

## 2- Le choix rationnel face au risque

### Objectif :

savoir expliquer, appliquer, critiquer, les critères de choix rationnel face au risque  
savoir expliquer les principaux concepts mathématiques et économiques utilisés

variables aléatoires ; fonction de répartition, densité ; Espérance mathématique, variance ; écart-type, Asymétrie (skewness), Aplatissement (kurtosis), quantiles, Value-at-risk d'un portefeuille ; Loi de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, normale, log-normale ; Covariance ; Coefficient de corrélation ; état de la nature ; biens contingents ; paradoxe de Saint-Pétersbourg ; Théorème de l'Utilité Espérée (Von Neumann et Morgenstern) ; Aversion pour le risque ; degré d'aversion absolue ou relative pour le risque ; riscophobe, riscophile, neutre au risque ; équivalent-certain d'un risque, prime de risque, prix d'achat, prix de vente ; Représentation graphique de la prime de risque et de l'équivalent-certain ; fonction d'utilité DARA, CRRA ; mutualisation, diversification et partage des risques ; théorème d'Arrow et Lind ; Dominance stochastique d'ordre un, d'ordre deux ; étalement de la distribution à moyenne constante (*mean preserving spread*) ; Paradoxe d'Allais ; Axiome d'indépendance ; règle de Bayes ; finance comportementale ; biais cognitifs ; théorie des perspectives (prospect theory) de Kahneman et Tversky, aversion pour les pertes ; paradoxe d'Ellsberg, aversion à l'ambiguïté.

## **Plan :**

- 1- LE RISQUE
- 2- LE CHOIX RATIONNEL EN SITUATION DE RISQUE
- 3- MUTUALISATION, DIVERSIFICATION ET PARTAGE DES RISQUES
- 4- PARMIS DEUX « RICHESSES », QUELLE EST LA « PLUS RISQUÉE » ?
- 5- ASSURANCE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE
- 6- PARADOXE D'ALLAIS ET AXIOME D'INDÉPENDANCE
- 7- FINANCE COMPORTEMENTALE

## Bibliographie :

Varian, *Introduction à la microéconomie*, De Boeck

Delsart & Vaneecloo (2010), *Probabilités, variables aléatoires, lois classiques*, Presses Universitaires du Septentrion

Pradier (2006), *La notion de risque en économie*, collection Repères, La découverte

Moureau & Rivaud-Danset (2004), *L'incertitude dans les théories économiques*, collection Repères, La découverte

Eeckhoudt, Gollier & Schlessinger (2005) *Economic and Financial Decisions under Risk.*, Princeton University Press

Gravelle & Rees (2004), *Microeconomics*, Prentice Hall

Eber & Willinger (2012), *L'économie Expérimentale*, collection Repères, La découverte

Barberis & Thaler (2003), « A Survey of behavioral finance », in G.M. Constantinides, M. Harris & R. Stulz, *Handbook of the Economics of Finance*, Elsevier

Erta & al. (2013), *Applying Behavioural Economics at the Financial Conduct Authority*, FCA occasional-paper n°1

Coulon (2015), *Guide pratique de la finance comportementale : Pour l'investisseur individuel et le conseiller financier*, Gualino

# 1- LE RISQUE

« le futur est incertain »... : différentes *circonstances* sont possibles  
plusieurs alternatives sont probables...

L'incertitude / le risque est au cœur de la logique financière.

Évaluer un actif = actualiser des cash-flows futurs... inconnus

→ prévoir / se tromper

- risque économique : variabilité des cash-flows d'exploitation
- risque financier (de détresse financière) : lié à l'endettement

Épargner = Composer un portefeuille d'actifs → choisir un « profil de risque ».

Gérer le risque : décider quel « niveau de risque » prendre,  
par quels moyens y parvenir

## 1.1- Exemples de représentation du risque

### Assurance dommages :

Le Capitaine Haddock est propriétaire du château de Moulinsart et dispose également de 100 k€ sur son compte en banque.

Le château est estimé à 3400 k€, mais il peut être endommagé par une expérience du Professeur Tournesol. Il y a une probabilité de 1% que le château subisse un dommage de 1000 k€, et une probabilité de 99% de ne subir aucun dommage.

Le Capitaine Haddock peut souscrire un contrat d'assurance, qui lui verse en cas de dommage une indemnité  $K$  ( $K$  est inférieur à 1000 k€), moyennant le paiement d'une prime  $\gamma K$  proportionnelle à l'indemnité.

Décrire la richesse du Capitaine Haddock selon que le château est assuré ou non...

## Assurance-vie :

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

Un seul parmi deux états se produira dans 10 ans

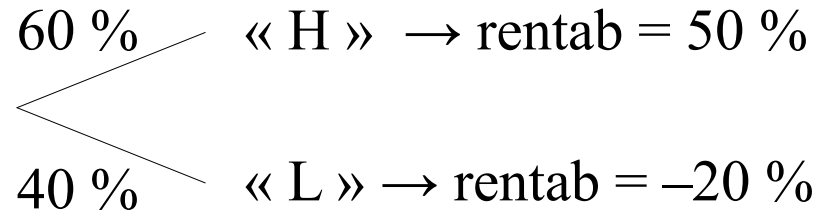
- bonne conjoncture (H), avec probabilité  $p = 60\%$  ;
- mauvaise conjoncture (L), avec probabilité  $(1 - p) = 40\%$ .

Deux actifs disponibles :

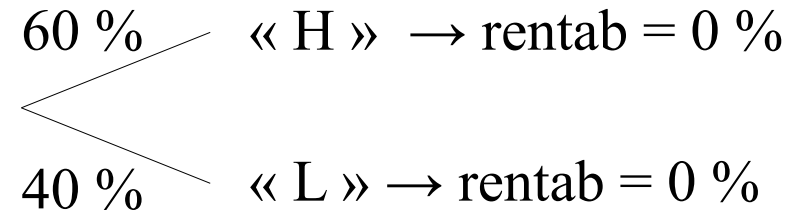
- Un fonds en UC rapporte soit 50 % (avec proba 60%) soit -20 % (proba 40%).
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

## Représentations sous forme de loterie :

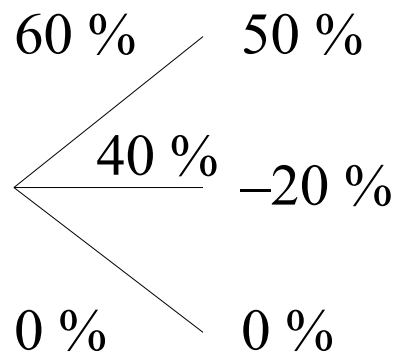
Investir dans fonds *UC*



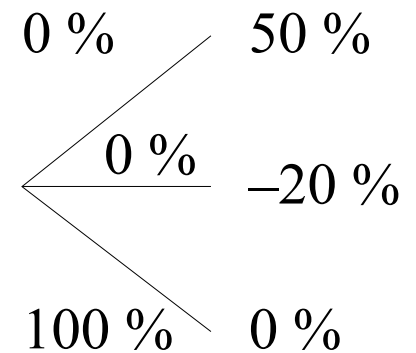
Investir dans fonds *euro*



Investir dans *UC*



Investir dans *euro*

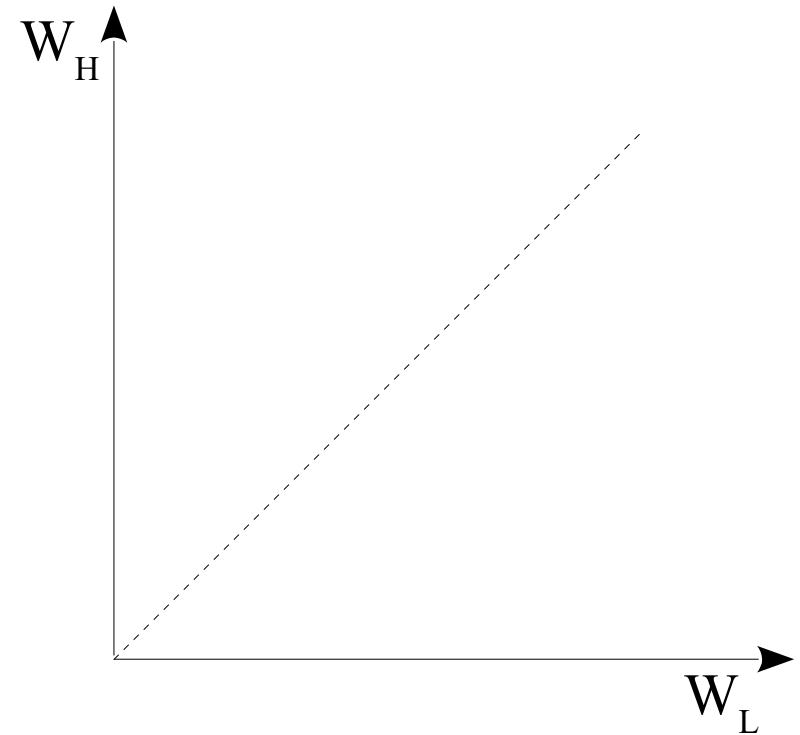


→ choisir une action = choisir une distribution de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles

Il décide de placer une proportion  $x$  en UC (et  $1 - x$  en fonds euros).

Quelle est leur « richesse » au moment de la retraite ?

richesse...	si $x = 0$	si $0 < x < 1$	si $x = 1$
état H			
état L			
moyenne			
écart-type			





## 1.2- En finance : représentation du risque par une « loterie monétaire »

En finance : représentation du risque par une « **loterie monétaire** »

- monétaire : biens futurs = quantités de monnaie (richesses, cash-flows)
- loterie = perspective conditionnelle : variable aléatoire réelle
  - des valeurs possibles
  - des probabilités d'occurrence de ces valeurs → fonction de répartition

Le décideur doit agir... prendre sa décision préférée (investissement...)

- représenter chaque décision comme une « loterie »
- caractériser les préférences sur les loteries

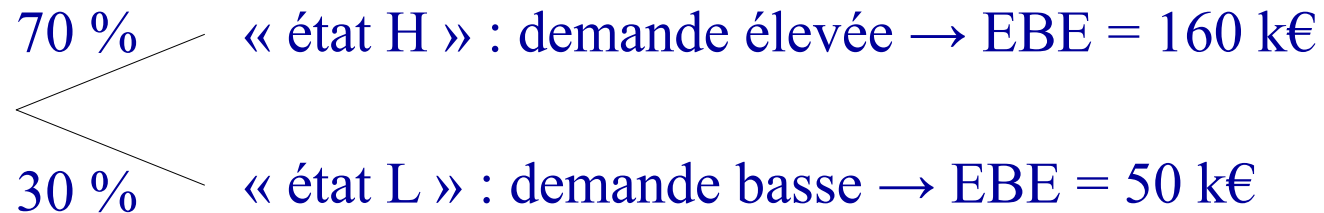
**Source du « risque » = « états de la nature »**

**un état de la nature** = une combinaison de valeurs des différentes variables décrivant l'environnement du décideur

- l'ensemble des états de la nature est exhaustif
- les états de la nature sont mutuellement exclusifs
- les états de la nature sont hors de contrôle du décideur
- l'ensemble des états de la nature est connaissance commune
- chaque décideur reconnaît l'état de la nature qui se réalise
- chaque décideur assigne une distribution de probabilité aux états de la nature qui obéit aux lois usuelles :
  - $0 \leq \text{Pr}(\text{état } s) \leq 1$
  - $\text{Pr}(\text{état } s) = 1 \rightarrow$  il est certain que l'état  $s$  se produira
  - $\text{Pr}(\text{état } s) = 0 \rightarrow$  il est certain que l'état  $s$  ne se produira pas
  - $\text{Pr}(\text{état } s \text{ ou état } s') = \text{Pr}(\text{état } s) + \text{Pr}(\text{état } s')$  ;  $\text{Pr}(\text{état } s \text{ et état } s') = 0$
  - un au moins des états doit se produire :  $\sum \text{Pr}(\text{état } s) = 1$

## 1.3- Applications

**Application 1** : Une entreprise a besoin de 100 k€ pour 1 an. Son EBE est aléatoire



→ EBE « espéré » = ... écart-type de l'EBE =

Banque : coût des ressources (rémunération des dépôts) : 2 %

Banque et entreprise négocient un **contrat de prêt (contrat de dette)** :

- taux d'intérêt :  $r$  → l'entreprise paye  $(1+r) \times 100\text{k€}$  si EBE suffisant
- responsabilité limitée : l'entreprise est liquidée et la banque saisit 50k€ si l'emprunteur ne peut pas rembourser
- pas de coût de vérification du résultat
- coût de faillite (pour les emprunteurs) : 70k€ (rémunération non versée, frais de procédure, coût des emprunts futurs, ...)

état	Résultat net Entreprise	Résultat net Banque	proba
H : prêt remboursé	$(60 \% - r) \times 100\text{k€}$	$(r - 2 \%) \times 100\text{k€}$	70 %
L : prêt non remboursé	-70k€	-52k€	30 %
Résultat net moyen (espérance mathématique)	...	...	
Écart-type du résultat net	...	...	

$r = 25 \%$

H : prêt remboursé	35k€	23k€	70 %
L : prêt non remboursé	-70k€	-52k€	30 %
Résultat net moyen (espérance mathématique)	3,5k€	0,5k€	
Écart-type du résultat net	48,12k€	34,37k€	

## Application 2 :

Mme M peut avoir besoin de dépenser sa richesse dans un an ou dans deux ans.

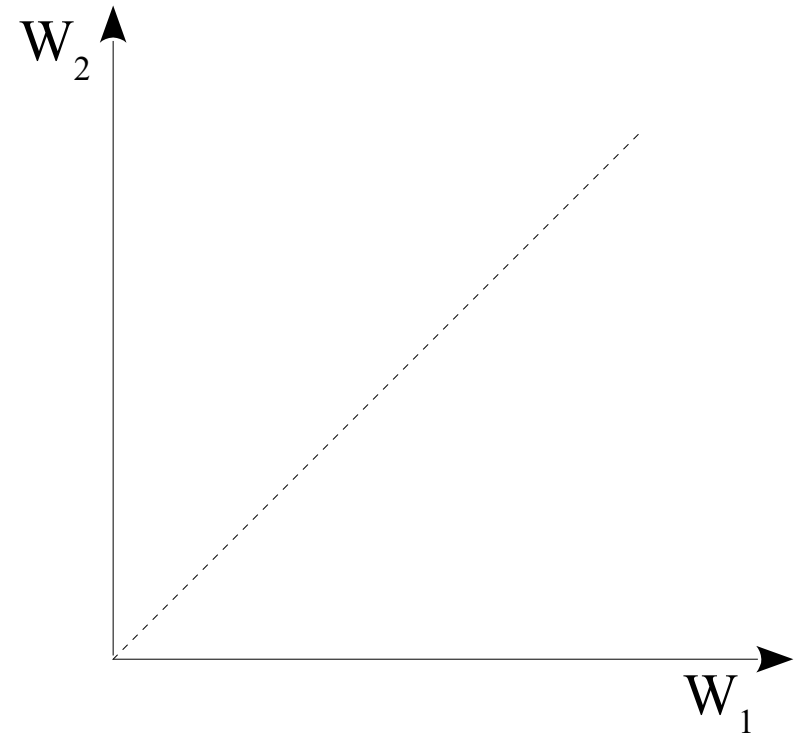
Elle investit  $1 - x$  dans un actif « illiquide » et  $x$  dans un actif « liquide »

- actif illiquide, maturité 2 ans : rentabilité  $-100\%$  à un an,  $+50\%$  à deux ans
- actif liquide : rentabilité  $0\%$

Au moment d'investir, Mme M sait qu'elle a une proba :

- $20\%$  d'avoir besoin de dépenser dans un an (« précoce »)
- $80\%$  d'avoir besoin de dépenser dans deux ans (« tardive »)

richesse utile...	dans un an	dans deux ans
« précoce »		
« tardive »		
moyenne		
écart-type		



## 2- LE CHOIX RATIONNEL EN SITUATION DE RISQUE

### 2.1- Deux exemples

#### Exemple 1 : Choisir entre deux « loteries »

Choix 1 :

A	Rapporte • 100 M € à coup sûr	Choix :
B	rapporte • 500 M € avec une probabilité de 98%, • 0 € avec une probabilité de 2% ;	

Choix 2 :

C	rapporte <ul style="list-style-type: none"><li>• 100 M € avec une probabilité de 1%,</li><li>• 1 € avec une probabilité de 99%,</li></ul>	Choix :
D	rapporte <ul style="list-style-type: none"><li>• 500 M € avec une probabilité de 0,98%,</li><li>• 1 € avec une probabilité de 99%,</li><li>• 0 avec une probabilité de 0,02% ;</li></ul>	

Synthèse des choix	A	B	total
C			
D			
total			



## Exemple 2 : Choisir (encore) entre deux (autres) « loteries » :

Question 1 :

Supposons que vous êtes plus riches de 300 €. Que choisissiez-vous ?

