Le choix rationnel face au risque

Objectif :

savoir expliquer, appliquer, critiquer, les critères de choix rationnel face au risque
savoir expliquer les principaux concepts mathématiques et économiques utilisés

variables aléatoires ; fonction de répartition, densité ; Espérance mathématique, variance ; écart-type, Asymétrie (skewness), Aplatissement (kurtosis), quantiles, Value-at-risk d'un portefeuille ; Loi de Bernoulli, binomiale, de Poisson, uniforme, normale, log-normale ; Covariance ; Coefficient de corrélation ; état de la nature ; biens contingents ;
paradoxe de Saint-Pétersbourg ; Théorème de l'Utilité Espérée (Von Neumann et Morgenstern) ; Aversion pour le risque ; degré d'aversion absolue ou relative pour le risque ; riscophobe, riscophile, neutre au risque ; équivalent-certain d'un risque, prime de risque, prix d'achat, prix de vente ; Représentation graphique de la prime de risque et de l'équivalent-certain ; fonction d'utilité DARA, CRRA ; mutualisation, diversification et partage des risques ; théorème d'Arrow et Lind ; Dominance stochastique d'ordre un, d'ordre deux ; étalement de la distribution à moyenne constante (*mean preserving spread*) ;
Paradoxe d'Allais ; Axiome d'indépendance ; règle de Bayes ; finance comportementale ; biais cognitifs ; théorie des perspectives (prospect theory) de Kahneman et Tversky, aversion aux pertes ; paradoxe d’Ellsberg, aversion à l’ambiguïté.

Plan :

1- LE RISQUE – rappels sur les variables aléatoires
2- LE CHOIX RATIONNEL EN SITUATION DE RISQUE
3- MUTUALISATION, DIVERSIFICATION ET PARTAGE DES RISQUES
4- PARMI DEUX « RICHESSES », QUELLE EST LA « PLUS RISQUÉE » ?
5- ASSURANCE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE
6- PARADOXE D'ALLAIS ET AXIOME D'INDÉPENDANCE
7- FINANCE COMPORTEMENTALE

Bibliographie :

Varian, *Introduction à la microéconomie*, De Boeck

Delsart & Vaneecloo (2010), *Probabilités, variables aléatoires, lois classiques*, Presses Universitaires du Septentrion

Pradier (2006), *La notion de risque en économie*, collection Repères, La découverte

Moureau & Rivaud-Danset (2004), *L'incertitude dans les théoriques économiques*, collection Repères, La découverte

Eeckhoudt, Gollier & Schlessinger (2005) *Economic and Financial Decisions under Risk*., Princeton University Press

Gravelle & Rees (2004), *Microeconomics*, Prentice Hall

Eber & Willinger (2012), *L'économie Expérimentale*, collection Repères, La découverte

Barberis & Thaler (2003), « ASurvey of behavioral finance », in G.M. Constantinides, M. Harris & R. Stulz, *Handbook of the Economics of Finance*, Elsevier

Erta & al. (2013), *Applying Behavioural Economics at the Financial Conduct Authority*, FCA occasional-paper n°1

Coulon (2015), *Guide pratique de la finance comportementale : Pour l'investisseur individuel et le conseiller financier*, Gualino

1- LE RISQUE – rappels sur les variables aléatoires

« le futur est incertain »… : différentes *circonstances* sont possibles
plusieurs alternatives sont probables...

L'incertitude / le risque est au cœur de la logique financière.

Évaluer un actif = actualiser des cash-flows futurs... inconnus
→ prévoir / se tromper

- risque économique : variabilité des cash-flows d'exploitation
- risque financier (de détresse financière) : lié à l'endettement

Épargner = Composer un portefeuille d'actifs → choisir un « profil de risque ».

Représenter le risque par une « variable aléatoire »

- probabilités
- valeurs possibles

Gérer le risque : décider quel « niveau de risque » prendre,
par quels moyens y parvenir

1.1- EXEMPLE de représentation du risque par une variable aléatoire :

Le Capitaine Haddock est propriétaire du château de Moulinsart et dispose également de 100 k€ sur son compte en banque.
Le château est estimé à 3400 k€, mais il peut être endommagé par une expérience du Professeur Tournesol. Il y a une probabilité de 1% que le château subisse un dommage de 1000 k€, et une probabilité de 99% de ne subir aucun dommage.

Le Capitaine Haddock peut souscrire un contrat d'assurance, qui lui verse en cas de dommage une indemnité K (K est inférieur à 1000 k€), moyennant le paiement d'une prime γ K proportionnelle à l'indemnité.

