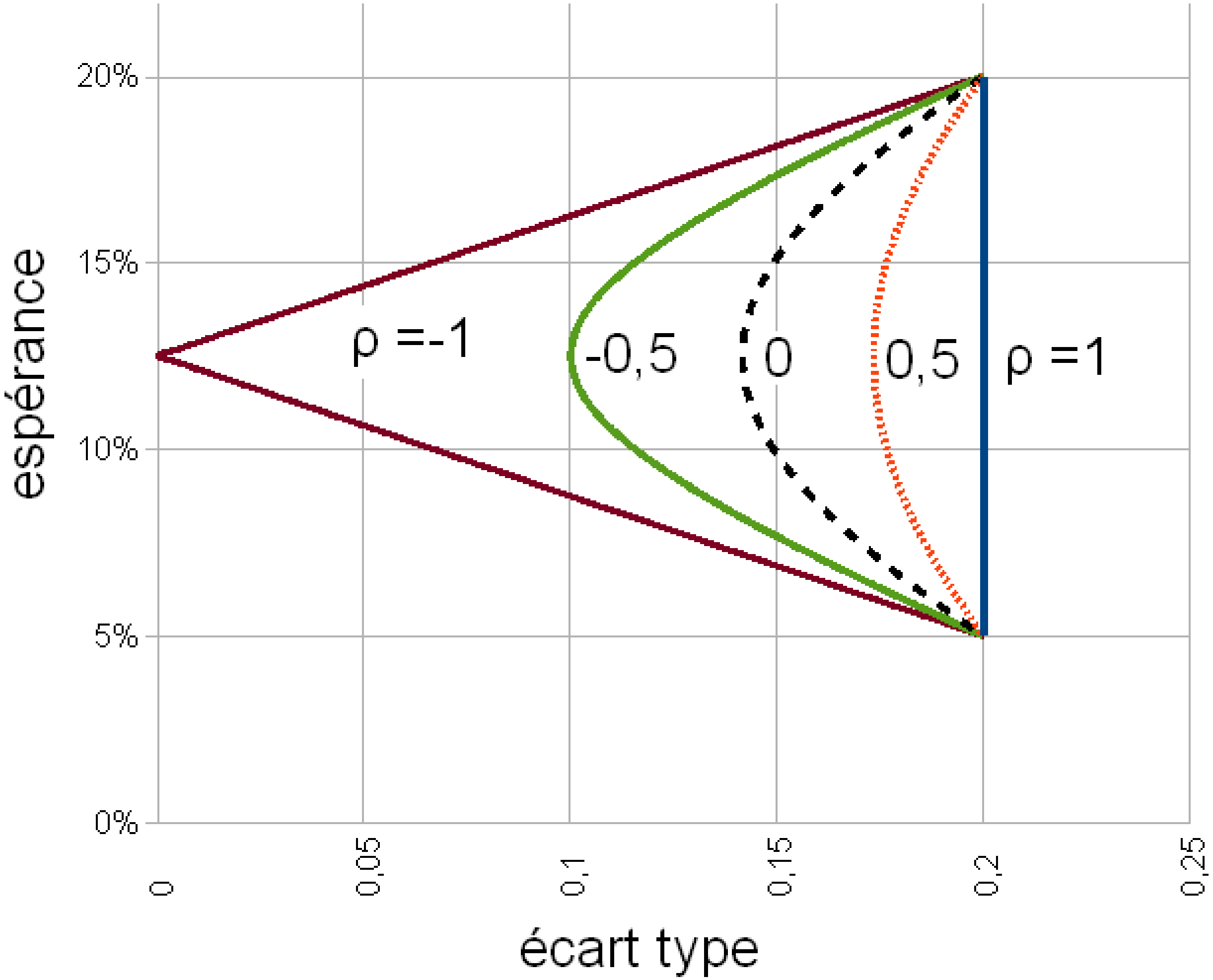
Exemple : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à deux actifs pour diverses valeurs du coefficient de corrélation.

Avec :

$\mu_1 = 5\%$ $\quad\quad$ $\mu_2 = 20\%$

$\sigma_1 = 20\%$ $\quad\quad$ $\sigma_2 = 20\%$

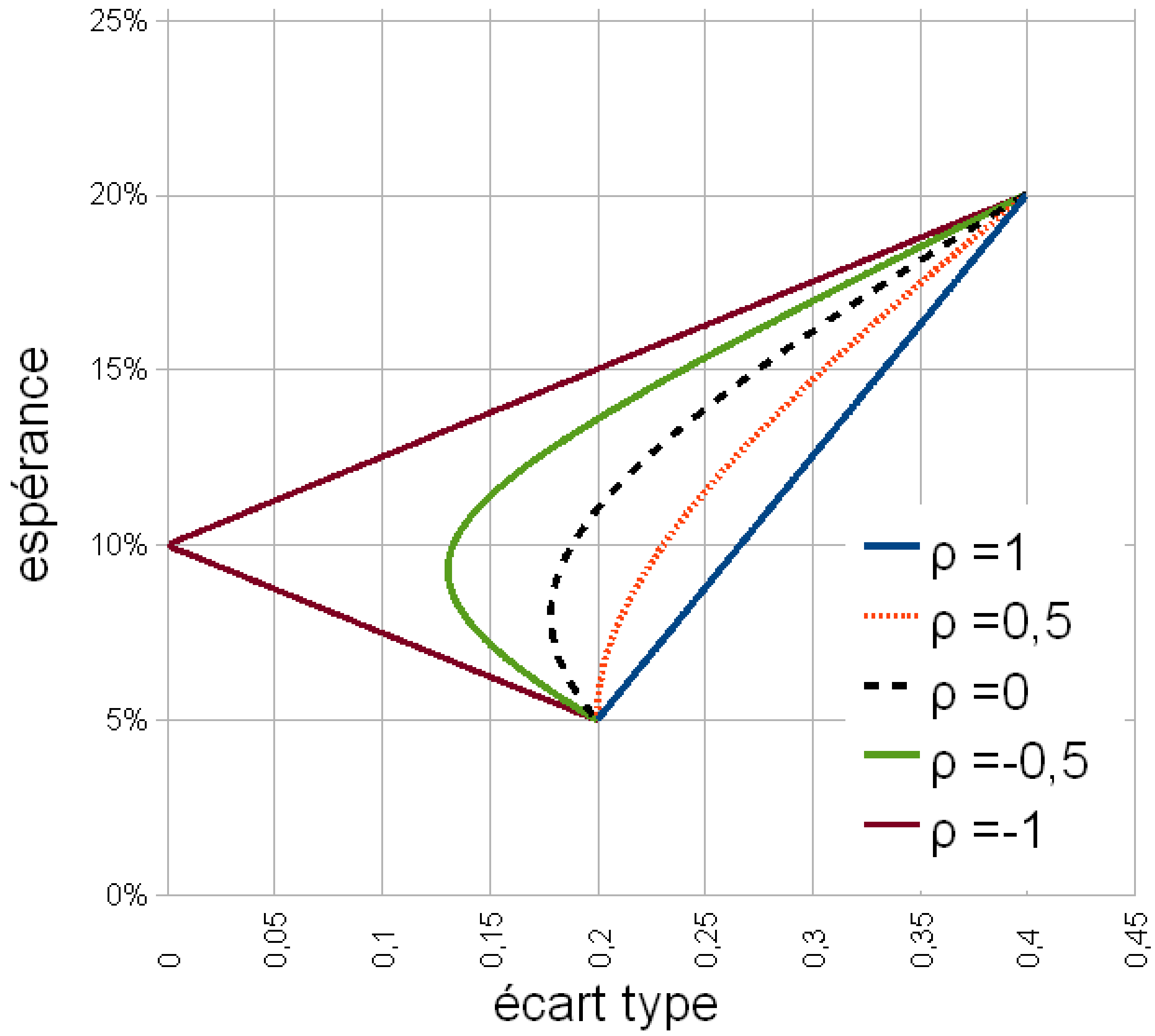
(même risque total)



Avec :

$\mu_1 = 5\%$ $\qquad \mu_2 = 20\%$

$\sigma_1 = 20\%$ $\qquad \sigma_2 = 40\%$



2.2- GÉNÉRALISATION POUR UN PORTEFEUILLE À N ACTIFS

Portefeuille → un vecteur des « parts » d'actifs : $X' = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N]$
Rentabilités des actifs : $R_s' = [R_{1s}, \ldots, R_{is}, \ldots, R_{Ns}]$

Matrice des variances-covariances de N actifs : $\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & \sigma_{1j} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{i1} & \ldots & \sigma_i^2 & \ldots & \sigma_{iN} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{N1} & \ldots & \sigma_{Nj} & \ldots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$

Rentabilité du portefeuille : $R_{Ps} = X' R_s = \sum_{i=1}^{N} x_i R_{is}$

Espérance de la rentabilité : $\mu_P = \mathrm{E}(R_P) = X' \mathrm{E}(R) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$

Variance de la rentabilité : $\mathrm{V}(R_P) = X' \Omega X = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$

(N termes de variance et $N^2 - N$ termes de covariances)

3- RÉDUCTION DU RISQUE PAR LA DIVERSIFICATION

Importance de la covariance des rentabilités...