A'	<ul style="list-style-type: none"><li>• un gain certain de 100€</li></ul>	Choix :
B'	<ul style="list-style-type: none"><li>• 50 % de chance de gagner 200€</li><li>• 50 % de chance de ne rien gagner.</li></ul>	

## Question 2 :

Supposons que vous êtes plus riches de 500 €. Que choisiriez-vous ?

C'	<ul style="list-style-type: none"><li>• une perte certaine de 100€</li></ul>	Choix :
D'	<ul style="list-style-type: none"><li>• 50 % de chance de perdre 200€</li><li>• 50 % de chance de ne rien perdre.</li></ul>	

Synthèse :

	C'	D'	total
A'			
B'			
total			

## 2.2- Le « paradoxe de Saint-Pétersbourg »

Bernoulli (1738)

### VERSION 1 :

Un mendiant ne possède qu'un billet de loterie qui rapporte :

- 1 millions de RUB avec une probabilité de 50 %
- 0 avec une probabilité de 50 %

Le mendiant accepte de le vendre à un riche marchand contre 10000 RUB.

**A-t-il eu raison ?**

## VERSION 1 :

Un mendiant ne possède qu'un billet de loto qui rapporte :

- 1 millions de RUB avec une probabilité de 50 %
- 0 avec une probabilité de 50 %

Le mendiant accepte de le vendre à un riche marchand contre 10000 RUB.

**A-t-il eu raison ?**

**Question → quel critère d'évaluation du billet de loterie ?**

Critère de Blaise **Pascal** :

- le « juste prix » est l'espérance mathématique du gain procuré par le billet
- ainsi, en moyenne, le bénéfice net du parieur est nul

<b>Critère</b>	<b>Utilité de la richesse en gardant...</b>	<b>... en vendant</b>	<b>choix</b>
Pascal	$50\% \times 1000k + 50\% \times 0 = 500k$	10k	garde

## **VERSION 2 :**

On jette une pièce  $N$  fois jusqu'à obtenir « pile ». Le parieur gagne alors  $2^N$  RUB. A la cour de Saint-Pétersbourg, vers 1730, Nicolas Bernoulli n'a trouvé personne prêt à parier plus de 20 RUB.

→ « paradoxe » eu égard au *critère de décision de Pascal* (espérance de richesse)

## VERSION 2 :

On jette une pièce  $N$  fois jusqu'à obtenir « pile ». Le parieur gagne alors  $2^N$  RUB. A la cour de Saint-Pétersbourg, vers 1730, Nicolas Bernoulli n'a trouvé personne prêt à parier plus de 20 RUB.

→ « paradoxe » eu égard au *critère de décision de Pascal* (espérance de richesse)

séquence	P obtenu au lancer n°...	gain	probabilité
P	1	2	1/2
FP	2	$2^2$	1/4
FFP	3	$2^3$	1/8
FFFF.....FFFFP ← $N-1$ fois →	$N$	$2^N$	$1/2^N$

$$\text{espérance du gain} = \frac{1}{2} \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^N \times 2^N + \dots = +\infty$$

## Résolution du paradoxe :

- Daniel Bernoulli (1738) :  
critère de décision = espérance d'une fonction de la richesse  
→ logarithme népérien

avec une richesse initiale de 1000, le prix du billet max. serait 10,95

- Gabriel Cramer (même époque) → racine carrée

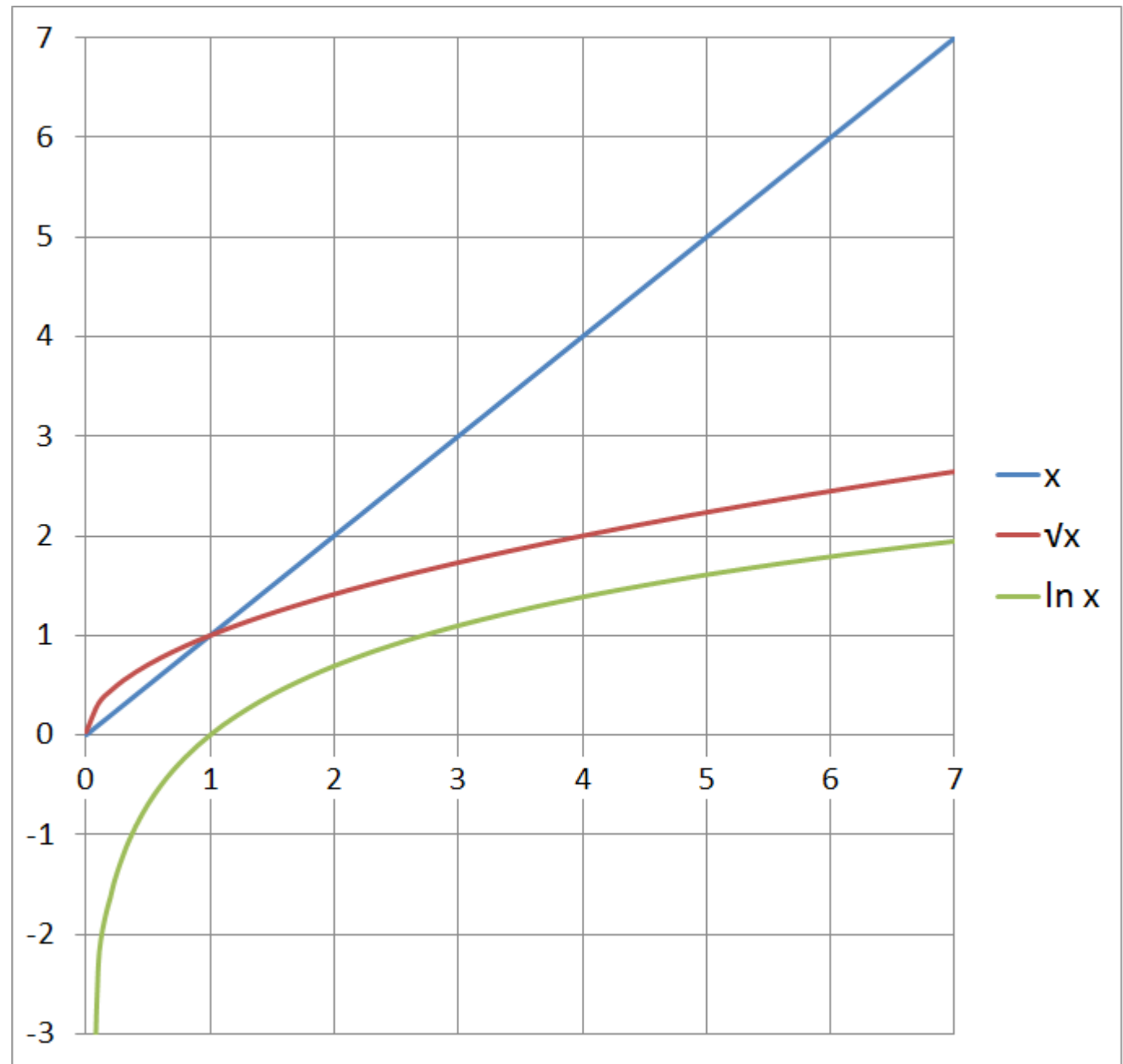
avec une richesse initiale de 1000, le prix du billet max. serait 12,93

→ solution de Bernoulli axiomatisée par **Von Neumann et Morgenstern** (1944)  
« **VNM** »

(adoptée par Friedman, Savage, Samuelson)



représentation de  
 $x$ ,  $\sqrt{x}$  et  $\ln x$   
en fonction de  $x$



## 2.3- Choix rationnel selon VNM : maximiser l'utilité espérée

### **Théorème de l'Utilité Espérée (Von Neumann – Morgenstern) :**

Si les préférences d'un décideur sur l'ensemble des loteries vérifient quelques *axiomes* [...], alors il existe une fonction d'utilité (à valeurs réelles) définie sur l'ensemble des loteries, représentant les préférences, ayant la forme d'une « espérance d'utilités » des lots.

$$U(L) = E[u(l)]$$

$U(.)$  = utilité de la loterie ;

$u(.)$  = utilité des lots (fonction d'utilité de VNM)

## **Axiomes :**

### **axiomes sur la manière de comprendre les loteries :**

- loterie = des lots associés à des probabilités (variable aléatoire)
- Proba de lot = 1  $\rightarrow$  lot certain
- indifférence à l'ordre de présentation des lots
- réduction des loteries composées (absence d'illusion stochastique) :  
application de la règle de Bayes

### **axiomes sur les préférences :**

- axiome de complétude, réflexivité et transitivité  $\rightarrow$  préférences « rationnelles »
- axiome de continuité  $\rightarrow$  préférences exprimées sous forme de fonction d'utilité
- axiome d'indépendance  $\rightarrow$  fonction d'utilité de la forme espérance d'utilités

Loterie  $L$  donne des lots  $l_i$  avec probabilité  $p_i$  :

→ critères de Pascal ? De Bernoulli ? De Cramer ?

critère	$u(l)$	$U(L)$
Pascal	$u(l) = l$	$U(L) = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_N l_N$
Bernoulli	$u(l) = \ln(l)$	$U(L) = p_1 \ln(l_1) + p_2 \ln(l_2) + \dots + p_N \ln(l_N)$
Cramer	$u(l) = \sqrt{l}$	$U(L) = p_1 \sqrt{l_1} + p_2 \sqrt{l_2} + \dots + p_N \sqrt{l_N}$

→ la décision du mendiant (que faire du billet de loto) ?

	Garder le billet	Vendre le billet
Richesse (loterie)	1 M avec proba 50 %, 0 avec proba 50 %	10k avec proba 100 %

<b>Crière</b>	<b>Utilité de la richesse en gardant...</b>	<b>... en vendant</b>	<b>choix</b>
Pascal	$50\% \times 1000k + 50\% \times 0 = 500k$	$10k$	garde
Bernoulli	$50\% \times \ln(1000k) + 50\% \times \ln(0) = -\infty$	$\ln(10k) \approx 9,21$	vend
Cramer	$50\% \times \sqrt{1000k} + 50\% \times \sqrt{0} = 500$	$\sqrt{10k} = 100$	garde

## Application :

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

- Un fonds en UC rapporte soit 50 %, soit  $-20$  %.
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

choix « tout ou rien »

critère	$u(l)$	100 % UC	100 % euro
Pascal	$u(l) = l$		
Bernoulli	$u(l) = \ln(l)$		
Cramer	$u(l) = \sqrt{l}$		

Quelle est la composition optimale de leur portefeuille ?

## 2.4- Aversion pour le risque et neutralité au risque (cas d'un risque additif)

- riscophobe = qui a de l'aversion pour le risque (*risk-averse*) :  $u(.)$  concave
- riscophile = qui aime le risque (*risk-lover*) :  $u(.)$  convexe
- neutre au risque = indifférent (*risk-neutral*) :  $u(.)$  linéaire

**un décideur a de l'aversion pour le risque s'il préfère posséder l'espérance des lots d'une loterie avec certitude plutôt que la loterie elle-même :**

$$u(w_0 + E[L]) > E[u(w_0 + L)]$$

ou :

**un décideur a de l'aversion pour le risque s'il n'aime pas toute loterie dont l'espérance mathématique des lots est nulle (risque de moyenne nulle) :**

$$u(w_0) > E[u(w_0 + z)] \text{ avec } Ez = 0$$

→ la concavité de  $u(.)$  détermine l'attitude à l'égard du risque

→ cf. inégalité de Jensen :  $f(x)$  concave  $\leftrightarrow f(E[X]) > E[f(X)]$

→ mesurer l'**aversion** pour le risque par le « degré de concavité » de  $u(.)$  :

Coefficient d'aversion absolue pour le risque :  $A(w_0) = -u''(w_0)/u'(w_0)$

- indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1€, ou 1\$...

Coefficient d'aversion relative pour le risque :  $R(w_0) = \frac{-w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)} = w_0 A(W_0)$

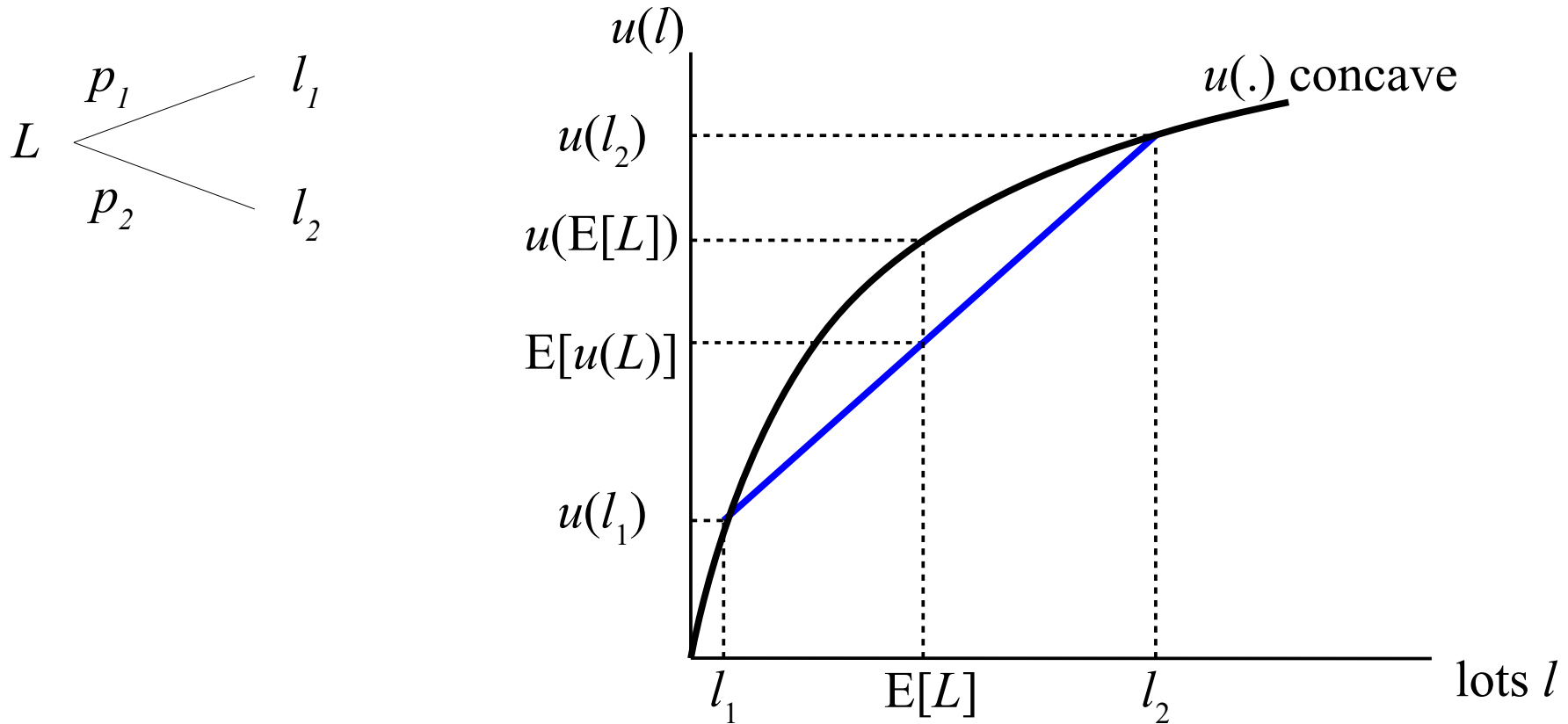
- l'opposé de l'élasticité de l'utilité marginale
- indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1 %
- n'a pas d'unité ( $\neq$  aversion absolue pour le risque)

NB :

**tolérance au risque = inverse de l'aversion pour le risque**



## Représentation graphique



- riscophobe = qui a de l'aversion pour le risque (*risk-averse*) :  $u(.)$  concave
- riscophile = qui aime le risque (*risk-lover*) :  $u(.)$  convexe
- neutre au risque = indifférent (*risk-neutral*) :  $u(.)$  linéaire

→ graphique ?