Décrire la richesse du Capitaine Haddock selon que le château est assuré ou non…

1.2- RAPPELS sur les variables aléatoires :

Une variable aléatoire réelle **discrète** X peut prendre plusieurs valeurs réelles $\{x_1, \ldots x_i, \ldots x_N\}$ avec des probabilités $\{P_1, \ldots P_i, \ldots P_N\}$

- fonction de répartition : $F(x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$
  fonction de densité : $f(x_i)$ = Proba$(X = x_i)$
- $F(x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$ = Proba $(X = x_1$, ou $X = x_2 \ldots$ ou $X = x_i) = \sum_{j=1}^{i} f(x_j)$

  $f(x_i)$ = Proba$(X = x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$ – Proba $(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Une variable aléatoire **continue** X prend des valeurs sur un intervalle $[x_{min}, x_{max}]$

- fonction de répartition : $F(x_i)$ = Proba $(X \leq x_i)$; $F(x_i) = \int_{j=x_{min}}^{x_i} f(x)\,dx$

  fonction de densité : $f(x_i) = F'(x_i)$

NB : $0 \leq F(x_i) \leq 1$; $0 \leq f(x_i) \leq 1$; $\sum_{j=1}^{N} f(x_j) = 1$ ou $\int_{j=x_{min}}^{x_{max}} f(x)\,dx = 1$

Espérance mathématique = moyenne pondérée par les probabilités

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} P_i x_i$$ → un indicateur de **niveau**

→ règle de calcul : $\boxed{E(aX+b) = a\,E(X) + b}$

- aX + b est une variable aléatoire qui peut peut les valeurs {a x_1 + b, … a x_N + b} avec des probabilités {P_1, … P_N}
- « centrer la variable » = soustraire l'espérance mathématique pour obtenir une variable d'espérance nulle : Y = X – E[X] → E(Y) = E[X] – E[X] = 0

f(X) est une variable aléatoire qui peut peut les valeurs {$f(x_1)$, … $f(x_N)$} avec des probabilités {P_1, … P_N}
→ inégalité de Jensen : $\boxed{f(x) \text{ concave } \leftrightarrow f(E[X]) > E[f(X)]}$

Et pour des variables aléatoires continues ?

Variance = moyenne des carrés des écarts à la moyenne : $\boxed{V(X) = E[(X - E(X))^2]}$

= moyenne des carrés moins carré de la moyenne : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$

$$V[X] = \sum_{i=1}^{N} P_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} P_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$$

Écart-type= racine carrée de la variance : $\sigma_X^2 = V(X)$

→ des indicateurs de **dispersion** (« risque »)

Règle de calcul : $\boxed{V(aX+b) = a^2\, V(X)}$ et $\sigma_{aX+b} = a\, \sigma_X$

Centrer une variable ne modifie pas sa variance : $Y = X - E[X] \rightarrow V(Y) = V(X)$

Variance = « moment centré d'ordre 2 »... car $V(X) = E[(X - E(X))^2]$

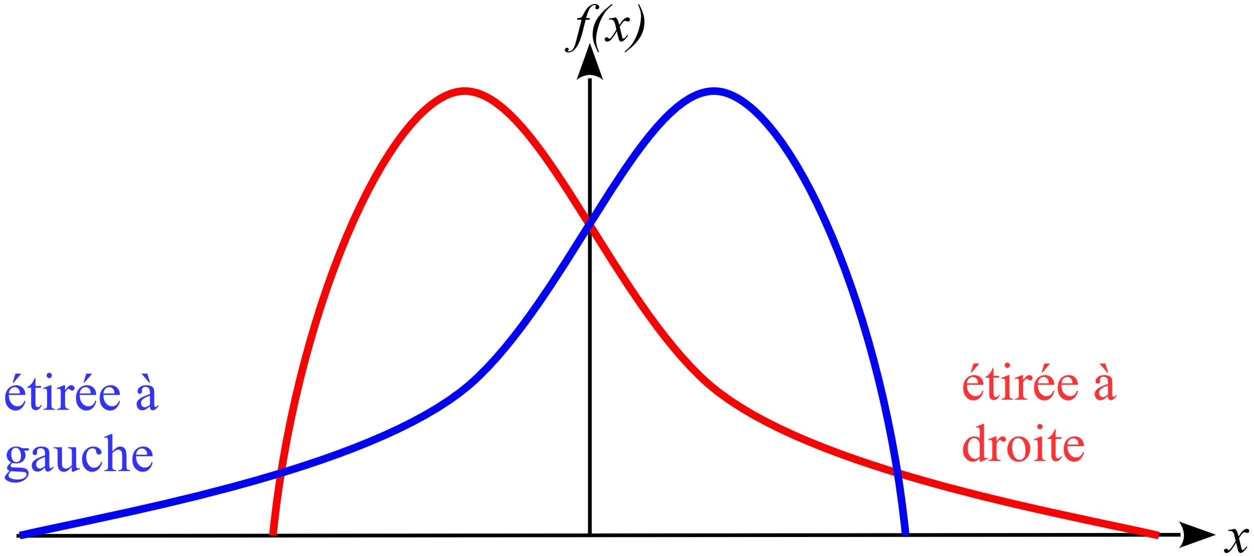
Asymétrie (skewness) :

$E[(X-\mu)^3]$ (moment centré d'ordre 3)

ou $S(X) = E[(X-\mu)^3]/\sigma^3$ (Coefficient d'asymétrie de Fischer)

ou (moyenne – mode) / écart-type (1^er coefficient d'asymétrie de Pearson)