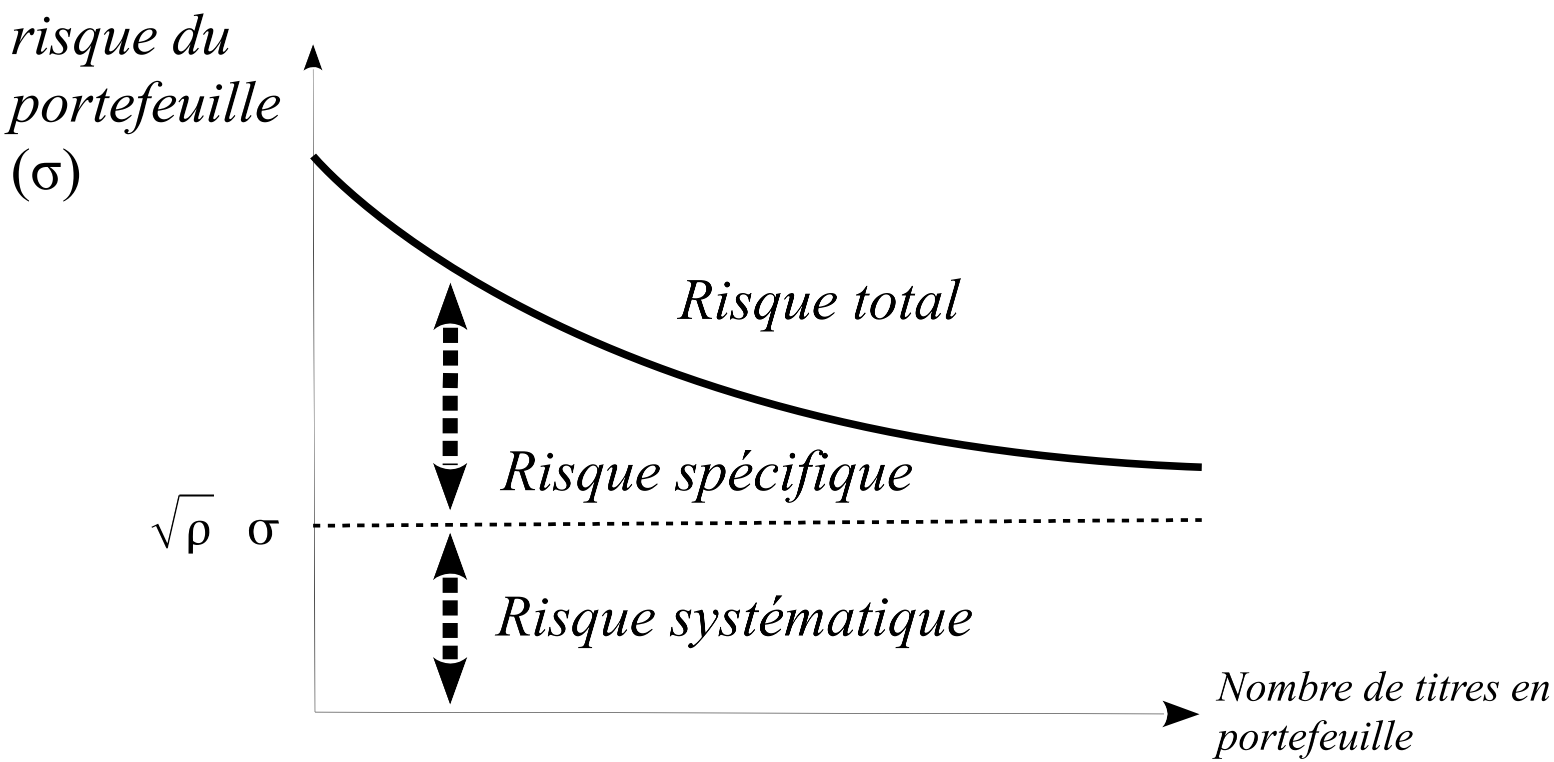
Supposons que tous les titres ont :

- la même rentabilité attendue, μ
- le même volatilité, σ
- le même coefficient de corrélation 2 à 2, $\rho \geq 0$

Constituons un **portefeuille équipondéré** : $x_i = 1/N$
Espérance de la rentabilité : $\mu_P = \mu$
Variance de la rentabilité : $\sigma_P^2 = \dfrac{\sigma^2}{N} + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\rho\,\sigma^2$

→ En augmentant le nombre de titres en portefeuille (en diversifiant), le « risque » du portefeuille diminue.
La covariance moyenne détermine le « socle » de risque qui subsiste après diversification.

Diagramme de Wagner et Lau :



Distinguer entre :

- risque total d'un titre (sa volatilité)
- risque systématique (ne pouvant être éliminé par diversification)
- risque spécifique (diversifiable).

4- LA CONTRIBUTION D'UN ACTIF *i* AU RISQUE DU PORTEFEUILLE.

Composer un portefeuille Q à partir du portefeuille P et de l'actif i

$R_Q = x R_i + (1-x) R_P$ alors : $\sigma_Q^2 = x^2 \sigma_i^2 + (1-x)^2 \sigma_P^2 + 2x(1-x)\sigma_{iP}$

Effet sur la variance de la rentabilité de Q d'une hausse de x (part de l'actif i) :

$$\frac{d\sigma_Q^2}{dx} = 2x\sigma_i^2 - 2(1-x)\sigma_P^2 + 2(1-2x)\sigma_{iP}$$

au voisinage de $x = 0$: $\left.\frac{d\sigma_Q^2}{dx}\right|_{x=0} = -2\sigma_P^2 + 2\sigma_{iP} = 2\sigma_P^2\left(\frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2} - 1\right) = 2\sigma_P^2(\beta_{iP} - 1)$

où $\beta_{iP} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}$

- **$\beta_{iP} > 1$: le titre *i* contribue à accroître le risque du portefeuille.**
- **$\beta_{iP} < 1$: le titre *i* contribue à diminuer le risque du portefeuille.**

Le **bêta** de l'actif *i* par rapport au portefeuille (β_{iP}) est le rapport entre

la covariance de la rentabilité de l'actif avec la rentabilité du portefeuille (σ_{iP})

et

la variance du portefeuille (σ_P^2).

$$\beta_{iP} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}$$

Une interprétations du bêta : impact marginal du titre sur le risque du portefeuille.