## 2.5- Équivalent certain, prix d'achat/ de vente d'une loterie, prime de risque

**équivalent-certain** de la loterie  $L$  pour une richesse initiale  $w_0$  :

la somme  $C$  qui procure la même utilité que la loterie :  $u(w_0 + C) = E[u(w_0 + L)]$

**prime de risque** de la loterie  $L$  pour une richesse initiale  $w_0$  : la différence  $\pi$  entre l'espérance et l'équivalent-certain de  $L$  :  $\pi = E[L] - C$

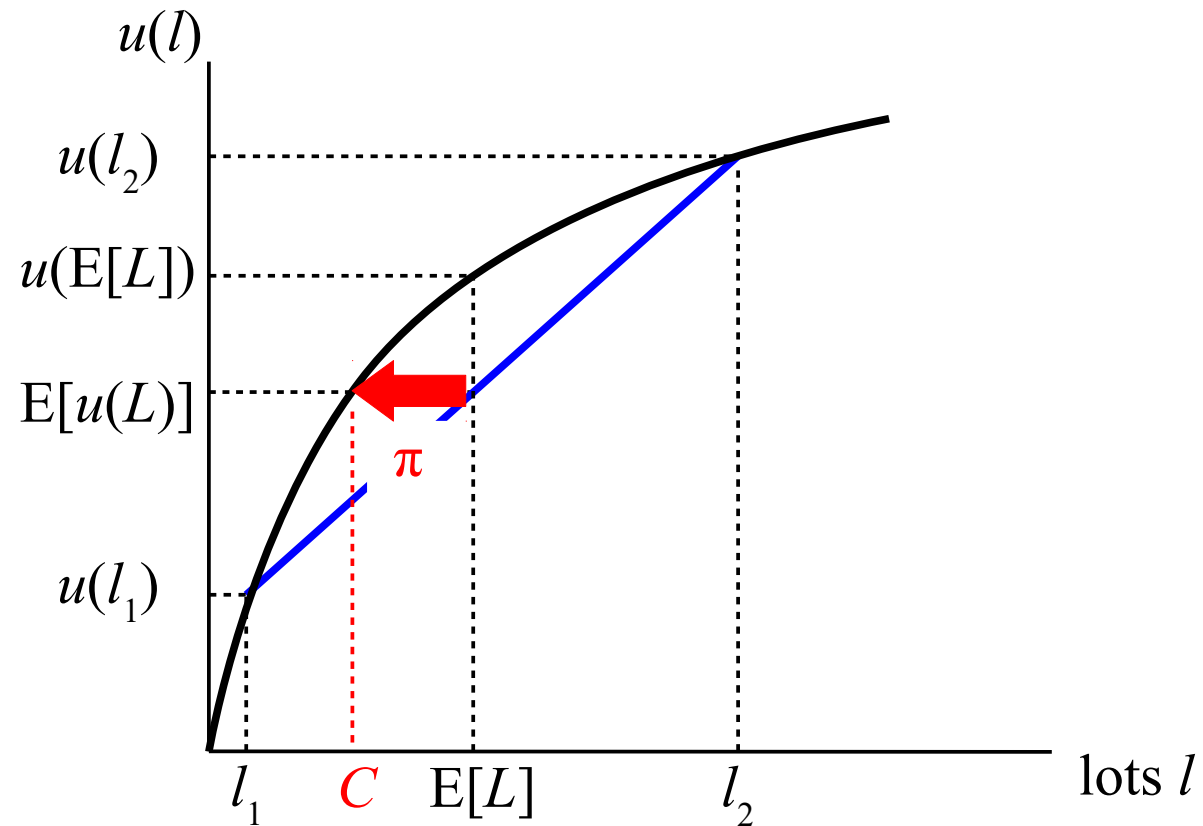
$$\rightarrow u(w_0 + E[L] - \pi) = E[u(w_0 + L)]$$

**prix d'achat** : la somme certaine  $PA$  que le décideur est prêt à payer pour obtenir la loterie :  $u(w_0) = E[u(w_0 + L - PA)]$

**prix de vente** : la somme certaine  $PV$  que le décideur est prêt à accepter pour céder la loterie :  $E[u(w_0 + L)] = u(w_0 + PV)$

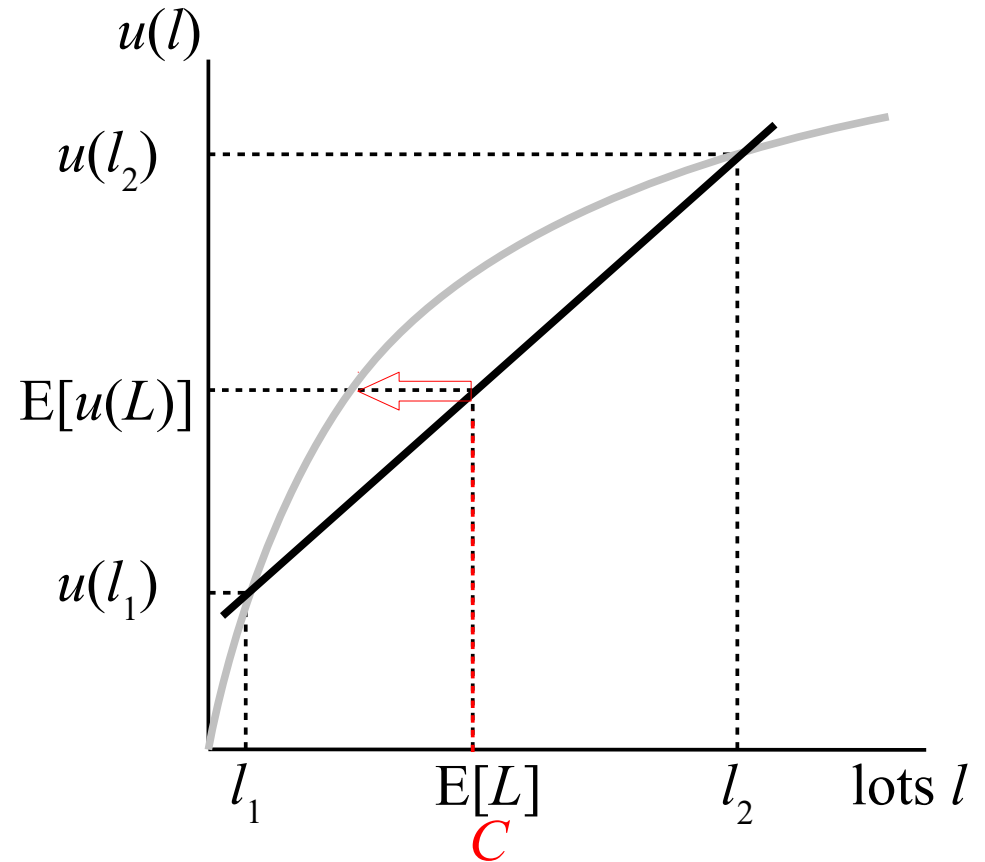
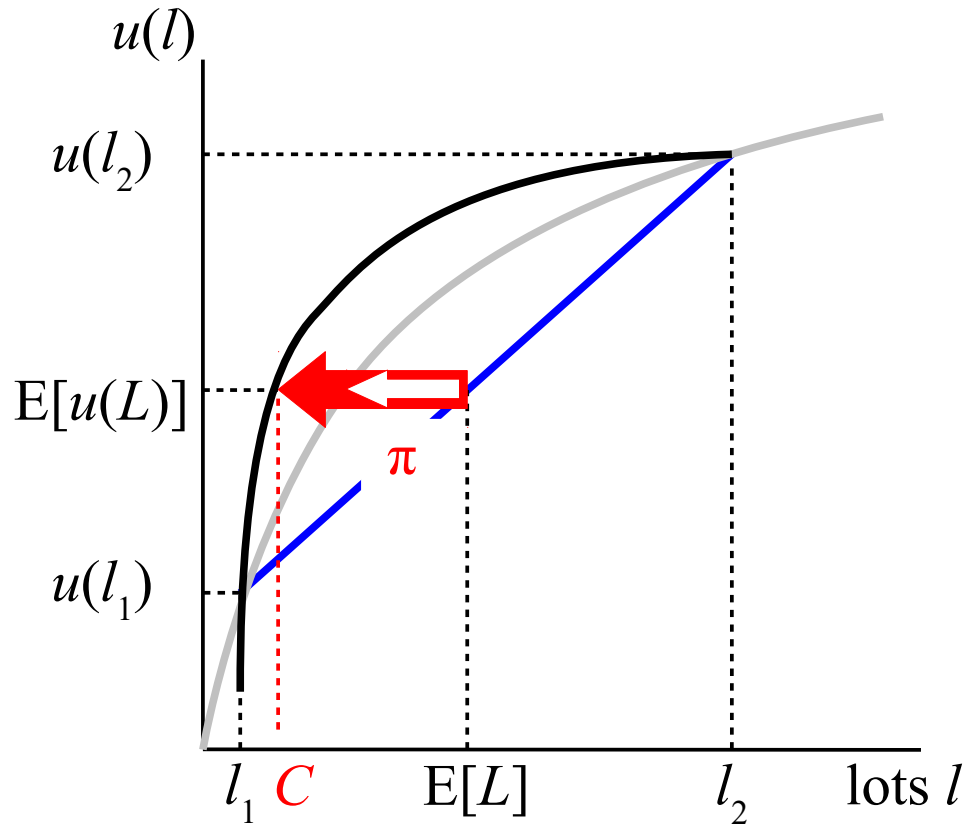
$$\rightarrow PV = E[L] - \pi$$

# Représentation de la prime de risque et de l'équivalent-certain



### fonction d'utilité plus concave

### fonction d'utilité linéaire



Prime de risque plus élevée  
aversion pour le risque plus forte

Prime de risque nulle  
neutralité au risque

## Interprétation de la prime de risque : le « coût du risque »

**La somme que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur**  
(somme positive → riscophobe)

cas d'un aléa (additif) affectant la richesse :  $w_0 + L$

- $L = E(L) + z$ , avec  $E(z) = 0$
- $z =$  « risque pur » (valeur moyenne nulle)

se débarrasser de  $z$  en payant  $\pi$  :

- la richesse devient  $w_0 + E[L] - \pi$
- acceptable si :  $u(w_0 + E[L] - \pi) = E[u(w_0 + L)]$

## Le supplément à payer à un décideur pour l'inciter à accepter un risque pur

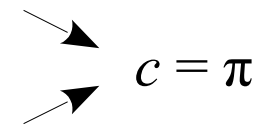
cas d'une richesse initiale certaine

- ajouter un « risque pur » (valeur moyenne nulle),  $z \rightarrow$  refus
- ajouter un risque pur + une somme certaine  $c$  ?

• acceptable si  $u(w_0) = E[u(w_0 + z + c)]$

• Prime de risque attachée à  $w_0 + z + c$  :

$\pi$  t. q.  $u(w_0 + c - \pi) = E[u(w_0 + z + c)]$



$c = \pi$

## 2.6- Application :

On considère une richesse composée d'une partie certaine  $w=25$  et d'une partie aléatoire  $X$  valant  $-9$  avec une probabilité  $0,4$  et  $11$  avec une probabilité  $0,6$  (on a donc  $E(X)=3$  et  $V(X)=96$ ).

a. On considère un décideur neutre au risque .

- i. Pour lui, quel est l'équivalent certain de cette richesse ?
- ii. A quel prix est-il disposé à vendre  $X$ , la partie aléatoire de la richesse ?
- iii. A quel prix est-il disposé à acheter  $X$  s'il possède une richesse certaine égale à  $25$  ?

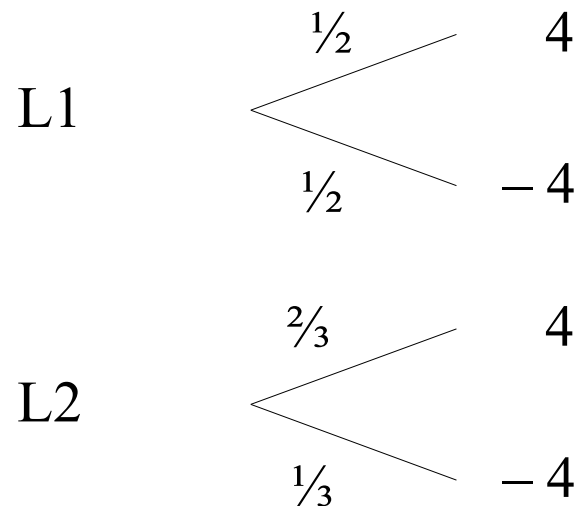
b. On considère un décideur riscophobe dont les préférences sont représentées par la fonction racine carrée :

- i. Montrez que l'équivalent certain de cette richesse vaut  $27,04$ .
- ii. Montrez qu'il est disposé à vendre  $X$  à un prix de  $2,04$ .
- iii. Quelle est la prime de risque qu'il attache à cette richesse ?
- iv. Quelle interprétation de la prime de risque à la lumière de la différence entre les prix de vente trouvés en a et en b.

## Question de réflexion :

« L'aversion pour le risque est le fait de préférer ne pas jouer plutôt que de risquer de perdre en jouant ». Un bon résumé à retenir, ou une erreur à oublier ?

Pour y réfléchir... un « joueur » ayant une fonction d'utilité de Cramer, dispose d'une richesse initiale de 5. On lui propose de jouer gratuitement aux deux « loteries » suivantes. Accepte-t-il ?



## 2.7- Qui a le plus d'aversion pour le risque ?

Décideur «  $U$  » avec fonction d'utilité  $u(\cdot)$  et une richesse certaine  $w_0$

- accepte de prendre un risque  $x$  (avec  $E(x) = \mu$  et  $V(x) = \sigma$ ) si
$$E[u(w_0 + x)] \geq u(w_0)$$
- **Comment un changement de  $u(\cdot)$  affecte-t-il la décision ?**

Comparer décideur «  $U$  » et décideur «  $V$  » avec fonction d'utilité  $v(\cdot)$  et même richesse certaine  $w_0$  :

- «  $V$  » une aversion pour le risque plus marquée (est plus riscophobe) que «  $U$  » si :
- la prime de risque pour tout risque est plus grande pour «  $V$  » que pour «  $U$  »
  - pour tout  $w$  ,  $A_V(w) \geq A_U(w)$
  - $v(\cdot)$  est une transformation concave de  $u(\cdot)$  : il existe une fonction  $f$  croissante concave telle  $\forall w, v(w) = f(u(w))$



## Application : qui, de Bernoulli et de Cramer, est le plus riscophobe ?

Comparez les degrés d'aversion absolue pour le risque

Montrez que, pour une richesse initiale de 4000, confrontés à un investissement risqué  $x$  produisant 0 avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  et 8000 avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  :

- pour Bernoulli, l'équivalent-certain de  $x$  vaut 3464,1 ;  
la prime de risque vaut 535,9
- pour Cramer, l'équivalent-certain de  $x$  vaut 2928,5 ;  
la prime de risque vaut 1071,5

**Remarque (approximation d'Arrow-Pratt) :** pour de « petits » risques, on peut approximer la prime de risque  $\pi$  associée à la richesse  $w_0 + x$  par :

$$\pi \approx \frac{1}{2} \sigma^2 A(w_0)$$

Qu'en est-il dans le cadre de l'exemple précédent. ?

- **Comment un changement de  $w_0$  affecte-t-il la décision ?**

Intuitivement (selon Arrow) :

+ riche  $\rightarrow$  – moins disposé à payer pour éliminer un risque donné

$\uparrow w_0 \rightarrow \downarrow \pi(w_0)$

on peut montrer que la prime de risque associée à la richesse  $w_0 + x$  décroît avec  $w_0$  si et seulement si l'aversion absolue pour le risque décroît avec  $w_0$

- effet de la richesse sur l'aversion absolue pour le risque : on qualifie de fonction d'utilité à aversion absolue pour le risque décroissante (« decreasing absolute risk aversion », **DARA**) les fonctions d'utilité ayant cette propriété.

on suppose généralement (Arrow) que l'aversion relative pour le risque ne diminue pas quand la richesse augmente

- ex : fonction d'utilité à aversion absolue pour le risque constante (« constant relative risk aversion », **CRRA**)

Application :

- $u(l)=\ln(l)$  et  $v(l)=\sqrt{l}$  sont-elles DARA ou CRRA ?

- Et  $u(w)=\frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}$  ?