Contribution de l’actif au risque du portefeuille :

– mesure absolue : la covariance de l'actif avec le portefeuille σ_{iP}

– mesure relative : le bêta de l'actif dans le portefeuille β_{iP}

Propriété : **la moyenne pondérée des bêtas des actifs par rapport au portefeuille est égale à 1.**

Démonstration :

La **covariance** étant une fonction linéaire :

$$\sigma_{iP}=\mathrm{Cov}\left(R_i,R_P\right)=\mathrm{Cov}\left(R_i,\sum_{j=1}^{N}x_jR_j\right)=\sum_{j=1}^{N}x_j\mathrm{Cov}\left(R_i,R_j\right)=\sum_{j=1}^{N}x_j\sigma_{ij}$$

→ la covariance de la rentabilité d'un actif avec celle du portefeuille est égale à la moyenne pondérée des covariances de la rentabilité de l'actif avec celles de tous les actifs contenus dans le portefeuille.

$$\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}x_ix_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{j=1}^{N}x_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{N}x_i\sigma_{iP}\quad\rightarrow\quad\sigma_P=\frac{1}{\sigma_P}\sum_{i=1}^{N}x_i\sigma_{iP}=\sum_{i=1}^{N}x_i\rho_{iP}\sigma_i$$

→ la variance de la rentabilité du portefeuille est égale à la moyenne pondérée des covariances des rentabilités des actifs avec celle du portefeuille.

$$\rightarrow\quad\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{N}x_i\sigma_{iP}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{N}x_i\beta_{iP}=1$$

… et on retrouve : $\dfrac{d\sigma_P/\sigma_P}{dx_i}=\beta_{iP}$

5- LE CHOIX DU PORTEFEUILLE OPTIMAL

5.1- L'ENSEMBLE DES PORTEFEUILLES D'ACTIFS RISQUÉS

Si on combine tous les titres « risqués » disponibles de toutes les manières possibles, on obtient *l'ensemble des portefeuilles possibles*, caractérisés par un taux de rentabilité de moyenne μ et d'écart-type σ.

Un **portefeuille efficient** est un portefeuille

- dont la rentabilité moyenne est maximale pour un niveau de risque donné,

  $\rightarrow$ Maximiser $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$ s.c. $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$ constante

- dont le risque est minimal pour une rentabilité donnée.

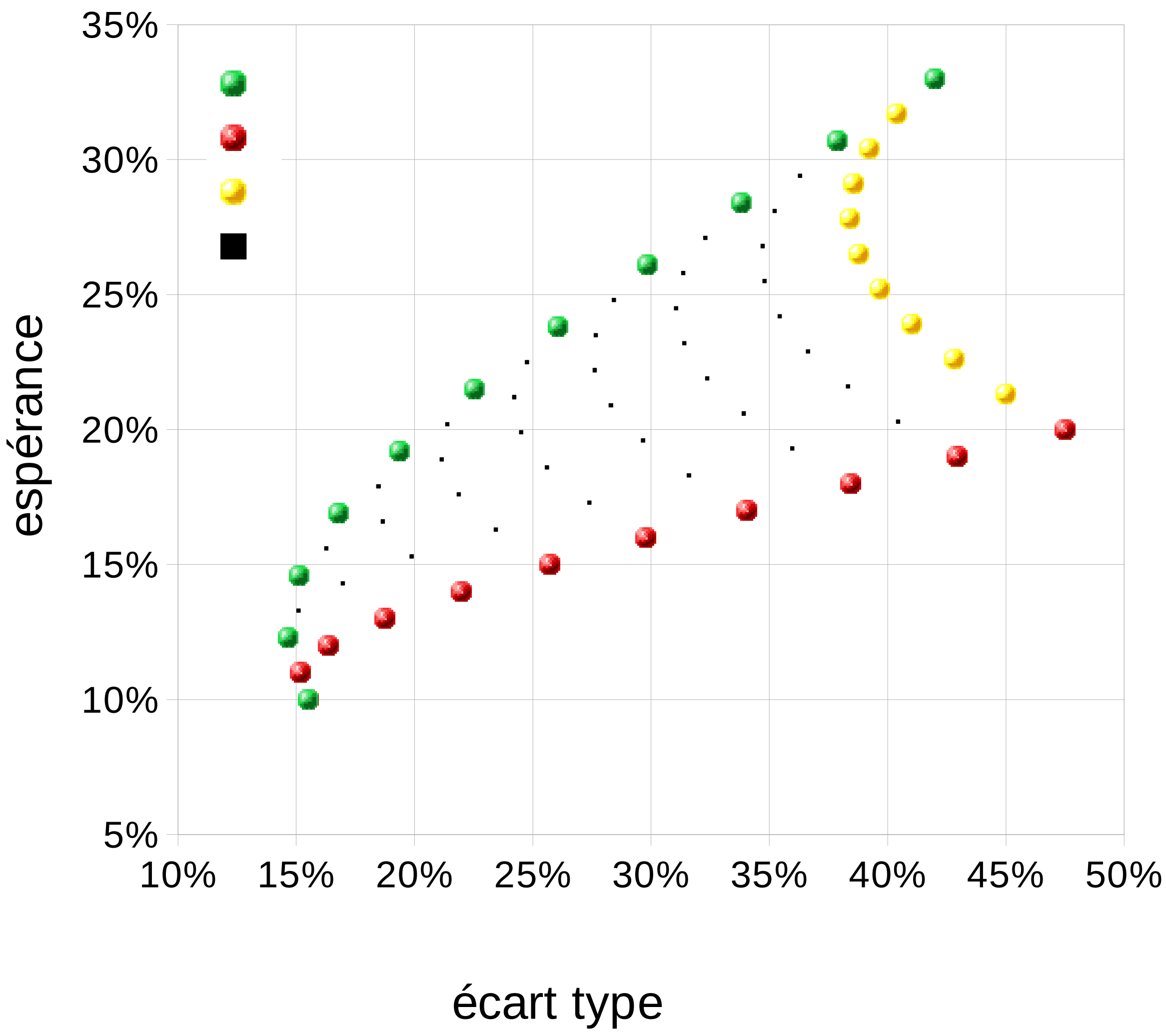
  $\rightarrow$ Minimiser $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$ s.c. $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$ constante

$\rightarrow$ il faut choisir parmi les portefeuilles efficients (en fonction des préférences)

Exemple : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à trois actifs, A, B et C.

	Coefficient de corrélation		
	A	B	C
A	1	0,02	0,5
B		1	0,1
C			1

	μ_i	σ_i
A	33 %	42,0 %
B	10 %	15,5 %
C	20 %	47,5 %



5.2- LA FRONTIÈRE EFFICIENTE « RÉGULIÈRE »

Si on n'impose pas de restrictions sur les positions courtes, on peut montrer que l'ensemble des portefeuilles risqués est délimité par des portefeuilles caractérisés par (σ, μ) qui vérifient :

$$\sigma^2 = \sigma_V^2 + \left(\frac{\mu - \mu_V}{a} \right)^2$$

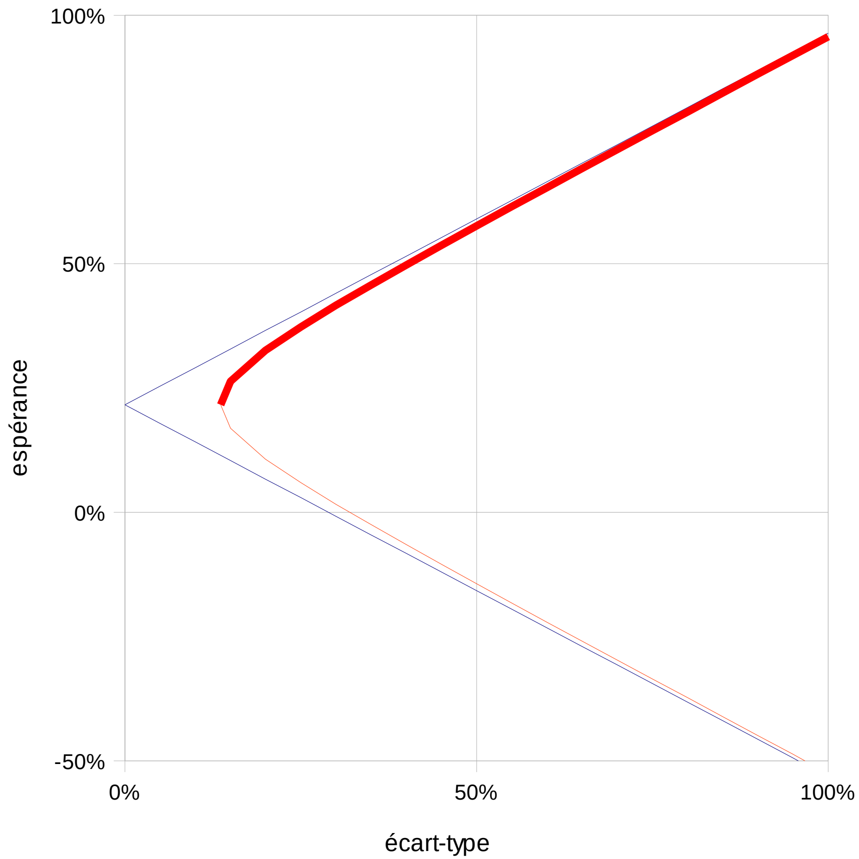
→ La frontière de l'ensemble des portefeuilles est une branche d'hyperbole d'équation dans le plan (σ, μ) : $\mu = \mu_V \pm a \sqrt{\sigma^2 - \sigma_V^2}$

- où a est une constante (qui correspond à la pente de la branche asymptotique, et dont la valeur dépend des caractéristiques des rentabilités des titres existants, leurs moyennes, variances, covariances)

- et σ_V et μ_V sont les caractéristiques du portefeuille de variance minimale.

Exemple :

$$\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - (13{,}59\,\%)^2}$$



La frontière efficiente « régulière » est la branche supérieure de l'hyperbole (portefeuilles dominants).

Les rentabilités espérées se combinent linéairement, tandis que les « risques » se combinent non linéairement, à cause des covariances.

5.3- PROPRIÉTÉS DES PORTEFEUILLES RISQUÉS EFFICIENTS

Les portefeuilles d'actifs risqués « efficients » vérifient plusieurs **propriétés** :

1. Par construction, la rentabilité moyenne d'un portefeuille efficient est une fonction croissante du risque (si on modifie un portefeuille efficient de manière à augmenter la rentabilité moyenne, alors on est contraint d'augmenter le risque).

2. Toute combinaison linéaire de portefeuilles efficients est un portefeuille efficient.

3. Toute la frontière « régulière » peut être générée par la combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients quelconques, en combinant éventuellement des positions longues et courtes (« théorème de séparation à deux fonds » de F. Black 1972, qui généralise celui de Tobin 1958).

5.4- LA FRONTIÈRE EFFICIENTE « SINGULIÈRE »

Peut-on améliorer la performance d'un portefeuille composé de titres risqués en proportions x_1 à x_n, et de titre sans risque en proportion $1 - \sum x_i$?

→ peut-on augmenter le ratio de Sharpe en achetant un titre *i* par effet de levier, i.e. en empruntant au taux sans risque (diminuer la part de titre sans risque), et en augmentant la position en actif *i* ?

(i) effet sur la rentabilité attendue : $\dfrac{d\mu_P}{dx_i} = \mu_i - r_f$ → rémunération du risque apportée par le titre i

(ii) effet sur la volatilité : $\dfrac{d\sigma_P/\sigma_P}{dx_i} = \dfrac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2} = \beta_{iP}$ soit $\dfrac{d\sigma_P}{dx_i} = \beta_{iP}\sigma_P$

(iii) effet sur le ratio de Sharpe : $\dfrac{d}{dx_i}\left(\dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma_P}\right) = \ldots = \dfrac{1}{\sigma_P}\left(\mu_i - r_f - \beta_{iP}\left(\mu_P - r_f\right)\right)$

→ le ratio de Sharpe (la « performance ») augmente si $\mu_i > r_f + \beta_{iP}\left(\mu_P - r_f\right)$

Ainsi :

- $r_f + \beta_{iP}(\mu_P - r_f)$ s'interprète comme la « rentabilité exigée » par l'investisseur (celle qui permet une rémunération « suffisante » du risque additionnel, c-à-d. qui garde inchangé le ratio de Sharpe)
  → la performance augmente si rentabilité espérée du titre > rentabilité exigée

- dans un portefeuille efficient, le ratio de Sharpe est maximum :
  - tous les titres permettant de l'augmenter ont été ajouté !
  - Ajouter encore du titre *i* n'augmente plus le ratio de Sharpe :
  - $\mu_i = r_f + \beta_{iP}(\mu_P - r_f)$

  → Autrement dit, la prime de risque de chaque titre est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille $\mu_i - r_f = \beta_{iP}(\mu_P - r_f)$

Comme $\beta_{iP}=\sigma_{iP}/\sigma_P^2$ et $\sigma_{iP}=\rho_{iP}\sigma_i\sigma_P$, on a :

- $\dfrac{\mu_i-r_f}{\sigma_{iP}}=\dfrac{\mu_P-r_f}{\sigma_P^2}$

→ La rentabilité excédentaire par unité de risque de chaque titre est la même que la rentabilité excédentaire par unité de risque du portefeuille, le « risque » d'un titre étant mesuré par la covariance de sa rentabilité avec celle du portefeuille

- $\dfrac{\mu_i-r_f}{\sigma_i}=\rho_{iP}\dfrac{\mu_P-r_f}{\sigma_P}$

→ le ratio de Sharpe de chaque titre en portefeuille est proportionnel (et inférieur au égal) au ratio du Sharpe du portefeuille qui le contient.

Avec un actif sans risque, **la frontière efficiente « singulière »** est la demi-droite qui relie le titre sans risque au portefeuille d'actifs risqués ayant le ratio de Sharpe le plus élevé (« portefeuille tangent »).

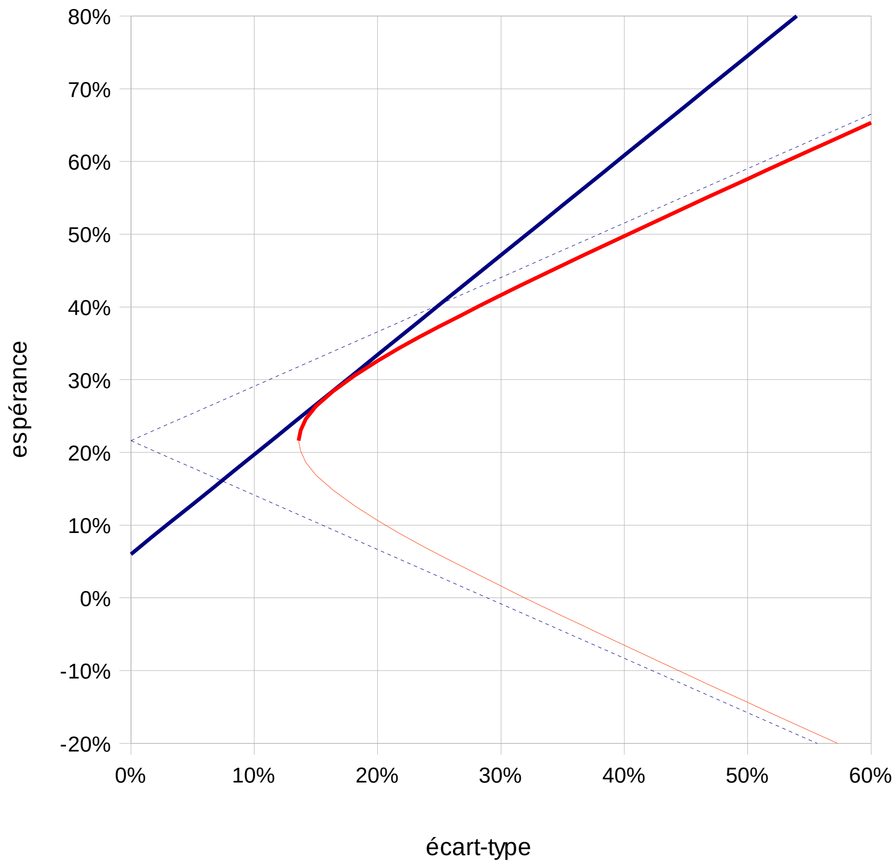
Exemple :

Frontière régulière :

$$\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - (13{,}59\,\%)^2}$$

	σ	μ
centre:	0	21,62%
portef var min	13,59%	21,62%
portef tangent	16,22%	28,23%

pente asymptote : 0,7479
pente frontière singulière : 1,3708
taux d'intérêt sans risque = 6 %



La frontière singulière indique un **principe de séparation des fonds** (« théorème de séparation à deux fonds » de Tobin 1958) :

Des investisseurs ayant les mêmes anticipations sur les rentabilités et leurs corrélations, investissent dans le même portefeuille (ou fonds) d'actifs risqués (celui qui a le ratio de Sharpe le plus élevé : le portefeuille tangent).