## 2.8- Approximation de la prime de risque absolu :

développement limité au voisinage de  $w_0$  de :

$$u(w_0 - \pi_A) = E[u(w_0 + x)]$$

(donc on considère des « petits » risques)

à l'ordre 1 :

$$u(w_0 - \pi_A) \approx u(w_0) - \pi_A u'(w_0)$$

à l'ordre 2 :

$$E[u(w_0 + x)] \approx E[u(w_0) + x u'(w_0) + \frac{1}{2} x^2 u''(w_0 + \mu)]$$

$$\text{soit : } E[u(w_0 + x)] \approx u(w_0 + \mu) + \frac{1}{2} \sigma^2 u''(w_0 + \mu)$$

$$\text{d'où : } \pi_A \approx -\frac{1}{2} \sigma^2 u''(w_0)/u'(w_0) \quad \text{soit } \boxed{\pi_A \approx \frac{1}{2} \sigma^2 A(w_0)}$$

la prime de risque absolu dépend de :

- la variance (élément objectif)
- l'aversion absolue pour le risque, les préférences (élément subjectif)

### 3- MUTUALISATION, DIVERSIFICATION ET PARTAGE DES RISQUES

#### 3.1- Mutualisation (regroupement)

$N$  personnes dotées de revenus indépendants identiquement distribués  $y_i$

- elles regroupent les revenus :  $Y = \sum_{i=1}^N y_i$  et  $\text{Cov}(y_i, y_j) = 0 \rightarrow V[Y] = N V[y_i]$
- elles partagent en parts égales : chaque participant reçoit  $y = Y/N$ 
  - $\rightarrow V[y] = V[Y/N] = V[Y] / N^2 = V[y_i] / N$
  - $\rightarrow$  plus  $N$  est grand, plus le risque individuel est petit

#### Loi des grands nombres :

si on regroupe des « risques » indépendants, identiquement distribués (si on ajoute des variables aléatoires iid), alors la variance de la moyenne tend vers 0 quand le nombre de « risques » tend vers l'infini.

### 3.2- Diversification :

constitution d'un **portefeuille** de titres distribuant des revenus  $y_i$  imparfaitement corrélés

Supposons :

- titres de même volatilité  $\sigma$ , et de même coefficient de corrélation 2 à 2,  $\rho$ ,
- portefeuille équipondéré, part =  $1/N$

Variance du revenu du portefeuille :  $\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \rho \sigma^2$

→ En augmentant le nombre de titres en portefeuille (en diversifiant), le « risque » du portefeuille diminue.

**La covariance moyenne détermine le socle de risque qui subsiste après diversification ( $\rho\sigma^2$ )**

→ cf. Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF) : différence entre risque diversifiable et risque systématique...

### 3.3- Partage du risque :

→ « neutralité au risque » pour des projets partagés (Arrow et Lind 1970)

$N$  personnes ayant le même revenu initial  $w_0$  :

- participent à un projet risqué coûtant  $P$  et générant un revenu aléatoire  $Y$  :
- partagent coût le revenu à parts égales : chacun paye  $p = P/N$  et reçoit  $y = Y/N$
- $p$  est tel que :  $E[u(w_0)] = E[u(w_0 + y - p)]$
- $P = Np$

On peut montrer que : **si  $Y$  et  $w_0$  ne sont pas corrélés, alors le prix total que les participants sont prêts à payer tend vers  $E(Y)$  quand  $N$  tend vers l'infini.**

→ quand le nombre de participants au projet devient très grand, le projet peut être évalué par le revenu espéré, comme si l'ensemble des participants était neutre au risque.

Interprétation :

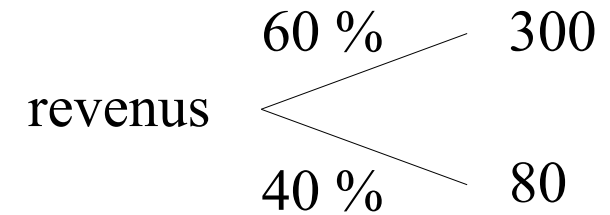
**Si une entreprise a de nombreux actionnaires tous dotés d'un patrimoine bien diversifié, alors elle peut se comporter comme si elle était neutre au risque.**

### Exemple :

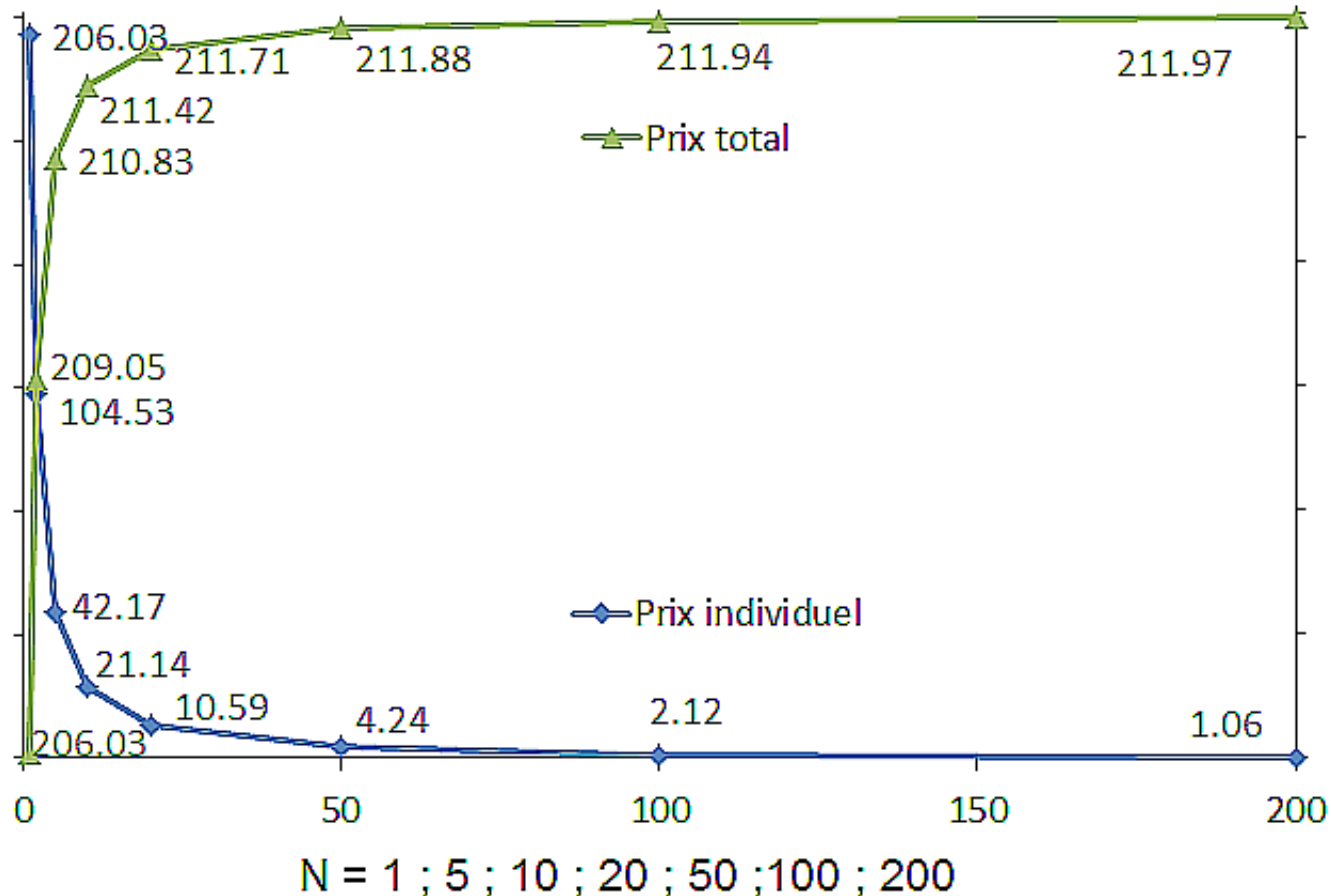
Les investisseurs ont une richesse de 1000.

Leur fonction d'utilité VNM est  $\ln(x)$ .

Le revenu moyen de l'investissement est 212.



*prix individuel* :  $p$  tq.  $\ln(1000) = 0,6 \ln(1000 + 300/N - p) + 0,4 \ln(1000 + 80/N - p)$



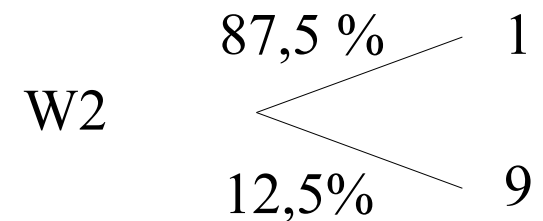
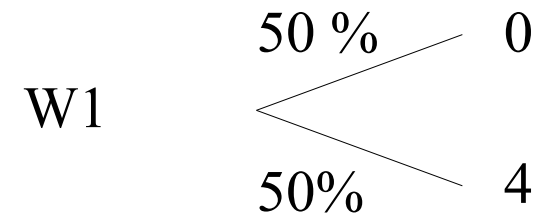


#### 4- PARMIS DEUX « RICHESSES », QUELLE EST LA « PLUS RISQUÉE » ?

On considère deux richesses aléatoires...

...et un décideur *riscophobe* dont les préférences sont représentées par la fonction racine carrée

	W1	W2
$E[W]$		
$V[W]$		
$E[u(W)]$		



→ la variance n'est pas une mesure du risque « perçu » (subjectif)...

Pour classer les aléas par « taille », par « risque » : **dominance stochastique**

## 4.1- Dominance stochastique d'ordre un :

Une richesse  $X$  domine stochastiquement à l'ordre 1 une richesse  $Y$  si tous les décideurs **rationnels** au sens de VNM (dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité espérée) et **insatiables** (dont la fonction d'utilité est croissante) préfèrent  $X$  à  $Y$  :

$$X \succ_{DS1} Y \Leftrightarrow \forall u(\cdot), u'(\cdot) \geq 0, E(u(X)) > E(u(Y))$$

une condition nécessaire et suffisante :

$$X \succ_{DS1} Y \Leftrightarrow \forall w, F_X(w) \leq F_Y(w) \text{ et } \exists w, F_X(w) < F_Y(w)$$

→ la fonction de répartition de  $X$  est à droite/en-dessous de celle de  $Y$

→ «  $X$  a une probabilité plus basse que  $Y$  de prendre des valeurs basses »

*Représenter les fonction de répartition de  $X$  et de  $Y$*

$Y$  représente un « accroissement du risque » par rapport à  $X$ , au sens d'un **décalage vers la gauche** de la distribution.

## Application :

Un décideur doit placer son patrimoine,  $w$ ,

- en actif risqué, dont le taux de rendement est aléatoire et vaut  $-5\%$  avec une probabilité  $p$  et  $15\%$  avec une probabilité  $1-p$ ,
- ou en actif non risqué, dont le rendement est certain et vaut  $i$ .

On note  $W(\alpha)$  la richesse finale, avec  $\alpha$  le montant investi en actif risqué.

1. Écrire le problème de décision comme un choix de loterie.
2. À quelle condition sur  $i$   $W(a)$  domine-t-elle stochastiquement à l'ordre 1  $W(0)$ , pour  $a > 0$  ?
3. En quoi cette question est-elle intéressante ?

## 4.2- Dominance stochastique d'ordre deux :

Une richesse  $X$  domine stochastiquement à l'ordre 2 une richesse  $Y$  si tous les décideurs **rationnels** au sens de VNM, **insatiables** et **riscophobes** (dont la fonction d'utilité est concave) préfèrent  $X$  à  $Y$  :

$$X \succ_{DS2} Y \Leftrightarrow \forall u(\cdot), u'(\cdot) \geq 0, u''(\cdot) < 0, E(u(X)) > E(u(Y))$$

une condition nécessaire et suffisante :

$$X \succ_{DS2} Y \Leftrightarrow \forall w, \int_{-\infty}^w F_X(t) dt \leq \int_{-\infty}^w F_Y(t) dt \quad \text{et} \quad \exists w, \int_{-\infty}^w F_X(t) dt < \int_{-\infty}^w F_Y(t) dt$$

Pour des richesses de même espérance :

- si  $Y$  est construite à partir de  $X$  par « ajout de bruits blancs », alors  $X \succ_{DS2} Y$
- si  $F_Y$  est construite à partir de  $F_X$  par « transfert de poids » vers les extrêmes, alors  $X \succ_{DS2} Y$   
→  $Y$  représente un « accroissement du risque » par rapport à  $X$ , au sens d'un **étalement de la distribution à moyenne constante** (*mean preserving spread*).

## Application :

Dans le royaume de *Far-Far-Away*, chaque année, toute maison peut :

- être endommagée et perdre 20% de sa valeur avec une probabilité de 25%,
- être endommagée et perdre 80% de sa valeur avec une probabilité de 5%
- ou rester intacte.

Une compagnie d'assurance propose d'assurer complètement toute maison, contre le paiement d'une somme égale à une proportion  $s$  de la valeur de la maison : le propriétaire d'une maison assurée dispose d'un patrimoine certain de valeur  $(1-s)M$  où  $M$  est la valeur de la maison intacte non assurée.

1. Définissez l'aversion pour le risque.
2. Définissez la dominance stochastique d'ordre un et la dominance stochastique d'ordre deux. En quoi ces concepts permettent-ils de classer les loteries ?
3. Montrer que tout habitant riscophobe de Far-Far-Away assure sa maison si et seulement si  $s$  est inférieur à 9%.

# 5- ASSURANCE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE

## 5.1- Assurance

Décideur riscophobe avec fonction d'utilité  $u( )$

- peut subir un sinistre/une perte/un dommage  $x \geq 0$  sur sa richesse initiale  $w_0$
- $\pi(x)$  = prime de risque associée

**contrat d'assurance :**

- prime  $P$  payée par l'assuré
- Indemnité versée par l'assureur  $I(x)$

**Prime « pure »** ou « actuarielle » ou « actuariellement équitable » :  $E[I(x)]$

**Couverture intégrale :**  $I(x) = x$

- le décideur est prêt à payer  $P = \pi(x)$  pour s'assurer intégralement
- il est optimal pour le décideur riscophobe de s'assurer intégralement si la prime est actuarielle

**taux de chargement** (« loading factor »)  $c$  : couvre le coût de gestion subi par l'assureur, pour chaque euro d'indemnité

- Assureur neutre au risque (diversification parfaite...), réalise un profit nul si

$$P = (1+c)E[I(x)]$$

**coassurance** : contre prime  $P(b)$ , l'assureur rembourse une fraction  $b$  du dommage

$$I(x) = b x.$$

- $b$  = taux de coassurance
- $1 - b$  = taux de rétention

le taux de coassurance est choisi par l'assuré, sachant la tarification :

$$P(b) = (1+c) E[I(x)] = b P_0$$

où  $P_0 = (1+c) E[x]$  est la prime d'assurance intégrale

**Richesse finale de l'assuré** :  $w = w_0 - b P_0 - (1 - b) x = w_0 - x + b (x - P_0)$

- $b = 1 \rightarrow$  couverture intégrale  $\rightarrow w = w_0 - P_0$  non aléatoire
- $b = 0 \rightarrow w = w_0 - x \rightarrow$  pas d'assurance

## 5.2- Choix de portefeuille

Décideur riscophobe avec fonction d'utilité  $u(\cdot)$  et richesse initiale  $w_0$

doit décider comment partager sa richesse entre

- un fonds sans risque (fonds euro, obligation) rémunéré au taux certain  $r$
- un fonds risqué (unités de compte, actions) rémunéré au taux aléatoire  $y$

→  $a$  en actions

$w_0 - a$  en obligations

**richesse finale de l'investisseur :**  $w = (1 + r)(w_0 - a) + (1 + y)a$

soit :  $w = (1 + r)w_0 + (y - r)a$

- $m_0 = (1 + r)w_0$  : richesse finale en cas de placement intégral sans risque
- $z = y - r$  : rentabilité excédentaire des actions

choisir  $a$  pour maximiser  $E[u(w)] = E[u(m_0 + z a)]$



### 5.3- Similitude des problèmes :

contexte	coassurance	choix de portefeuille
objectif	$\max E[u(w_0 - b P_0 - (1 - b) x)]$	$\max E[u(m_0 + z a)]$
instrument	$b$	$a$

$$w_0 - b P_0 - (1 - b) x = w_0 - P_0 + (1 - b) (P_0 - x)$$

(ajouter et soustraire  $P_0$ , factoriser)

$w_0 - P_0 \leftrightarrow m_0$	richesse finale prime d'assurance intégrale déduite	richesse finale en cas de placement intégral sans risque
$(1 - b)P_0 \leftrightarrow a$	richesse soumise au risque de dommage	richesse placée en actions risquées
	$b = 1$ : assurance intégrale	$a = 0$ : 100 % sans risque
	$\downarrow b \rightarrow \uparrow$ risque assumé par l'assuré	$\uparrow a \rightarrow \uparrow$ risque du portefeuille
$(P_0 - x)/P_0 \leftrightarrow z$	rendement de la coassurance	rentab. excédent. des actions

## 5.4- Décision de l'assuré : $\max f(b) = E[u(w)] = E[u(w_0 - P_0 + (1-b)(P_0 - x))]$

- CPO :  $f'(b) = 0 \rightarrow E[(x - P_0) u'(w)] = 0 \rightarrow$  taux de coassurance optimal  $b^*$
- CDO :  $f''(b) < 0 \rightarrow E[(x - P_0)^2 u''(w)] < 0$  toujours vraie car  $u''(\cdot) < 0$   
(aversion pour le risque)

Mossin (1968) a montré :

- si  $c = 0$  (prime actuarielle)  $b^* = 1$  assurance **intégrale** optimale
- si  $c > 0$  (taux de chargement positif)  $b^* < 1$  assurance **partielle** optimale

Même si l'aversion pour le risque est élevée, si  $c > 0$ , l'assuré s'assure partiellement

- économie de dépense (prime)  $\rightarrow \uparrow$  richesse attendue : effet de *premier ordre*  
 $\rightarrow \uparrow$  risque : effet de *second ordre*

Quelques autres résultats :

- décideur + riscophobe ( $u(\cdot)$  + concave)  $\rightarrow$  taux de coassurance  $b^* +$  grand
- $u(\cdot)$  DARA :  $\uparrow$  richesse  $\rightarrow \downarrow$  taux de coassurance (assurance = bien inférieur)
- $u(\cdot)$  DARA :  $\uparrow$  taux de chargement  $\rightarrow ?$  taux de coassurance (bien Giffen ?)
- $\uparrow$  « risque »  $\rightarrow ?$  taux de coassurance...