→ La composition du portefeuille tangent est indépendante de la tolérance ou de l'aversion au risque des investisseurs.

C'est l'allocation entre le portefeuille tangent et l'actif sans risque qui diffère selon la tolérance ou l'aversion au risque...

5.5- ALLOCATION D'ACTIF OPTIMALE (MARKOWITZ) :

Préférences :

Préférences représentées par la fonction d'utilité $U(\mu, \sigma) = \mu - a\,\sigma^2$

$a \rightarrow$ « aversion pour le risque total » (au sens de Markowitz)

Interprétation

le TMS du risque à la rentabilité attendue est la pente de la courbe d'indifférence :

$$\left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{dU=0} = 2a\sigma$$

$2a\sigma$ est le prix marginal subjectif du risque total en termes de rentabilité attendue

- le décideur accepte ↑ de σ de 1 point si la rentabilité attendue ↑ de $2a\sigma$.
- plus a est élevé, plus le prix subjectif du risque (la compensation du risque exigée) est élevé
- le prix subjectif du risque dépend de σ : plus σ est élevé, plus il est élevé.

Préférences de Markowitz et axiomatique de Von Neumann-Morgenstern

Selon Von Neumann-Morgenstern, l'utilité du décideur devrait s'écrire comme « espérance d'utilité de la richesse finale » : $E[u((1+R)W_0)]$

On peut transformer cette fonction d'utilité en $U(\mu, \sigma)$ si :

- $u(x) = x + b\,x^2$ (fonction d'utilité quadratique)
- les rentabilités sont gaussiennes : les seules paramètres de la distribution sont les espérances et les variances-covariances

  si R est gaussienne, alors $(1+R)W_0$ l'est aussi et
  on peut monter que si x est gaussienne et $u(x) = e^{-ax}$
  alors $E[e^{-ax}] = e^{-aE[x]+0{,}5a^2V[x]}$
  et $E[e^{-ax}]$ est maximum quand $E[x] - 0{,}5aV[x]$ est maximum...

Contrainte : frontière singulière

$\mu = r_f + \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T}\sigma$ où μ_T et σ_T sont les caractéristiques du portefeuille tangent.

On note :

- x la part investie dans le portefeuille risqué (portefeuille tangent)
- (1 – x) la part investie en actif sans risque (on suppose qu'il existe!)

Optimum : *Maximiser* $U(\mu, \sigma) = \mu - a\,\sigma^2$ s.c. $\mu = r_f + \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T}\sigma$

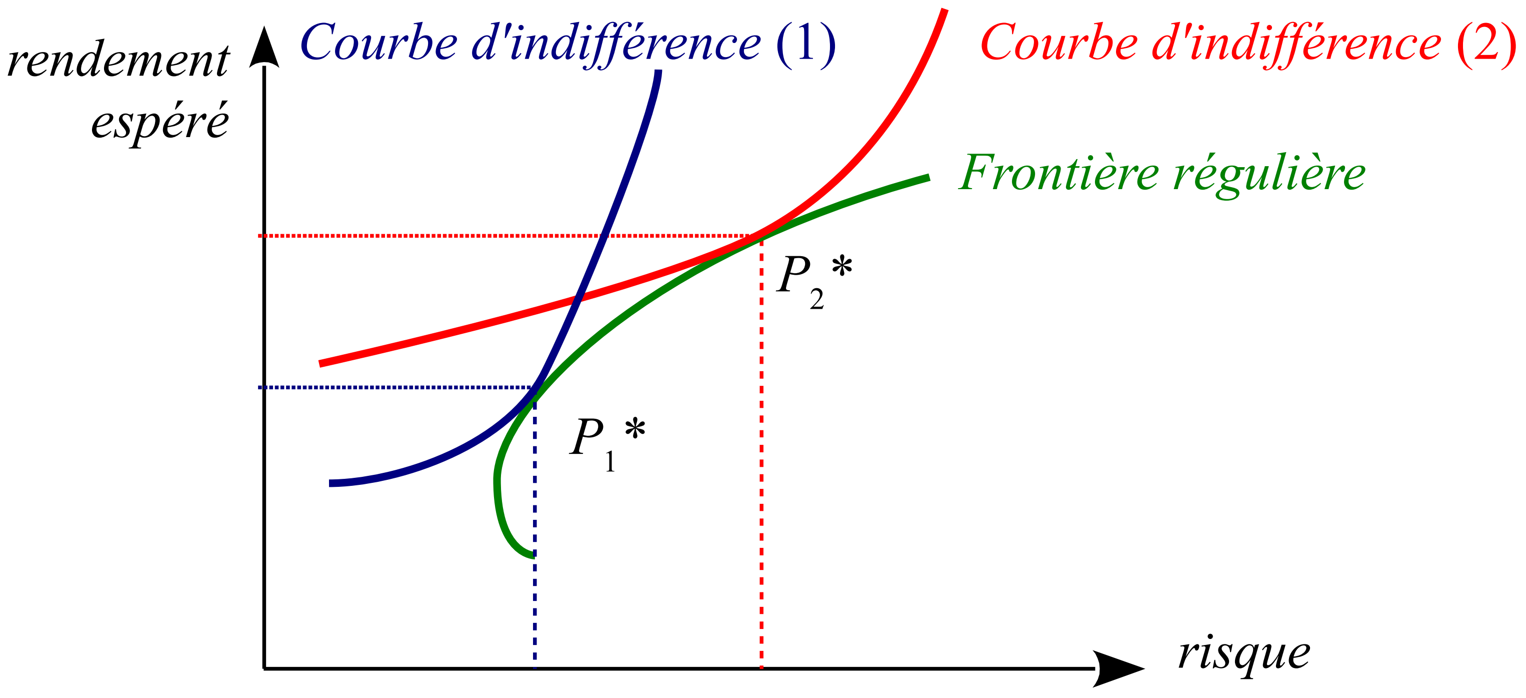
On obtient : $x^* = \frac{1}{2a}\frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T^2}$.

- ↑ aversion au risque (a) → ↓ x*
- ↑ rémunération du risque (ratio de Sharpe) → ↑ x*

NB : En l'absence d'actif sans risque, la contrainte est la frontière régulière

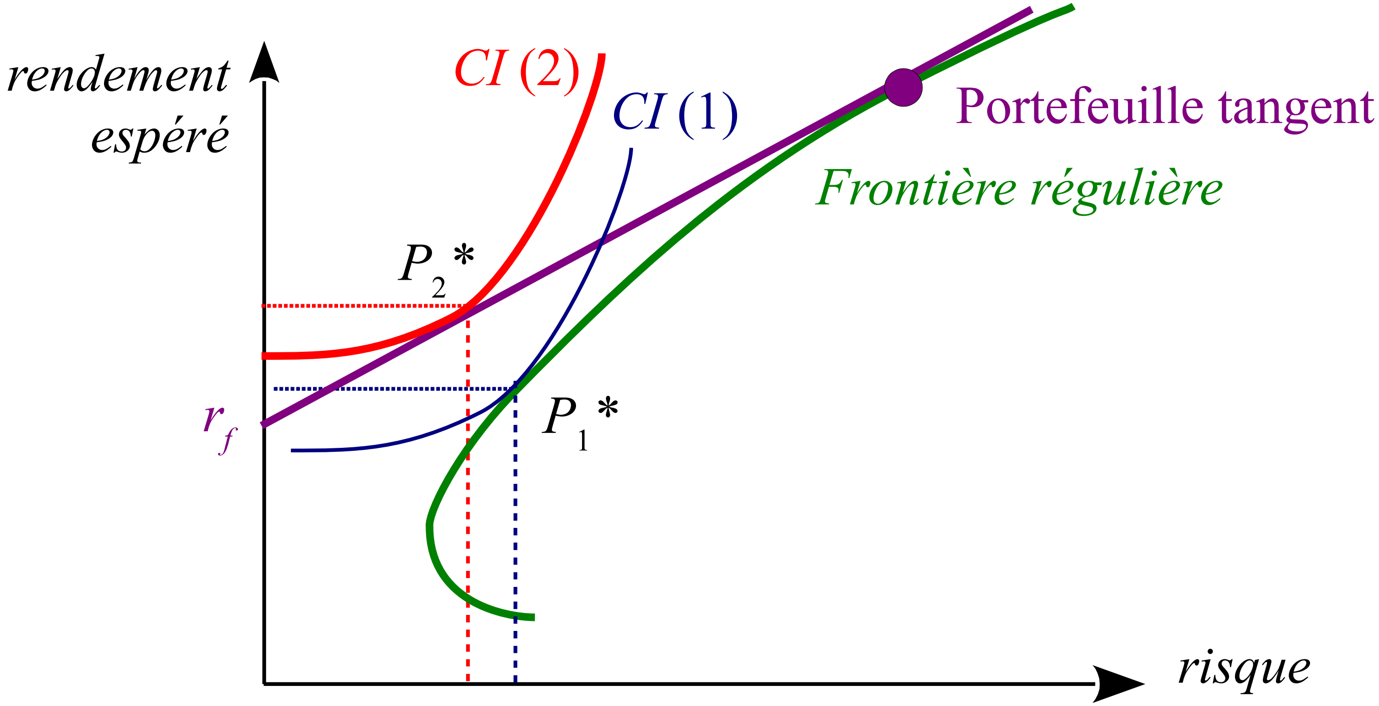
$\sigma^2 = \sigma_V^2 + \left(\frac{\mu - \mu_V}{a}\right)^2$ μ_V et σ_V les caractéristiques du portefeuille de variance mini

Représentation graphique du portefeuille optimal – pas d'actif sans risque



Courbe d'indifférence (1) : aversion au risque « élevée »
Courbe d'indifférence (2) : aversion au risque « faible »

Représentation graphique du portefeuille optimal – avec actif sans risque



Courbe d'indifférence (1) : sans actif sans risque

Courbe d'indifférence (2) : avec actif sans risque → ↑ utilité de l'investisseur...

... riscophobe

6- LE MEDAF

La théorie du portefeuille conseille de choisir un portefeuille risqué efficient ou un partage entre actif sans risque et portefeuille d'actifs risqués selon le degré d'aversion au risque.

Le MEDAF (modèle d'évaluation des actifs financiers) propose une détermination des **prix d'équilibre des actifs** (Sharpe, Treynor, Lintner, Mossin)

1. Des investisseurs riscophobes évaluent les portefeuilles en termes d'espérance et de variance des rentabilités sur une période (il existe des extensions sur plusieurs périodes, des extensions avec des fonctions d'utilité espérée)
2. Le marché des titres est parfait (pas de coûts de transactions, de restrictions de ventes à découvert, de taxes ; information disponible sans coût ; possibilité de prêt et d'emprunt au taux sans risque)
3. Les investisseurs ont accès aux mêmes opportunités d'investissement.
4. Les anticipations de rendement (espérances, variances, covariances) sont identiques.

Sous ces hypothèses,
tous les investisseurs déterminent

– la même frontière efficiente régulière,
– le même portefeuille tangent (ayant le ratio de Sharpe le plus élevé) ;

ils détiennent tous des actifs risqués dans les mêmes proportions (celles du portefeuille tangent, le « fonds d'actifs risqués »).

Alors, **à l'équilibre du marché** :

- Tous les titres offerts sont détenus ;
- Le portefeuille « tangent » est le « portefeuille de marché » (tous les titres existants, en proportion de leur capitalisation boursière).
- Le portefeuille de marché est efficient.
- La prime de risque de chaque titre est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille de marché : $\mu_i - r_f = \beta_{iM}(\mu_M - r_f)$

Implications du MEDAF

<u>1°- La rentabilité espérée d'un titre ne dépend pas de son risque spécifique.</u>

$$\mu_i - r_f = \beta_{iM}\left(\mu_M - r_f\right)$$

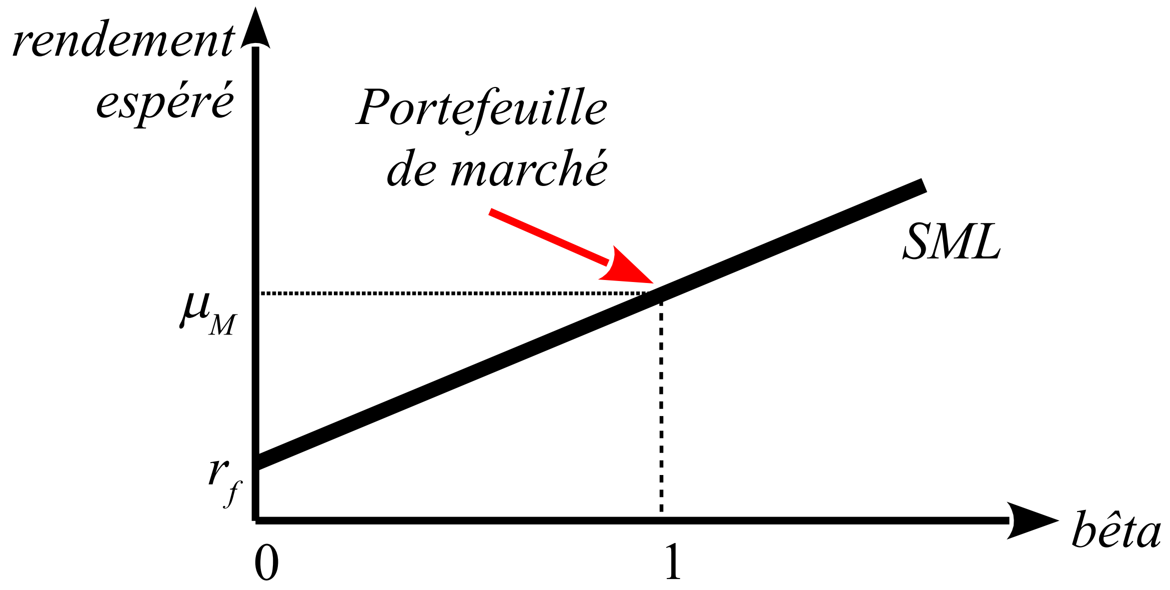
→ La prime de risque (donc la rentabilité attendue) d'un titre dépend de la prime de risque du marché et du bêta du titre.

… pas du risque total (de σ)

→ on peut réécrire : $\dfrac{\mu_i - r_f}{\sigma_i} = \rho_{iM} \dfrac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$

- tous les titres ayant la même corrélation avec le portefeuille de marché ont le même ratio de Sharpe
- le ratio de Sharpe de chaque titre est inférieur ou égal au ratio de Sharpe du portefeuille de marché.

2°- Le bêta indique la part du risque non diversifiable.