## 5.5- Décision de l'investisseur : $\max g(a) = E[u(m_0 + z a)]$

- CPO :  $g'(a) = 0 \rightarrow E[z u'(w)] = 0$   $\rightarrow$  taux de coassurance optimal  $b^*$
- CDO :  $f''(b) < 0 \rightarrow E[z^2 u''(w)] < 0$  toujours vraie car  $u''(\cdot) < 0$   
(aversion pour le risque)
- si  $Ez = 0$  actions = risque pur  $a^* = 0$  Placer 100 % sans risque
- si  $Ez > 0$  rentabilité excédentaire peut compenser risque  $a^* \geq 0$  Placement en action désirable

Quelques autres résultats si  $Ez > 0$  :

- décideur + riscophobe ( $u(\cdot)$  + concave)  $\rightarrow$  moindre placement action  $a^*$
- $u(\cdot)$  DARA :  $\uparrow$  richesse  $\rightarrow \uparrow a^*$
- $u(\cdot)$  CRRA :  $a^*$  est proportionnel à la richesse
- $\frac{a^*}{w} \approx \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{1}{R(w)}$   $\mu = E(z) \rightarrow$  prime du marché actions (*equity premium*) ;  
 $\sigma^2 = V(z) \rightarrow$  variance des rentabilités des actions ('risque')

La part investie en action est approximativement ...

... proportionnelle à la prime du marché actions

... inversement proportionnelle au risque et à l'aversion relative pour le risque

## 5.6- Mesurer l'aversion pour le risque :

Première méthode : à partir du modèle de choix de portefeuille...

$$\frac{a^*}{w} \approx \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{1}{R(w)} \rightarrow R(w) \approx \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{1}{a^*/w}$$

on suppose homogénéité des croyances ( $\mu$  et  $\sigma^2$  égaux pour tous les investisseurs)  
→ l'hétérogénéité des choix de portefeuille provient des différences d'aversion pour le risque

→ « préférence révélées » (cf. Friend et Blume 1975)

Deuxième méthode : à partir d'enquêtes et de questionnaires

questions qualitatives → classer par « groupe » d'aversion pour le risque ± élevée

questions quantitatives → quantifier l'aversion pour le risque via série de choix de loteries ou en demandant une disposition à payer...

## 6- PARADOXE D'ALLAIS ET AXIOME D'INDÉPENDANCE

cf. Exemple 1 (§2.1)

Choisir entre A et B :

A  $\frac{100\%}{100M€}$       B  $\begin{matrix} 98\% & 500M€ \\ & / \\ & \backslash \\ 2\% & 0 \end{matrix}$

Choisir entre C et D :

C  $\begin{matrix} 1\% & 100M€ \\ & / \\ & \backslash \\ 99\% & 1€ \end{matrix}$       D  $\begin{matrix} 0,98\% & 500M€ \\ & / \\ & \backslash \\ 99\% & 1€ \\ & / \\ & \backslash \\ 0,02\% & 0 \end{matrix}$

Synthèse des choix	A	B
C		
D		

## 6.1- Paradoxe d'Allais (1953) : de nombreux individus choisissent A et D...

Or d'après VNM :  $A > B \Rightarrow C > D$

En effet :

$$\begin{aligned} A > B &\Rightarrow u(w_0 + 100) > 0,98 u(w_0 + 500) + 0,02 u(w_0) \\ &\Rightarrow 0,01 u(w_0 + 100) + 0,99 u(w_0 + 1) \\ &\qquad > 0,01 [0,98 u(w_0 + 500) + 0,02 u(w_0)] + 0,99 u(w_0 + 1) \\ &\Rightarrow 0,01 u(w_0 + 100) + 0,99 u(w_0 + 1) \\ &\qquad > 0,0098 u(w_0 + 500) + 0,99 u(w_0 + 1) + 0,0002 u(w_0) \end{aligned}$$

$$A > B \Rightarrow C > D$$

→ montre la difficulté des décisions dans l'incertain...

→ remet en cause une des hypothèses du théorème de l'utilité espérée :  
**l'axiome d'indépendance.**

## 6.2- L'axiome d'indépendance :

**Axiome d'indépendance :** « Si on « mélange » deux loteries avec une troisième loterie, le classement des deux loteries résultantes ne dépend que du classement des deux loteries initiales (il ne dépend pas de la troisième). »

**Exemple de « mélange » :**

Soit Z la loterie qui donne 1€ avec certitude :  $Z \quad \frac{100 \%}{\quad} \quad 1€$

B est construite en « mélangeant » 1 % de A et 99 % de Z

D est construite en « mélangeant » 1 % de B et 99 % de Z



L'axiome d'indépendance dit que :  $A > B \Rightarrow C > D$

## La signification de l'axiome d'indépendance :

Parmi tous les résultats possibles d'un événement aléatoire, un seul se produit.

→ un seul état du monde se produit

→ l'utilité d'une somme disponible dans cet état ne dépend pas de ce qui se passe dans un état qui ne s'est pas produit

(≠ préférences sur des biens pouvant être consommés simultanément)

→ sens de l'hypothèse « d'indépendance » : les choix faits dans un état du monde ne dépendent pas des choix prévus dans les autres états.

→ la fonction d'utilité est « additive » par rapport aux états du monde :

On note  $i = 1$  à  $N$  les états du monde,  $p_i$  les probabilités,  $l_i$  les lots monétaires

$$U(L) = \sum_{i=1}^N p_i u(l_i) \text{ soit } U(L) = E[u(l)]$$

$$\rightarrow TMS_{2,1} = - \left. \frac{\partial l_2}{\partial l_1} \right|_{U=cst} = \frac{\partial U(l_1, \dots, l_n) / \partial l_1}{\partial U(l_1, \dots, l_n) / \partial l_2} = \frac{p_1 u'(l_1)}{p_2 u'(l_2)} \text{ indépendant de } \{l_3, \dots, l_N\}$$



## axiome d'indépendance et « Dutch book »

« dutch book » : pari qui garantit un gain à coup sûr pour le *bookmaker*  
et une perte à coup sûr pour le *parieur*.

Un décideur dont le comportement n'est pas conforme à l'axiome d'indépendance est victime d'un « dutch book » :

- Parmi trois loteries, A, B et C : le décideur les ordonne  $A > B$  et  $A > C$ .

D est une « loterie composée » : on tire à pile ou face pour jouer B ou C.

- le décideur préfère D à A ( $\neq$  axiome d'indépendance)

Scénario de « dutch book »

- proposer au décideur de choisir entre A, B et C  $\rightarrow A$
  - proposer alors au décideur de payer pour remplacer A par D  $\rightarrow$  paye  $x \rightarrow D$
  - tirer à pile ou face et proposer alors au décideur de payer pour remplacer B ou C (selon résultat du tirage) par A  $\rightarrow$  paye  $x' \rightarrow A$
- $\rightarrow$  le décideur a payé  $x+x'$  pour revenir au point de départ ! Incohérence !

## 7- FINANCE COMPORTEMENTALE

Typiquement, on observe :

- choix incompatibles avec la maximisation de l'espérance (subjective) d'utilité
- difficultés dans la mise à jour des croyances (application de la loi de Bayes)

→ **problème pour déterminer l'attitude à l'égard du risque !**

la « finance comportementale » :

- ne suppose pas des agents rationnels et des marchés sans friction
- part des limites à la rationalité, et de la psychologie des décideurs
- met en évidence les biais cognitifs et les erreurs de décisions
- montre les opportunités de profit générées par les erreurs des « noise traders »

## 7.1- La règle de Bayes :

**Exemple :** Vous savez que...

- 80 % de vos clients (emprunteurs) sont « sûrs », 20 % sont « risqués »
- 90 % des clients « sûrs » payent « à temps »
- 50 % des clients « risqués » payent « en retard »

Un de vos client paye à temps... est-il « sûr » ou « risqué » ?

- La probabilité qu'il soit « sûr » est de ...
- Globalement, la probabilité qu'un client paye à temps est de...
- 
- $A$  et  $B$  deux événements aléatoires,
- $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  :  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**Règle de Bayes** → comment réviser la probabilité de  $A$ , après observation  $B$ .

- $P(A)$  « probabilité *a priori* (marginale) de  $A$  » aussi appelée probabilité de  $A$ .
- $P(A|B)$  = « la probabilité *a posteriori* (conditionnelle) de  $A$  sachant  $B$  »
- $P(B|A)$ , pour un  $B$  connu = « vraisemblance de  $A$  sachant  $B$  »

$$P(A \& B) = P(B|A) P(A) = P(A|B) P(B)$$

$$\rightarrow \text{r\`egle de Bayes : } P(A|B) = P(B|A) P(A) / P(B)$$

$$P(B) = P(A \& B) + P(\bar{A} \& B) = P(B|A) P(A) + P(B|\bar{A}) P(\bar{A})$$

$$\rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B|A) P(A) + P(B|\bar{A}) P(\bar{A})}$$

## Application :

$A = \ll \text{le client est de type 's\^ur'} \gg$  ;  $\bar{A} = \ll \text{le client est de type 'risqu\^e'} \gg$

$B = \ll \text{client 'ponctuel'} \gg$  ;  $\bar{B} = \ll \text{client 'retardataire'} \gg$

$$P(\text{'ponctuel'}) = P(\text{'ponctuel'} | \text{'s\^ur'}) P(\text{'s\^ur'}) + P(\text{'ponctuel'} | \text{'risqu\^e'}) P(\text{'risqu\^e'})$$

→ globalement (a priori), 82 % des clients sont *'ponctuels'*

$$P(\text{'s\^ur'} | \text{'ponctuel'}) = P(\text{'ponctuel'} | \text{'s\^ur'}) P(\text{'s\^ur'}) / P(\text{'ponctuel'})$$

→ la probabilité a posteriori qu'un client ayant payé à temps soit s\^ur est de :

$$\frac{72\%}{82\%} \approx 87,8\%$$

→ remplir le tableau de contingence.

## 7.2- Psychologie : les croyances – biais cognitifs

enseignements sur la manière apparente dont les gens forment leurs croyances

- **sur-confiance** : confiance excessive dans ses jugements (intervalles de confiances trop étroits, probabilités mal calibrées)  
provient de deux biais :
  - auto-attribution : attribuer ses succès à son propre talent/ses échecs à la malchance
  - recul : après un événement, avoir tendance à penser qu'on l'avait prévu
- **optimisme** : surestimer ses capacités (en part. celle de respecter les échéances)
- **représentativité** : estimer la probabilité par la similitude (négliger les probas a priori) → mauvaises applications de la loi de Bayes sur la révision des croyances
- **conservatisme** : surestimer les probas a priori
- **persévérance dans les croyances, biais de confirmation** : répugnance à accepter de changer d'avis
- **ancrage** : ajuster ses croyances à partir d'une valeur a priori arbitraire
- **biais de disponibilité** : tous les souvenirs permettant d'estimer les probas d'événements ne sont pas « disponibles » de la même manière

## 7.3- Psychologie : les préférences (1) - la théorie des perspectives

### La théorie des perspectives (prospect theory) – Kahneman & Tversky (1979)

Question 1 : Supposons que vous êtes plus riches de 300 €. Que choisissez-vous ?

A'- un gain certain de 100€

B'- 50 % de chance de gagner 200€ et 50 % de chance de ne rien gagner.

Question 2 : Supposons que vous êtes plus riches de 500 €. Que choisissez-vous ?

C'- une perte certaine de 100€

D'- 50 % de chance de perdre 200€ et 50 % de chance de ne rien perdre.

→ choix :

- majorité de A' : aversion pour le risque en cas de gain.
- majorité de D' : goût pour le risque en cas de perte.

Les positions finales de A' et C' et celles de B' et D' sont pourtant identiques...

- VNM :  $A' > B' \Rightarrow C' > D'$

question 1 → choisir un gain  
question 2 → choisir une perte } même résultat final

→ la présentation influence la décision

→ évaluation de gains et de pertes par rapport à un point de référence

→ attitude à l'égard du risque différente en cas de gains et en cas de pertes



## La théorie des perspectives

- remet en cause la théorie de l'utilité espérée (VNM) comme modèle descriptif des décisions en situation de risque.
- fondée sur des constats expérimentaux

Une loterie  $L$  rapporte « gain » avec probabilité  $p$  et « perte » avec probabilité  $q$ .

$$L \text{ est « évaluée » par : } U(L) = \pi(p) v(\text{gain}) + \pi(q) v(\text{perte})$$
$$\neq E[u(L)] = p u(w_0 + \text{gain}) + q u(w_0 + \text{perte})$$

- $v(\cdot)$  définie sur pertes et gains (s/ **point de référence**)  $\neq$  richesse finale ;
  - riscophilie si perte
  - riscophobie si gain
- + **aversion pour les pertes** pour des pertes que pour des gains  
pente de  $v(\cdot)$  + forte  
 $v(x) < -v(-x)$
- $\pi(\cdot)$  = « fonction de pondération » = transformation non linéaire des probas :
    - surestimation des petites probabilités,
    - sous-estimation des probabilités élevées