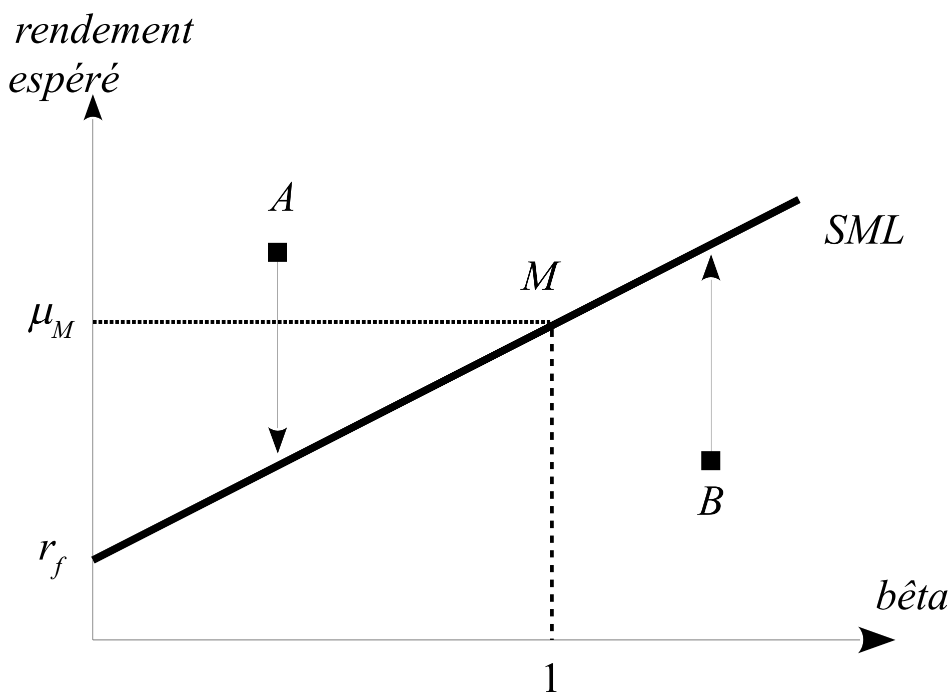
- A l'équilibre, tous les portefeuilles et tous les actifs sont sur la « droite du MEDAF » (SML = *Security Market Line*)
- Le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.
- Le bêta du portefeuille de marché est égal à 1.
- Un actif à l'équilibre est reproduit par un portefeuille composé de titres sans risques (bêta nul) et du portefeuille de marché (théorème de séparation en deux fonds).

→ le bêta d'un actif à l'équilibre mesure la fraction investie dans le portefeuille de marché !

Seul le risque non diversifiable (la fraction du portefeuille investi dans le portefeuille de marché) « mérite » une rémunération (une rentabilité supérieure au taux sans risque).

Un titre A situé au-dessus de la SML est « sous-évalué » : sa rentabilité espérée est supérieure à celle d'un portefeuille efficient de même bêta, la demande pour ce titre devrait augmenter, ainsi que son prix (de sorte que sa rentabilité espérée diminue).

Un titre B situé au-dessous de la SML est, au contraire, « sur-évalué » (son prix courant est supérieur au prix d'équilibre, sa rentabilité actuelle est inférieure à sa rentabilité d'équilibre).



3°- Le « modèle de marché » de Sharpe

Le bêta comme sensibilité de la rentabilité du titre à la rentabilité du portefeuille de marché (pente d'une droite de régression).

$\mu_i = r_f + \beta_i (\mu_M - r_f)$ → estimer une relation linéaire entre R_i et R_M

la régression linéaire par les MCO de R_i sur R_M, donne : $R_i = \hat{a}_i + \hat{b}_i R_M + \hat{u}_i$

- où $\hat{b}_i = \sigma_{iM} / \sigma_M^2$ est l'estimateur par MCO de β_i
- $\hat{u}_i$ est le résidu, d'espérance nulle, non corrélé à R_P.

$$\rightarrow \quad E[R_i] = \hat{a}_i + \hat{b}_i E[R_M] = r_f + \hat{b}_i (E[R_M] - r_f) + [\hat{a}_i - (1 - \hat{b}_i) r_f]$$

on note : $\alpha_i \equiv [\hat{a}_i - (1 - \hat{b}_i) r_f]$ « alpha de Jensen »

→ rentabilité excédentaire par rapport à un actif de même bêta

« R-carré » de la régression = % de variance de R_i expliquée par la variance de R_M
1 – « R-carré » = % de variance de R_i imputable au risque spécifique

4°- La valeur d'un titre ne dépend pas du taux de croissance anticipé des cash-flows futurs.

Le modèle de Gordon-Shapiro de détermination du coût du capital est remis en cause et dépassé.

Coût du capital financé par action	=	rendement en dividende	+	taux de croissance anticipé du dividende

Le coût du capital est donné par la rentabilité anticipée (l'espérance mathématique de la rentabilité), qui dépend du bêta, du taux sans risque et de la prime de risque du marché.

Coût du capital	=	taux sans risque	+ bêta x	prime de risque du marché

La valorisation d'un actif à partir du MEDAF :

Rentabilité aléatoire du titre : $\widetilde{R}=\dfrac{\widetilde{V}_1-V_0}{V_0}$

D'où : $\widetilde{V}_1=(1+\widetilde{R})V_0$ et $E[\widetilde{V}_1]=(1+E[\widetilde{R}])V_0=(1+\mu)V_0$

avec $\mu=r_f+\beta\left(\mu_M-r_f\right)=r_f+\theta\,\mathrm{Cov}\left(\widetilde{R},R_M\right)$ avec $\theta=\dfrac{\left(\mu_M-r_f\right)}{\sigma_M^2}$

Deux manières d'évaluer V_0 :

$V_0=\dfrac{E[\widetilde{V}_1]}{(1+\mu)}$ → valeur actuelle au taux ajusté pour le risque de l'espérance de $\widetilde{V}_1$

$V_0=\dfrac{E[\widetilde{V}_1]-\theta\,\mathrm{Cov}(\widetilde{V}_1,R_M)}{(1+r_f)}$ → valeur actuelle au taux sans risque de « l'équivalent-certain » de $\widetilde{V}_1$

7- LE MODÈLE D'ÉVALUATION PAR ARBITRAGE (MEA)

Hypothèse : la rentabilité d'un actif est déterminée

- en partie par des facteurs qui reflètent des variables macroéconomiques
- en partie par des éléments spécifiques

La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage implique alors une relation linéaire entre la rentabilité attendue et les facteurs de risques

avec *un* facteur : $R_i = \mu_i + \beta_i (F - E(F)) + \epsilon_i$

F : facteur de risque commun → centré dans la relation ci-dessus.
β_i : sensibilité l'action i au facteur F.
ϵ_i : terme spécifique à l'action i, non corrélé au facteur F, de moyenne nulle (diversifiable)
μ_i : rentabilité moyenne de l'action i.

Le risque spécifique est éliminé par diversification.
→ le facteur commun est la seule source de risque : $R_i = \mu_i + \beta_i F$

En constituant un portefeuille diversifié, même l'influence du facteur commun peut être éliminée.

$$R_P = x_1 R_1 + x_2 R_2 \text{ avec } x_1 = \beta_2/(\beta_2 - \beta_1) \text{ et } x_2 = \beta_1/(\beta_1 - \beta_2)$$

Absence d'opportunité d'arbitrage :

$$r_f = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\mu_1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\mu_2$$

rentabilité d'un portefeuille sans risque = taux sans risque.

soit : $\frac{\mu_1 - r_f}{\beta_1} = \frac{\mu_2 - r_f}{\beta_2} \equiv \lambda$ ou : $\mu_i - r_f = \lambda \beta_i$

→ la rentabilité excédentaire moyenne par unité de bêta est la même pour tous les portefeuilles (tous les portefeuilles rémunèrent de la même manière la sensibilité au facteur commun).
→ λ est la prime de risque (rentabilité excédentaire) d'un actif de bêta égal à 1.

Si le facteur commun est la rentabilité du portefeuille de marché, on a :

$\mu_i - r_f = \lambda \beta_i$ pour tout portefeuille et
$\mu_m - r_f = \lambda$ pour le portefeuille de marché

On retrouve l'équation du MEDAF : $\mu_i - r_f = \beta_i (\mu_m - r_f)$

… sans l'hypothèse forte d'homogénéité des anticipations du MEDAF...

Généralisation à plusieurs facteurs :

$$\mu_i - r_f = \lambda_1 \beta_{i1} + ... + \lambda_n \beta_{in}$$

avec $\lambda_k = E(F_k) - r_f$ la prime de risque du facteur *k*.

→ des facteurs exogènes au marché influencent les rentabilités
→ l'évaluation dépend de ces facteurs (non précisés par la théorie... des portefeuilles de bêta unitaire...)

→ empiriquement : modèle de Burmeister, Roll et Ross (1994)

- variation du spread de taux corporate – government (confiance)
- variation du spread de taux long – court (horizon temporel)
- variation de l'inflation (risque inflationniste)
- variation non anticipée du PIB (cycle économique)
- ...

→ empiriquement : Fama & French (1995) – trois facteurs

- marché
- taille des entreprises (SMB : *small minus big*) : prime de rendement associée aux titres de faible capitalisation par rapport aux titres de capitalisation élevée
- ratio valeur comptable sur valeur boursière des fonds propres (HML : *high minus low*) : prime de rendement associée aux « actions de valeur » (*value stocks*, à ratio *book-to-market* élevé) par rapport aux « actions de croissance (*growth stocks*, à ratio *book-to-market* bas)

$$\mu_i - r_f = \beta_{iM} E(R_M - r_f) + \beta_{iSMB} E(SMB) + \beta_{iHML} E(HML)$$

ANNEXE 1 : Détermination de le frontière efficiente

NB : on considère ici que les positions courtes sont permises et possibles (on n'impose pas de restriction sur les positions courtes).

Le frontière efficiente est l'ensemble des solutions de :

$$\begin{cases} Max\ X'\mu - \lambda X'\Omega X \\ s.c. \quad X'\mathbf{1} = 1 \quad i.e \quad \sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \quad avec \quad \mathbf{1}' = [1,\ 1, \dots\ 1] \end{cases}$$

Résolution par la méthode de Lagrange : $L = X'\mu - \lambda X'\Omega X + \theta(1 - X'\mathbf{1})$

La condition de premier ordre est : $dL/dX' = 0$ soit

(CPO) $\mu - 2\lambda\Omega X - \theta\mathbf{1} = 0$

D'où on obtient **l'équation de la frontière efficiente** dans le plan (σ, μ) :

(FE) $$\sigma^{*2} = \frac{1}{c} + \frac{c}{ac - b^2}\left(\mu^* - \frac{b}{c}\right)^2$$

Démonstration :

(CPO) $\mu - 2\lambda\Omega X - \theta\mathbf{1} = 0$

En prémultipliant CPO par X' : $X'\mu - 2\lambda X'\Omega X - \theta X'\mathbf{1} = 0$ soit :

(1) $E(R^*) - 2\lambda\sigma^{*2} - \theta = 0$

En prémultipliant CPO par $\mu\Omega^{-1}$: $\mu'\Omega^{-1}\mu - 2\lambda\mu'\Omega^{-1}\Omega X - \theta\mu'\Omega^{-1}\mathbf{1} = 0$ soit :

(2) $a - 2\lambda\mu^* - \theta b = 0$ avec $a \overset{\text{def}}{=} \mu'\Omega^{-1}\mu$ et $b \overset{\text{def}}{=} \mu'\Omega^{-1}\mathbf{1}$

En prémultipliant CPO par : $\mathbf{1}'\Omega^{-1}$: $\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mu - 2\lambda\mathbf{1}'\Omega^{-1}\Omega X - \theta\mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1} = 0$ soit :

(3) $b - 2\lambda - c = 0$ avec $c \overset{\text{def}}{=} \mathbf{1}'\Omega^{-1}\mathbf{1}$

A partir de (2) et (3), on peut écrire : $\lambda = \dfrac{ac - b^2}{2[c\mu^* - b]}$ et $\theta = \dfrac{b\mu^* - a}{c\mu^* - b}$

En remplaçant dans (1), on obtient l'équation de la frontière efficiente dans le plan (σ, μ) :

(FE) $$\sigma^{*2} = \frac{1}{c} + \frac{c}{ac - b^2}\left(\mu^* - \frac{b}{c}\right)^2$$ *cqfd.*

Conséquences :

(FE) $$\sigma^{*2} = \frac{1}{c} + \frac{c}{ac-b^2}\left(\mu^* - \frac{b}{c}\right)^2$$

On peut montrer que :
si les μ_i ne sont pas tous égaux entre eux,
alors ac-b^2 >0

D'où

- **les caractéristiques du portefeuille de variance minimale** :

$$\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{c}} \quad \text{et} \quad \mu_V = \frac{b}{c} \quad \text{et} \quad X_V = \frac{1}{c}\Omega^{-1}\mathbf{1}$$

- **une autre écriture de (FE)** : $\sigma^{*2} = \sigma_V^2 + \left(\frac{\mu^* - \mu_V}{\alpha}\right)^2$

- **les caractéristiques d'un portefeuille efficient** :

(prémultiplier (CPO) par Ω^{-1} donne : $X^* = \frac{1}{2\lambda}\Omega^{-1}(\mu - \theta\mathbf{1})$

soit :

$$X^* = G + H\mu^* \quad \text{avec} \quad G = \frac{1}{ac-b^2}\Omega^{-1}(a\mathbf{1} - b\mu) \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{ac-b^2}\Omega^{-1}(c\mu - b\mathbf{1})$$

→ on en déduit le portefeuille efficient donnant une rentabilité attendue μ*.

ANNEXE 2 : EXERCICES

Exercice 1 : Choisir entre des portefeuilles mutuellement exclusifs

Où investir parmi un actif sans risque et trois fonds risqués mutuellement exclusifs...

Actif	rentabilité attendue	volatilité
sans risque	3 %	0 %
SICAV A	5 %	6 %
SICAV B	10 %	10 %
SICAV C	13 %	20 %

a- … si l'objectif est d'avoir une rentabilité attendue de 9 %?
b- … si l'objectif est d'avoir un risque de portefeuille de 15 %?

Le choix de la SICAV dépend-il de l'objectif ?

Exercice 2 : le MEDAF

Le taux des bons du Trésor est de 4% et la rentabilité attendue du portefeuille de marché est de 12%. Sur la base du MEDAF :

a- Montrez sur un graphique comment la rentabilité attendue varie avec le bêta.
b- Combien valent la prime de risque du marché et le bêta du portefeuille de marché ?
c- Quelle est la rentabilité exigée pour un investissement de bêta égal à 1,5 ?
d- Si le marché attend une rentabilité de 11,2% sur l'action A, quel est son bêta ?

Exercice 3 : Choisir une allocation d'actifs :

Un gestionnaire de fonds gère, pour le compte d'un client, un portefeuille ainsi composé :

fonds	montant	rentabilité attendue	risque
Actions (parfaitement diversifié)	3 M€	6 %	17 %
Bons du Trésor (sans risque)	2 M€	5 %	

a- Quels sont la rentabilité et le risque du portefeuille ?
b- L'aversion au risque (au sens de Markowitz) du client est de 1,5. Le client préfère-t-il investir tout en actions ou tout en bons du Trésor ?
c- Comment composer le portefeuille pour ce client ?

Exercice 5 :
La conjoncture économique l'an prochain pourra être « croissance » avec une probabilité de 50 %, ou « récession » avec une probabilité de 50 %.

(a) La valeur des actions d'entreprises de type « S » est affectée uniquement par du risque systématique. Leur rentabilité est prévue à 40 % en cas de croissance, -20 % en cas de récession.
Quelles sont la rentabilité attendue et la volatilité d'une action d'entreprise de type « S » ?
Quelles sont la rentabilité attendue et la volatilité d'un portefeuille composé exclusivement de 10 (ou de N) actions d'entreprises de type « S » ?

(b) La valeur des actions d'entreprises de type « I » sont affectées uniquement par du risque idiosyncrasique. Quelle que soit la conjoncture, leur rentabilité est prévue à 35 % ou -25 %, de manière équiprobable.
Quelles sont la rentabilité attendue et la volatilité d'une action d'entreprise de type « I » ?
Quelles sont la rentabilité attendue et la volatilité d'un portefeuille composé exclusivement de 10 (ou de N) actions d'entreprises de type « I » ?

Exercice 6 :

Mme P. a investi dans le Fonds Oméga, composé d'actifs divers, de rentabilité attendue 15 % et de volatilité 20 %.

Elle détient aussi des Bons du Trésor sans risque, rémunérés à 3 %.

Son conseiller lui recommande d'acheter des parts de SCPI, de rentabilité attendue 9 %, de volatilité 10 % et ayant une corrélation de 0,1 avec le fonds Oméga.

Pensez-vous qu'elle doive suivre cette recommandation ?