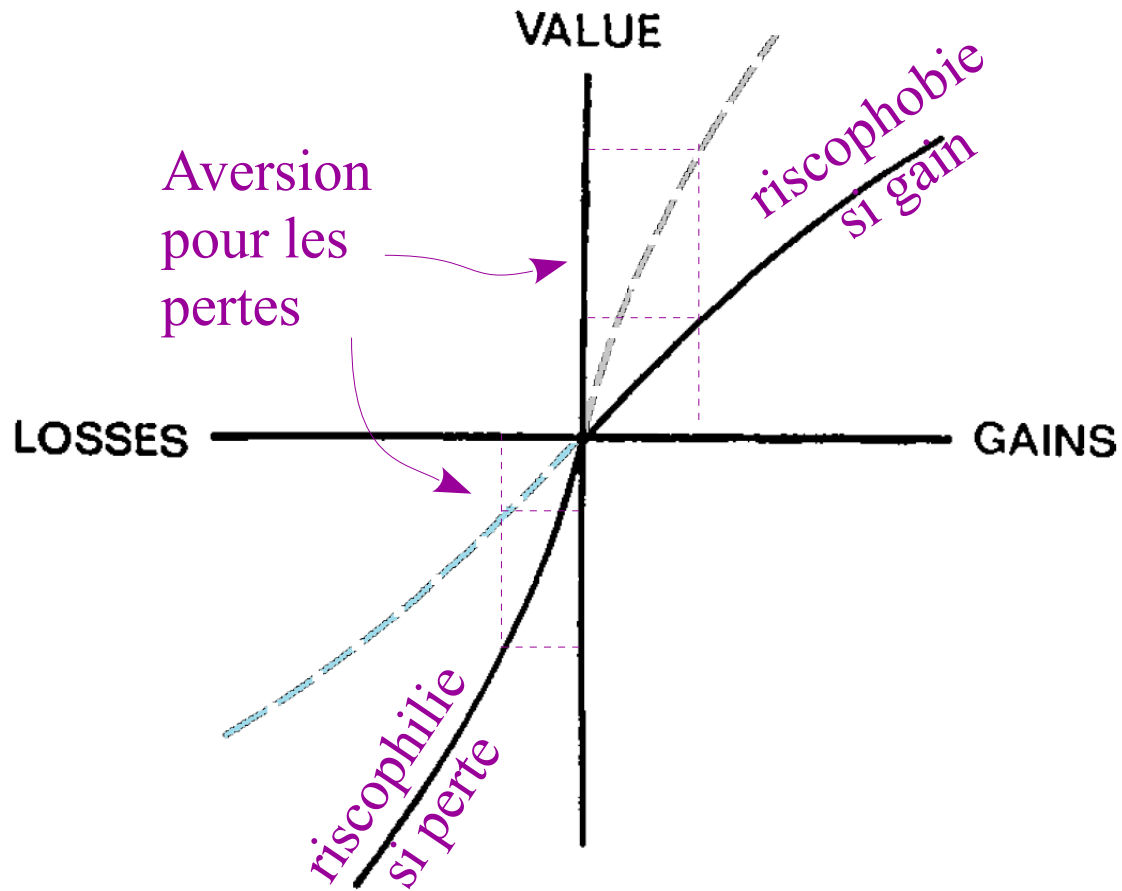


FIGURE 3.—A hypothetical value function

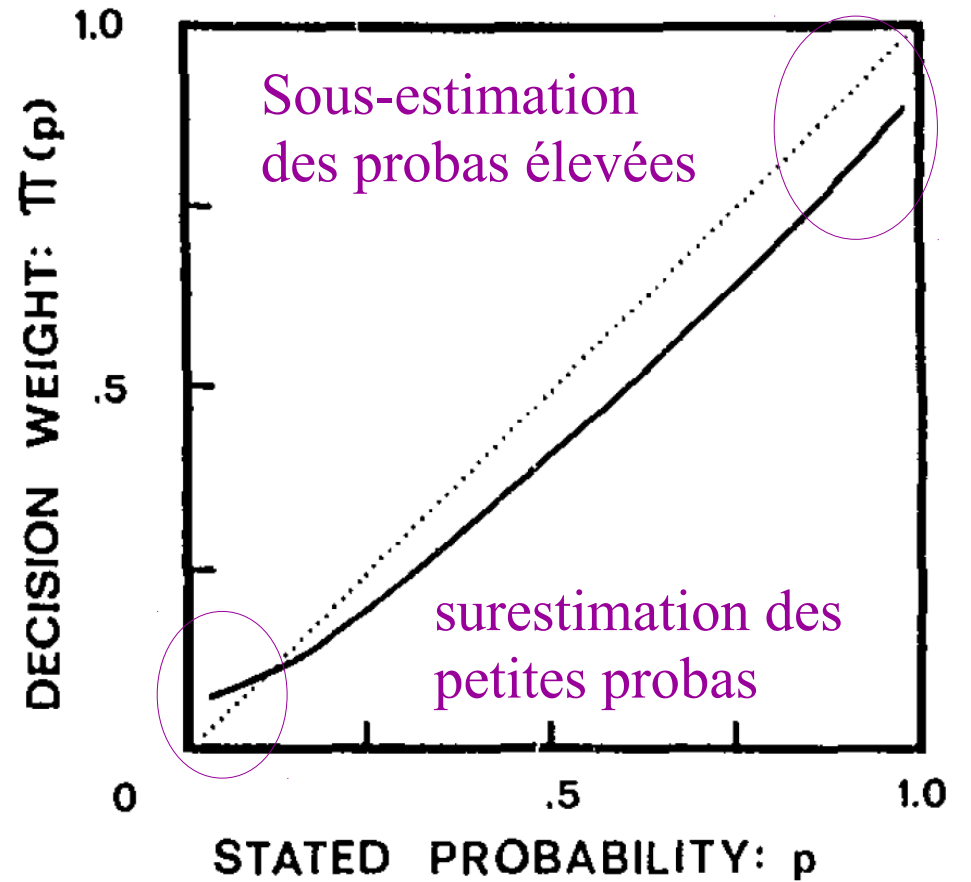
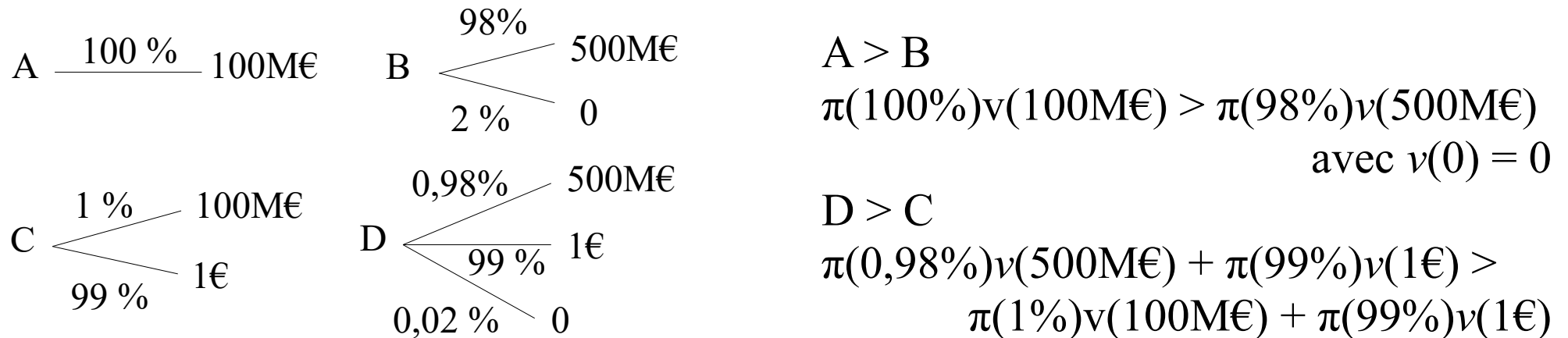


FIGURE 4.—A hypothetical weighting function.

source :Kahnemann & Tversky (1979)

## La fonction de pondération explique le paradoxe de Allais

- une majorité choisit A (plutôt que B) et D (plutôt que C)



- pour ces gens :  $\pi(0,98\%)/\pi(1\%) > v(100M€)/v(500M€) > \pi(98\%)/\pi(100\%)$   
 $\pi(0,98\%)/\pi(1\%) > \pi(98\%)/\pi(100\%)$
- choix cohérent si :
  - sur-pondération des petites probas :  $\pi(0,98\%) > 0,98 \pi(1\%)$
  - sous-pondération des probas élevées :  $\pi(98\%) < 0,98 \pi(100\%)$

## en théorie des perspectives

décisions fondées sur 2 opérations cognitives distinctes :

(1) création de « comptes mentaux » (résultant d'une « présentation » - *framing*)

→ la présentation peut influencer la prise de décision (*framing*)  
même si les décideurs n'en ont pas toujours conscience

(2) application de règles de décisions différentes sur ces comptes

→ chaque compte mental est évalué séparément  
la valeur de l'ensemble est la somme des valeurs séparées

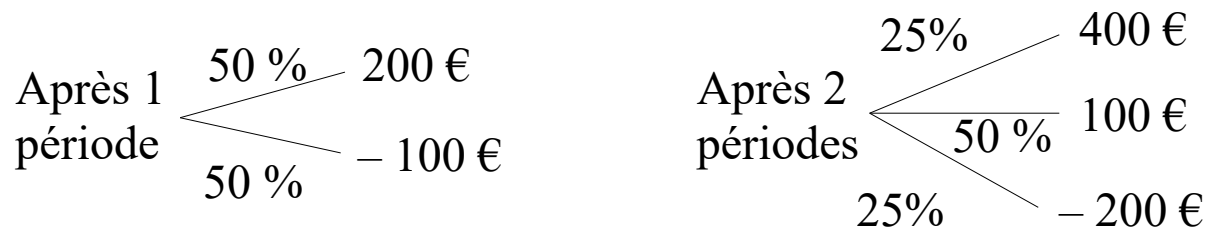
un décideur qui maximise  $U(L)$  préfère

- allouer un gain  $g$  sur deux comptes séparés car  $v(g)$  concave  $\rightarrow 2v(g/2) > v(g)$
- allouer une perte  $l$  sur deux comptes séparés :  $v(l)$  convexe  $\rightarrow v(l) > 2v(l/2)$
- séparer une grosse perte et un petit gain :  $v(g) + v(l) > v(g+l)$

## Exemple (rôle de la *comptabilité mentale* sur la décision)

Un actif peut engendrer un gain de 200 € ou une perte de 100 € de manière équiprobable chaque période.

→ Changement de richesse (par rapport au statu quo) :



évaluation par

$$U(x) = x \quad \text{si } x \geq 0$$
$$U(x) = 2,5 x \quad \text{si } x < 0$$

→ acquisition pour 2 périodes :  $U(x_2) = + 25$   
mais pas pour 1 période :  $U(x_1) = - 25$

→ un décideur ayant aversion pour les pertes accepte de prendre des risques si les performances ne sont pas évaluées trop fréquemment.

[aversion pour les pertes + myopie dans l'évaluation → prime de risque actions]

## Fonction d'évaluation de Kahneman & Tversky :

Une loterie (un actif) donne des sommes  $w_1 < \dots < w_i < \dots < w_N$  avec des probas  $p_i$

Les sommes sont comparées à une référence  $\theta$  :  $x_i = w_i - \theta$ .

- Placement initial  $w_0$  :  $\theta = w_0$
- Placement sans risque au taux  $r_f$  :  $\theta = (1+r_f)w_0$
- ...

$$\text{Évaluation : } U(L) = \sum_{i=1}^N \pi_i v(x_i)$$

$$v(x_i) = x_i^\alpha \quad \text{si } x_i \geq 0 \text{ (gain) avec } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ (} v \text{ concave)}$$

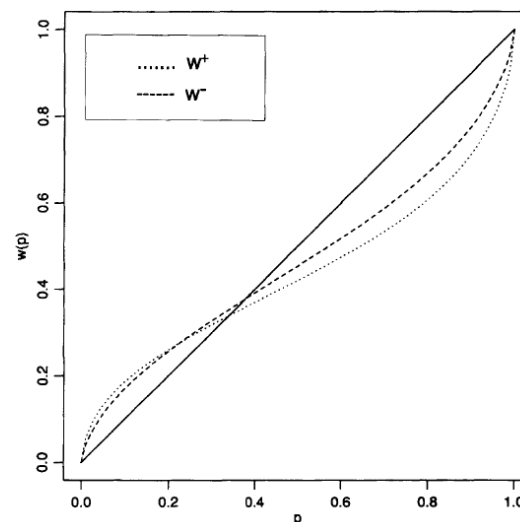
$$v(x_i) = -\lambda (-x_i)^\beta \quad \text{si } x_i < 0 \text{ (perte) avec } 0 \leq \beta \leq 1 \text{ (} v \text{ convexe)}$$

Déformation des probabilités cumulées :

$$\pi_i = \omega(P_i) - \omega(P_i^*)$$

avec :  $P_i = \Pr(x \geq x_i)$  et  $P_i^* = \Pr(x > x_i)$  ;

$$\omega(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{1/\gamma}}$$



$$\alpha = \beta = 0,88$$

$$\lambda = 2,25$$

$$\gamma = 0,65$$

**Exemple** : évaluer une richesse aléatoire distribuée de la manière suivante :

probabilité	richesse
10%	95
30%	100
40%	104
20%	109

Le point de référence est 100.

$$v(w_i) = (w_i - 100)^{0,88} \quad \text{si } w_i \geq 100 \text{ (gain)}$$

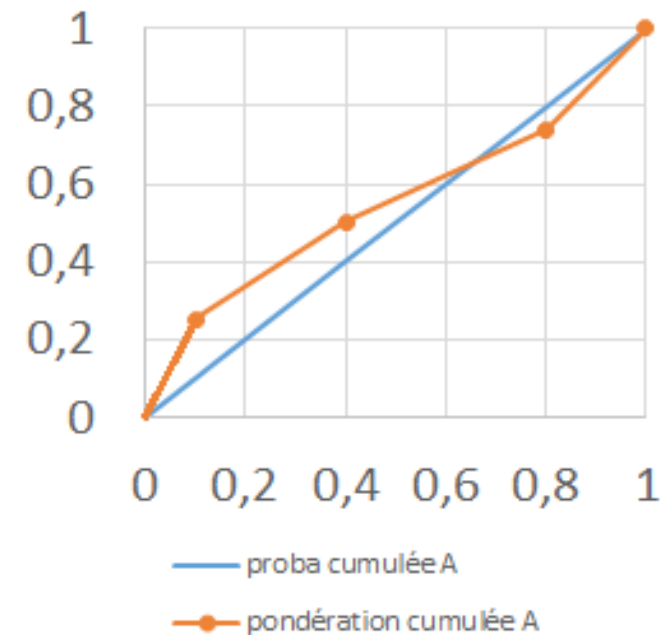
$$v(w_i) = -2,25 (100 - w_i)^{0,88} \quad \text{si } w_i < 100 \text{ (perte)}$$

Déformation des probabilités cumulées :

$$\pi_i = \omega(P_i) - \omega(P_i^*)$$

avec :  $P_i = \Pr(w \geq w_i)$  et  $P_i^* = \Pr(w > w_i)$  ;

$$\omega(p) = \frac{p^{0,65}}{(p^{0,65} + (1-p)^{0,65})^{1/0,65}}$$



Richesse $w_i$	Évaluation $v(w_i)$	Déformation des probabilités cumulées			
		$\Pr(w = w_i)$	$\Pr(w \geq w_i)$	$\Pr(w > w_i)$	pondération $\pi_i$
95	$-2,25 (100 - 95)^{0,88}$ $= -9,2742$	0,1	1	0,9	0,2545
100	$(100 - 100)^{0,88}$ $= 0$	0,3	0,9	0,6	0,2480
104	$(104 - 100)^{0,88}$ $= 3,3870$	0,4	0,6	0,2	0,2376
109	$(109 - 100)^{0,88}$ $= 6,9141$	0,2	0,2	0	0,2599

$$U(W) = \sum_{i=1}^4 \pi_i v(w_i) \approx 0,2545 \times (-9,2742) + 0,2376 \times 3,3870 + 0,2599 \times 6,9141 \approx 0,2412$$

- $U(W) > 0 \rightarrow W$  est préférable à la « référence »
- comparer à l'utilité obtenue en choisissant une autre alternative...



## 7.4- Psychologie : les préférences (2) - l'aversion pour l'ambiguïté :

En réalité, les probabilités sont rarement connues objectivement

- cf. distinction « risque » vs « incertitude »

→ Savage (1964) : théorie de « l'espérance d'utilité subjective »

- distinction « risque » vs « incertitude »

Mais les gens n'aiment pas l'« **ambiguïté** » = les situations où les distributions de probabilités sont elles-même incertaines :

- sentiment d'incompétence
- préférence pour le familier

→ Des comportements inexplicables par le théorie de l'utilité espérée

→ Les préférences ne s'expriment pas toujours par des jugements probabilistes

cf. paradoxe d'Ellsberg (1961)

## Paradoxe d'Ellsberg et aversion à l'ambiguïté :

*Deux urnes contiennent chacune 100 boules*

- *Urne 1 : ?? bleues + ?? rouges*
- *Urne 2 : 50 bleues + 50 rouges*

*Lequel des deux paris suivants préférez-vous :*

- *a1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*
- *a2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*

*Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :*

- *b1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*
- *b2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*

## Paradoxe d'Ellsberg et aversion à l'ambiguïté :

*Deux urnes contiennent chacune 100 boules*

- Urne 1 : ?? bleues + ?? rouges
- Urne 2 : 50 bleues + 50 rouges

*Lequel des deux paris suivants préférez-vous :*

- *a1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*
- *a2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*

*Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :*

- *b1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*
- *b2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*

typiquement, les gens préfèrent a2 (plutôt que a1) et b2 (plutôt que b1)

→ incohérent avec théorie de « l'espérance d'utilité subjective » (proba subjectives)

$a2 > a1$  si  $\text{Pr}(\text{rouge} \mid \text{urne 1}) > \text{Pr}(\text{rouge} \mid \text{urne 2})$  ;  $b2 > b1$  si  $\text{Pr}(\text{bleu} \mid \text{urne 1}) > \text{Pr}(\text{bleu} \mid \text{urne 2})$

→ **aversion à l'ambiguïté**

cf. Barberis & Thaler (2003)

## Paradoxe d'Ellsberg – autre version :

*Une urne contient 90 boules : 30 rouges, les autres noires ou jaunes...*

*Lequel des deux paris suivants préférez-vous :*

- *c1 : tirer une boule, gagner 100 si « rouge », 0 sinon*
- *c2 : tirer une boule, gagner 100 si « noire », 0 sinon*

*Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :*

- *d1 : tirer une boule, gagner 100 si « rouge » ou « jaune », 0 sinon*
- *d2 : tirer une boule, gagner 100 si « noire » ou « jaune », 0 si « rouge »*

typiquement, les gens préfèrent c1 (plutôt que c2) et d2 (plutôt que d1)

→ incohérent avec théorie de « l'espérance d'utilité subjective » (proba subjectives)  
c1 > c2 si  $\text{Pr}(\text{rouge}) > \text{Pr}(\text{noire})$  ; d2 > d1 si  $\text{Pr}(\text{noire ou jaune}) = \text{Pr}(\text{noire}) + \text{Pr}(\text{jaune}) > \text{Pr}(\text{rouge ou jaune}) = \text{Pr}(\text{rouge}) \text{Pr}(\text{jaune})$

→ **aversion à l'ambiguïté**

cf. Eber & Willinger (2012)

## 7.5- Application au comportement des investisseurs

### (1) Effet de disposition/de dotation :

valoriser davantage un bien que l'on possède déjà

répugner à vendre / garder trop longtemps un titre dont le cours a baissé

- dû à *croyance irrationnelle* en un « retour vers la moyenne »
- dû à *l'aversion pour les pertes* (théorie des perspectives)

**exemple** : une action achetée 50 cote aujourd'hui 45, faut-il vendre, ou attendre (l'action pourra alors être cotée 50 ou 40, de manière équiprobable) ?

*en théorie des perspectives* : utilité de vendre =  $v(-5)$

utilité de garder =  $\frac{1}{2} v(0) + \frac{1}{2} v(-10)$

*région des pertes,*

*riscophilie*

*$v(\cdot)$  convexe*

→ garder

### (2) transactions trop nombreuses :

de meilleures performances seraient possibles avec moins de transactions (coûts de transaction, mauvaise sélection des titres)

- dues à *sur-confiance* : penser avoir une info justifiant une transaction...

### (3) Faible diversification des portefeuilles d'actifs risqués

due à *aversion à l'ambiguïté* :

- difficulté à traiter l'information financière, à envisager les résultats possibles, à évaluer les probabilités, même subjectives
  - renoncer à participer aux marchés financiers
  - concentrer sur une entreprise ou sur un secteur d'activité connu
    - possible biais de sur-confiance
    - diversification naïve ( $1/n$ ) ou insuffisante

due à *comptabilité mentale* : segmentation des choix (investissement dans un portefeuille d'actifs risqués traité indépendamment des autres choix de placement).

- prépondérance d'actifs non risqués pour l'essentiel du patrimoine financier
- faible diversification, fort risque pour le complément (actifs risqués)
  - le patrimoine financier est clairement segmenté, ou encore stratifié
  - chaque strate (typiquement deux) est associée à une fonction d'utilité propre
    - aversion pour le risque pour la première (se prémunir contre la pauvreté, garantir un certain niveau de patrimoine)
    - un goût du risque pour la deuxième (s'enrichir)

## 7.6- Les conseillers financiers peuvent-ils en profiter ? exemples...

Erta & al. (2013), *Applying Behavioural Economics at the Financial Conduct Authority*, FCA occasional-paper n°1

### **Théorie des perspectives :**

→ manipuler le point de référence

- pub/processus de vente : inclure des options ou des caractéristiques inutiles pour augmenter/baisser le point de référence (cf. « conventions de compte »)
- stratégie tarifaire : tarification « au goutte à goutte » (ajouter des éléments au fur et à mesure du processus de vente)

→ exploiter les effets de dotation et l'aversion pour les pertes :

- pub/processus de vente : présentation (pointer pertes en l'absence d'assurance)
- conception du produit : ex. assurance pour des petits risques
- stratégie tarifaire : périodes d'essai gratuit, réduction temporaire (sur premières échéances)

### **Comptabilité mentale :**

→ manipuler la présentation de la performance des produits (période, inflation...)

## Importance de la présentation :

- aversion pour les pertes → meilleure acceptation d'une présentation positive plutôt que d'une présentation négative
- présentation des performances passées : échelle de temps , en courbe/en bâtons, en valeur/en pourcentage
- Tendance à choisir l'option moyenne / l'option par défaut → l'exposition au risque varie selon la présentation.

trois options / deux présentations	présentation A	présentation B
« conservateur »	0 % UC ; 100 % euro	10 % UC ; 90 % euro
« modéré »	40 % UC ; 60 % euro	50 % UC ; 50 % euro
« agressif »	80 % UC ; 20 % euro	90 % UC ; 10 % euro

- faire la promotion d'un « package » en insistant sur l'économie réalisée (coût de l'ensemble < coût des options prises séparément) même si certains éléments ne sont jamais utilisés
- + options supplémentaires avec possibilité de « sortie » ultérieure



## ANNEXE 1 : RAPPELS sur les variables aléatoires :

### 1- Variable aléatoire discrète, variable aléatoire continue

Une variable aléatoire réelle **discrète**  $X$  peut prendre plusieurs valeurs réelles  $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_N\}$  avec des probabilités  $\{P_1, \dots, P_i, \dots, P_N\}$

- fonction de répartition :  $F(x_i) = \text{Proba}(X \leq x_i)$   
fonction de densité :  $f(x_i) = \text{Proba}(X = x_i)$

- $F(x_i) = \text{Proba}(X \leq x_i) = \text{Proba}(X = x_1, \text{ ou } X = x_2 \dots \text{ ou } X = x_i) = \sum_{j=1}^i f(x_j)$   
 $f(x_i) = \text{Proba}(X = x_i) = \text{Proba}(X \leq x_i) - \text{Proba}(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Une variable aléatoire **continue**  $X$  prend des valeurs sur un intervalle  $[x_{\min}, x_{\max}]$

- fonction de répartition :  $F(x_i) = \text{Proba}(X \leq x_i)$  ;  $F(x_i) = \int_{j=x_{\min}}^{x_i} f(x) dx$   
fonction de densité :  $f(x_i) = F'(x_i)$

$$\text{NB : } 0 \leq F(x_i) \leq 1 ; 0 \leq f(x_i) \leq 1 ; \sum_{j=1}^N f(x_j) = 1 \quad \text{ou} \quad \int_{j=x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx = 1$$

## 2- Espérance mathématique

**Espérance mathématique** = moyenne pondérée par les probabilités

$$E[X] = \sum_{i=1}^N P_i x_i \rightarrow \text{un indicateur de niveau}$$

→ règle de calcul :  $E(aX+b) = a E(X) + b$

- $aX + b$  est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs  $\{a x_1 + b, \dots, a x_N + b\}$  avec des probabilités  $\{P_1, \dots, P_N\}$
- « centrer la variable » = soustraire l'espérance mathématique pour obtenir une variable d'espérance nulle :  $Y = X - E[X] \rightarrow E(Y) = E[X] - E[X] = 0$

$f(X)$  est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs  $\{f(x_1), \dots, f(x_N)\}$  avec des probabilités  $\{P_1, \dots, P_N\}$

→ inégalité de Jensen :  $f(x)$  concave  $\leftrightarrow f(E[X]) > E[f(X)]$

*Et pour des variables aléatoires continues ?*

### 3- Variance et écart-type

**Variance** = moyenne des carrés des écarts à la moyenne :  $V(X) = E[(X - E(X))^2]$   
= moyenne des carrés moins carré de la moyenne :  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$V[X] = \sum_{i=1}^N P_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^N P_i x_i^2 - (E(X))^2$$

**Écart-type** = racine carrée de la variance :  $\sigma_X^2 = V(X)$

→ des indicateurs de **dispersion** (« risque »)

Règle de calcul :  $V(aX+b) = a^2 V(X)$  et  $\sigma_{aX+b} = a \sigma_X$

Centrer une variable ne modifie pas sa variance :  $Y = X - E[X] \rightarrow V(Y) = V(X)$

Variance = « moment centré d'ordre 2 »... car  $V(X) = E[(X - E(X))^2]$

#### 4- Couple de variables aléatoires :

distribution jointe :  $F(x_0, y_0) = Pr(X \leq x_0 \text{ et } Y \leq y_0)$

→ règle de calcul :  $E(aX+bY) = a E(X) + b E(Y)$

→ règle de calcul :  $V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2 a b Cov(X, Y)$

**Covariance** de X et de Y = espérance du produit – produit des espérances :

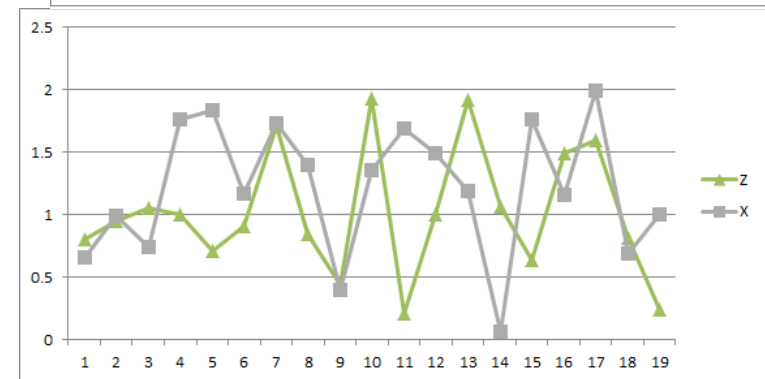
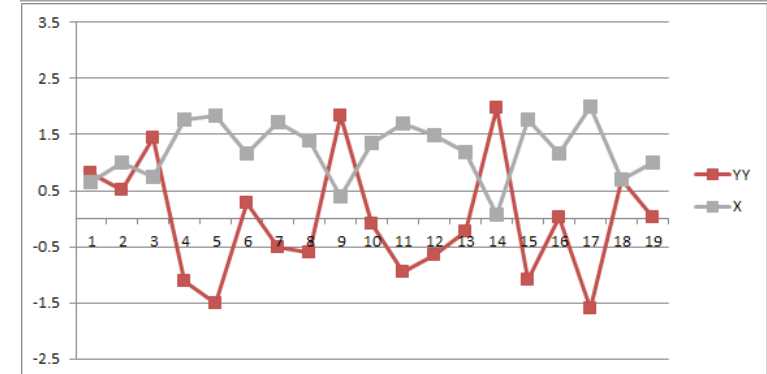
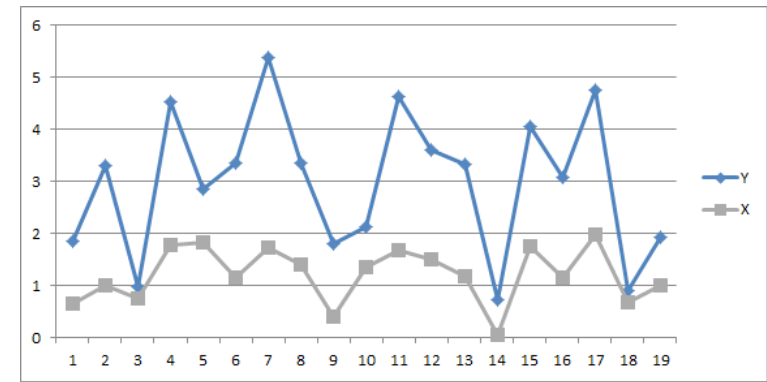
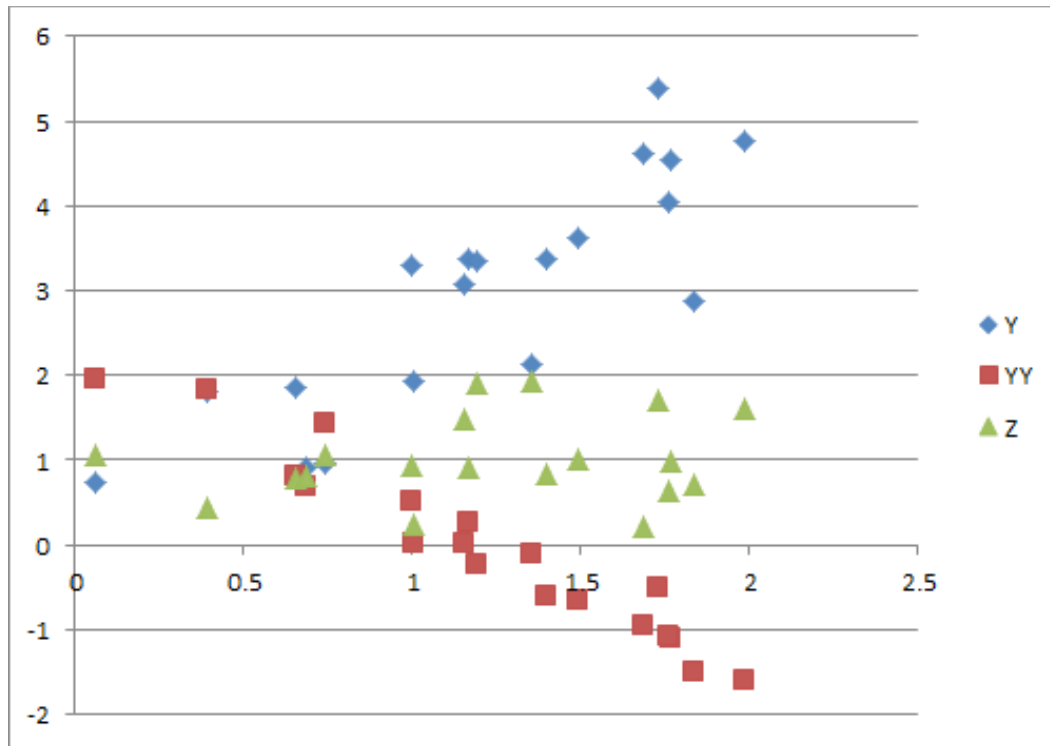
$$Cov(X, Y) = E[X Y] - E[X] E[Y]$$

→ règle de calcul :  $Cov(aX, Y+Z) = a Cov(X, Y+Z) = a Cov(X, Y) + a Cov(X, Z)$

**Coefficient de corrélation** : rapport de la covariance au produit des écart-types :

$$\rho(X, Y) = Cov(X, Y) / (\sigma_X \sigma_Y)$$

Exemple :  $\rho(X,Y) \approx 0,85$  ;  $\rho(X,YY) \approx -0,97$  ;  $\rho(X,Z) \approx 0,18$



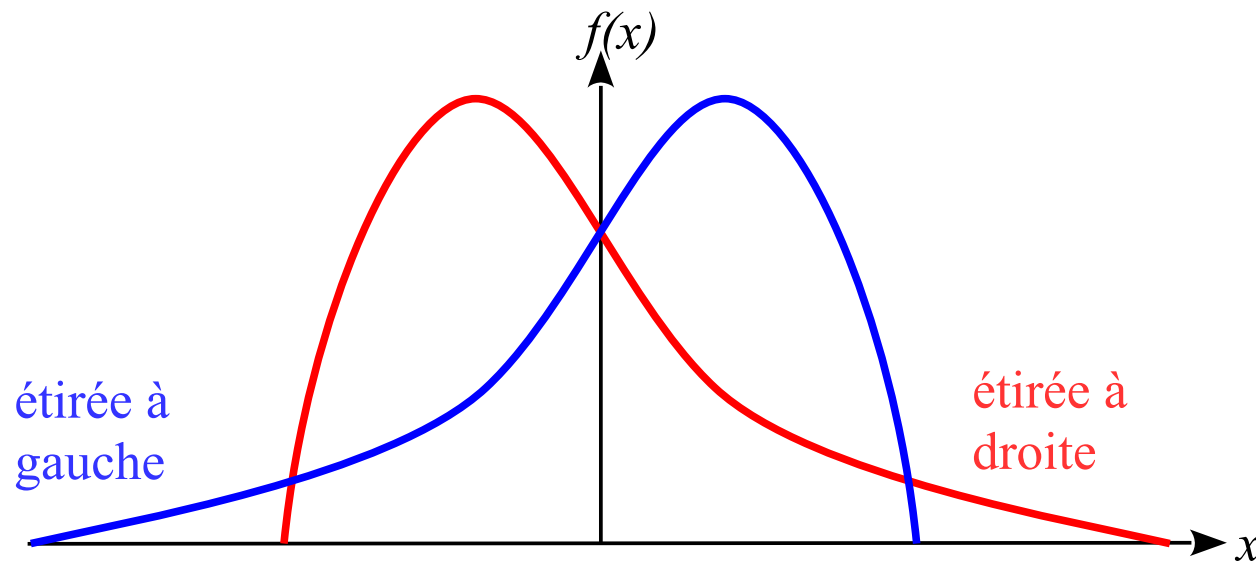
## 5- Asymétrie (skewness) :

$E[(X - \mu)^3]$  (moment centré d'ordre 3)

ou  $S(X) = E[(X - \mu)^3]/\sigma^3$  (Coefficient d'asymétrie de Fischer)

ou (moyenne – mode) / écart-type (1<sup>er</sup> coefficient d'asymétrie de Pearson)

Asymétrie négative	Asymétrie positive
densité étirée à <b>gauche</b> (par ex. à cause d'une valeur plafond)	densité étirée à <b>droite</b> (par ex. à cause d'une valeur plancher)
sur-représentation des valeurs « basses »	sur-représentation des valeurs « hautes »
moyenne < médiane mode « trop à droite »	moyenne > médiane mode « trop à gauche »

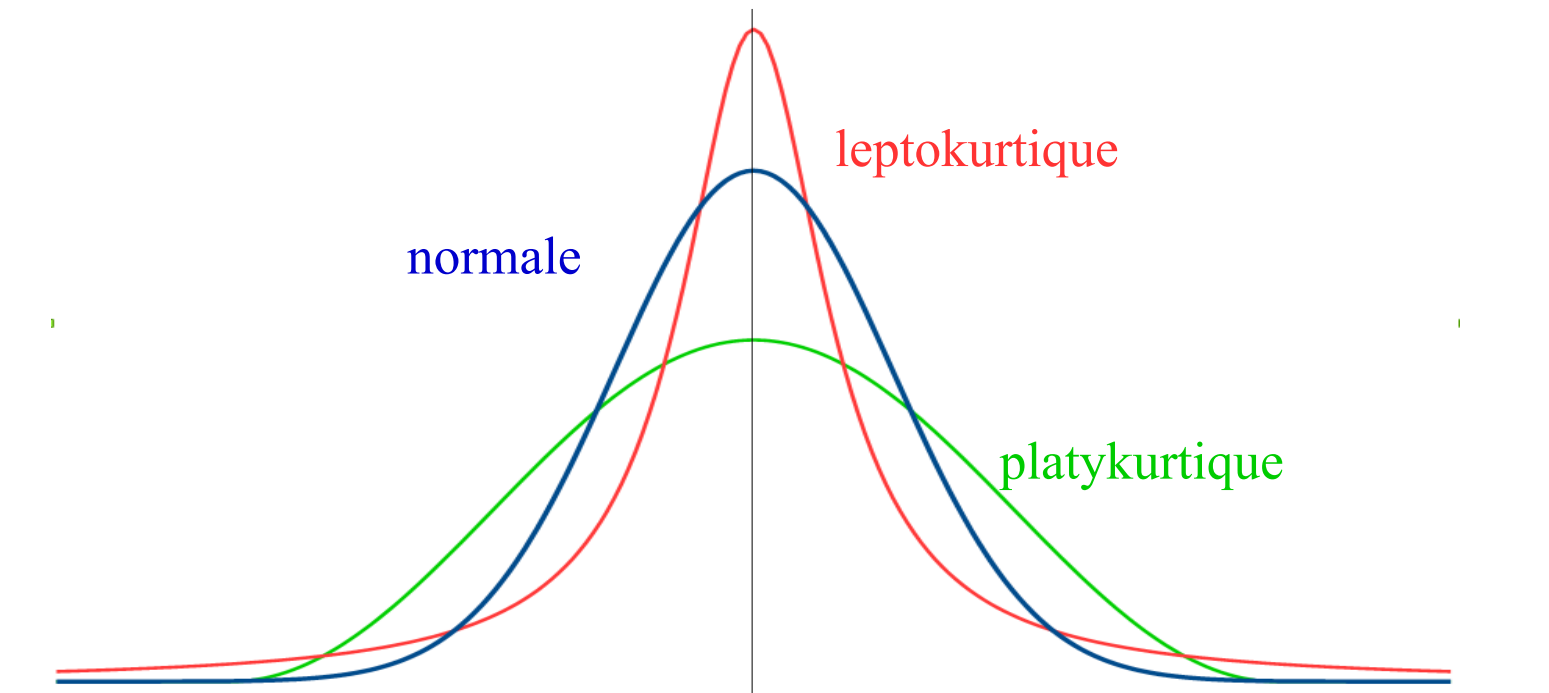


## 6- Aplatissement (kurtosis) :

$E[(X - E(X))^4]$  (moment centré d'ordre 4)

ou  $K(X) = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3$  (Coefficient d'aplatissement de Fischer)

Kurtosis (excédentaire) négative distribution <i>platykurtique</i>	Kurtosis (excédentaire) positive distribution <i>leptokurtique</i>
Trop de valeurs « moyennes » par rapport à une loi normale	Trop de valeurs « extrêmes » par rapport à une loi normale ( <i>queues épaisses</i> )



## 7- Les quantiles de la distribution :

Quantiles  
Fractiles : valeurs-seuils qui partitionnent des données en intervalles de taille égale

ex : centiles : partagent en 100  
déciles : partagent en 10  
quartiles : partagent en 4

- Si le 99<sup>ème</sup> centile est la valeur de  $X$  vaut 7 :  $Pr(X \leq 7) = 99 \%$
- Si la distribution de  $X$  est  $F(x)$ , le 99<sup>ème</sup> centile est  $F^{-1}(99 \%)$ .
- 5<sup>ème</sup> décile = 2<sup>ème</sup> quartile = médiane (partage en deux)

Généralisation : le  $q$ -quantile de la répartition de  $X$  est la valeur  $V$  telle que

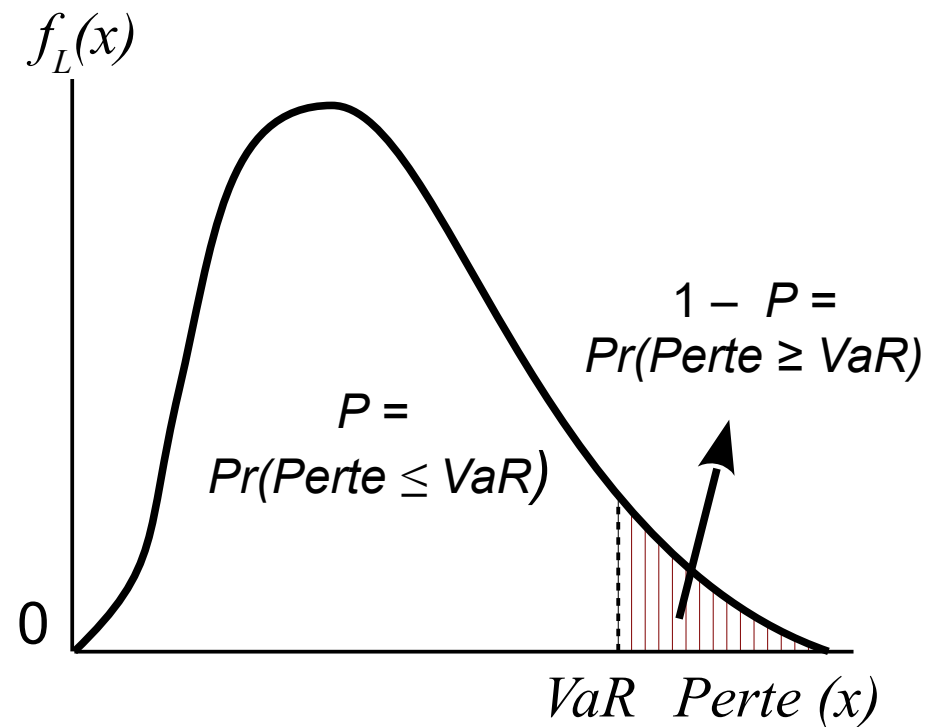
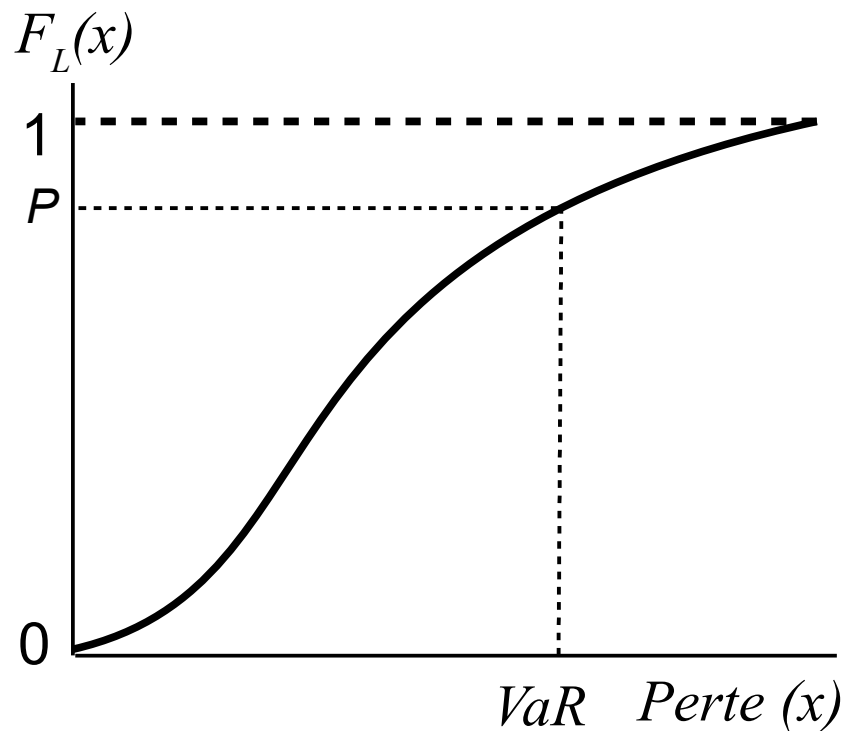
- $Pr(X \leq V) = q$
- $q = F^{-1}(P)$



## Exemple : Value-at-risk d'un portefeuille

« Si la VaR d'un portefeuille est de 1M€ à 10 jours au seuil de 99% , il y a 99% de chances que la perte à 10 jours subie n'excède pas 1 M€ »

- à partir de la distribution des pertes à 10 jours :  $Pr(\text{Perte} \leq VaR) = P$   
→ **VaR au seuil  $P$  = «  $P$  quantile » de la distribution des pertes**



## ANNEXE 2 : Exemples de fonctions de répartition :

### 1- Loi de Bernoulli

- $X$  peut prendre deux valeurs, 1 si « succès », ou 0 si « échec » : « épreuve »
- $Pr(X = 1) = p$  ;  $Pr(X = 0) = 1 - p$ .
- $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$

→ la valeur du château de Moulinsart...

### 2- Loi binomiale : $X \sim B(n, p)$

- loi du nombre de succès dans  $n$  « épreuves » de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ .

- $Pr(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$  où  $k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times 2 \times 1$

- $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1 - p)$

### 3- Loi de Poisson : $X \sim P(\lambda)$

- nombre de succès dans des « épreuves » de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ , répétées indéfiniment, à nombre moyen de succès donné ( $\lambda$ )
- loi du nombre d'événements indépendants sur une période donnée, survenant en moyenne  $\lambda$  fois durant cette période (« loi des événements rares »)

- $$Pr(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

- $$E(X) = V(X) = \lambda$$

la loi de Poisson peut être utilisée comme approximation d'une loi binomiale  $B(n, p)$  quand  $n$  est « grand » et  $p$  « petit » ( $n > 50$ ,  $p < 0,1$  et  $np < 10$ ) avec  $\lambda = np$ .

- Si 3% des dossiers de crédit arrivent au contentieux pendant l'année suivant la signature,  $e^{-3} 3^k / k!$  est la probabilité que  $k$  dossiers sur un lot de 100 deviennent contentieux avant un an.

#### 4- Loi uniforme : $X \sim U(a, b)$

toutes les valeurs de l'intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  sont équiprobables

- $Pr(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$  et  $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- $E(X) = (a + b)/2$  et  $V(X) = (b - a)^2/12$

Un prêt à un an de 10 M€ au taux d'intérêt de 2 % a une probabilité de défaut de 1,25%. Le taux de recouvrement en cas de défaut est uniforme sur  $[0; 1]$ .

Quelle est la fonction de répartition du revenu du prêt pour la banque ?

## 5- Loi normale (gaussienne) : $X \sim N(\mu, \sigma)$

- X peut prendre toutes les valeurs de  $\mathbb{R}$
- fonction de densité :  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
- $E(X) = \mu$  et  $V(X) = \sigma^2$

loi normale centrée réduite :  $N(0, 1)$

- $x \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow (x-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$
- $y \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$

Pour une variable gaussienne :

- distribution symétrique  $\rightarrow skewness = 0$
- distribution mésokurtique  $\rightarrow kurtosis = 0$

## Théorème central-limite

Lindeberg et Lévy :

- Une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , indépendantes de même loi et de même paramètres ayant une variance finie  $\sigma^2$  (et donc une espérance  $\mu$ ) vérifie :

la somme centrée et réduite  $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right)$  converge en loi vers  $N(0,1)$ .

la moyenne centrée et réduite  $\frac{1}{\sigma^2/n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right)$  converge en loi vers  $N(0,1)$ .

Lyapunov :

- Une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , indépendantes ayant chacune un moment d'ordre 3 (donc une variance finie  $\sigma_i^2$  une espérance  $\mu_i$ ) vérifie :

$\frac{1}{\sigma_\Sigma} \left( \sum_{i=1}^n X_i - \mu_\Sigma \right)$  converge en loi vers  $N(0,1)$  avec  $\mu_\Sigma = \sum_{i=1}^n \mu_i$  et  $\sigma_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

## Conséquence :

- la loi normale est la loi limite de toutes les lois stables dans l'addition

par exemple : la loi normale est la loi limite de la loi binomiale quand  $n \rightarrow \infty$

- **En finance :**

On découpe la période de mesure de rentabilité en  $T$  sous-périodes

$R_1 = \ln V_1 - \ln V_0 \rightarrow$  rentabilité logarithmique sur la période  $[0, 1]$

$r_t = \ln V_t - \ln V_{t-1} \rightarrow$  rentabilité logarithmique sur la sous-période  $[t-1, t]$

$R_1 = \sum_{t=1}^T r_t$  : pour  $T$  « assez grand » on peut considérer que  $R_1$  suit une loi normale...

- la loi normale est la loi qui régit les phénomènes ayant des causes multiples, indépendantes, aux effets additifs et de faible ampleur (aucune cause ne domine)  
 $\rightarrow$  « loi des effets additifs »

## 6- Loi log-normale : $X \sim \text{LogN}(\mu, \sigma)$

- $X$  peut prendre toutes les valeurs strictement positives de  $\mathbb{R}$

- $\ln X \sim N(\mu, \sigma)$

- fonction de densité :  $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$

- $E(x) = e^{\mu + \sigma^2/2}$  et  $V(x) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}$

le logarithme transforme un produit en somme  $\rightarrow$  « loi des effets multiplicatifs »

### En finance :

$R_1 = \ln V_1 - \ln V_0$  suit une loi normale  $\rightarrow V_1$  suit une loi normale log-normale



## ANNEXE : Risque additif vs risque multiplicatif

risque additif (ou absolu) :  $w = w_0 + x$

risque multiplicatif (ou relatif) :  $w = w_0 (1 + y)$

les deux sont liés...  $y = x/w_0$

On suppose des risques purs :  $E[x] = 0$  et  $E[y] = 0$

prime de risque absolu :  $\pi_A$  tel que  $u(w_0 - \pi_A) = E[u(w_0 + x)]$

*somme que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur*

prime de risque relatif :  $\pi_R$  tel que  $u(w_0 (1 - \pi_R)) = E[u(w_0 (1 + y))]$

*part de richesse que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur*

les deux primes sont liées et de même signe...  $\pi_R = \pi_A/w_0$

## approximation de la prime de risque relatif :

$$\begin{aligned} \pi_R &= \pi_A/w_0 \\ \pi_A &\approx -\frac{1}{2} \sigma^2 u''(w_0)/u'(w_0) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \pi_R \approx \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{-w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)} \right) = \frac{\sigma^2}{2} w_0 A(w_0)$$

Coefficient d'aversion relative pour le risque :  $R(w_0) = \frac{-w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)} = w_0 A(w_0)$

- l'opposé de l'élasticité de l'utilité marginale
- indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1 % ( $\neq$  aversion absolue pour le risque, qui indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1€, ou 1\$...)
- n'a pas d'unité ( $\neq$  aversion absolue pour le risque)
- effet de la richesse sur l'aversion relative pour le risque :  
on suppose généralement (Arrow) : l'aversion relative pour le risque ne diminue pas quand la richesse augmente

ex : « constant relative risk aversion » (CRRA) :  $u(w) = \frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha} \dots R(w) = \alpha$