Asymétrie négative	Asymétrie positive
densité étirée **à gauche** (par ex. à cause d'une valeur plafond)	densité étirée **à droite** (par ex. à cause d'une valeur plancher)
sur-représentation des valeurs « basses »	sur-représentation des valeurs « hautes »
moyenne < médiane mode « trop à droite »	moyenne > médiane mode « trop à gauche »

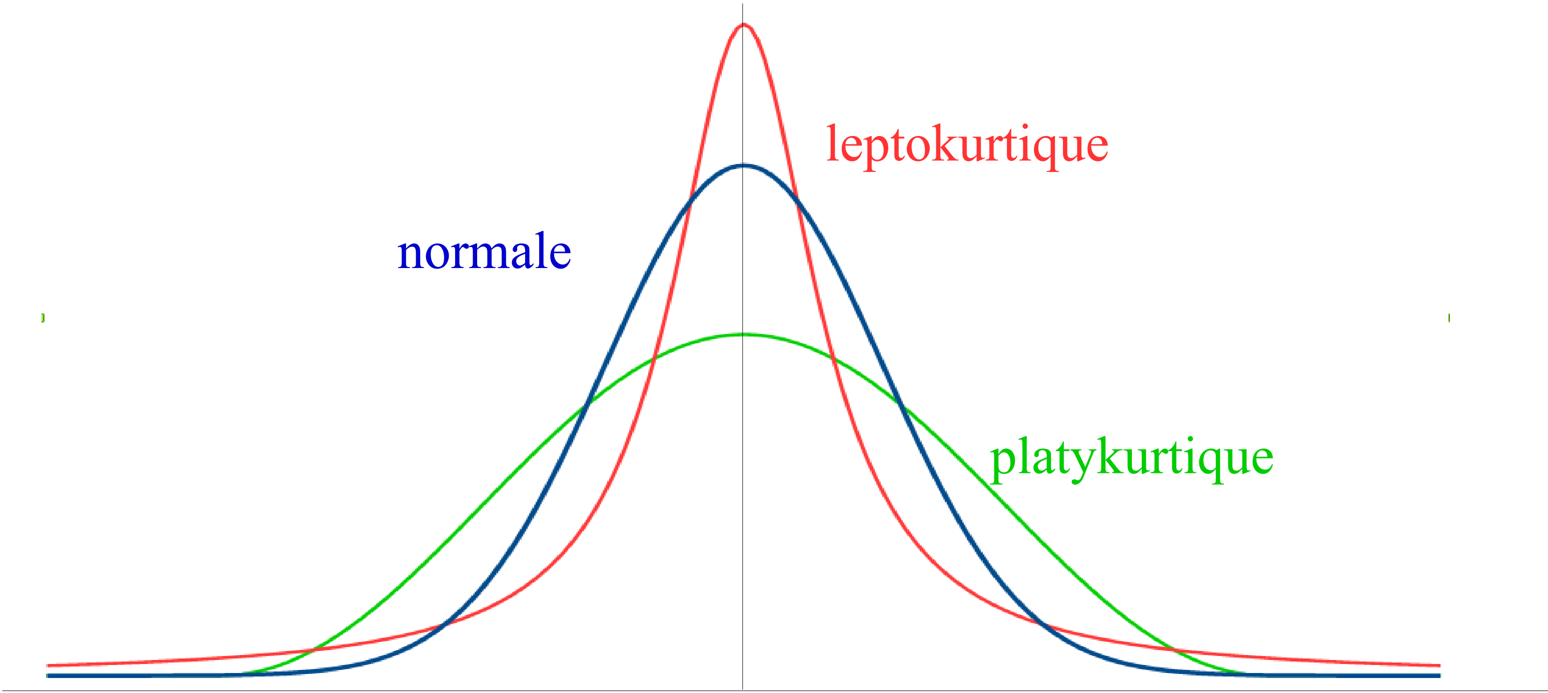


Aplatissement (kurtosis) :

$E[(X - E(X))^4]$ (moment centré d'ordre 4)

ou $K(X) = E[(X - \mu)^4]/\sigma^4 - 3$ (Coefficient d'aplatissement de Fischer)

Kurtosis (excédentaire) négative distribution *platykurtique*	Kurtosis (excédentaire) positive distribution *leptokurtique*
Trop de valeurs « moyennes » par rapport à une loi normale	Trop de valeurs « extrêmes » par rapport à une loi normale (*queues épaisses*)



Les quantiles de la distribution :

Quantiles
Fractiles : valeurs-seuils qui partitionnent des données en intervalles de taille égale

ex : centiles : partagent en 100
déciles : partagent en 10
quartiles : partagent en 4

- Si le 99ème centile est la valeur de *X* vaut 7 : $Pr(X \leq 7) = 99\ \%$
- Si la distribution de *X* est $F(x)$, le 99ème centile est $F^{-1}(99\ \%)$.

- 5ème décile = 2ème quartile = médiane (partage en deux)

Généralisation : le q-quantile de la répartition de *X* est la valeur *V* telle que

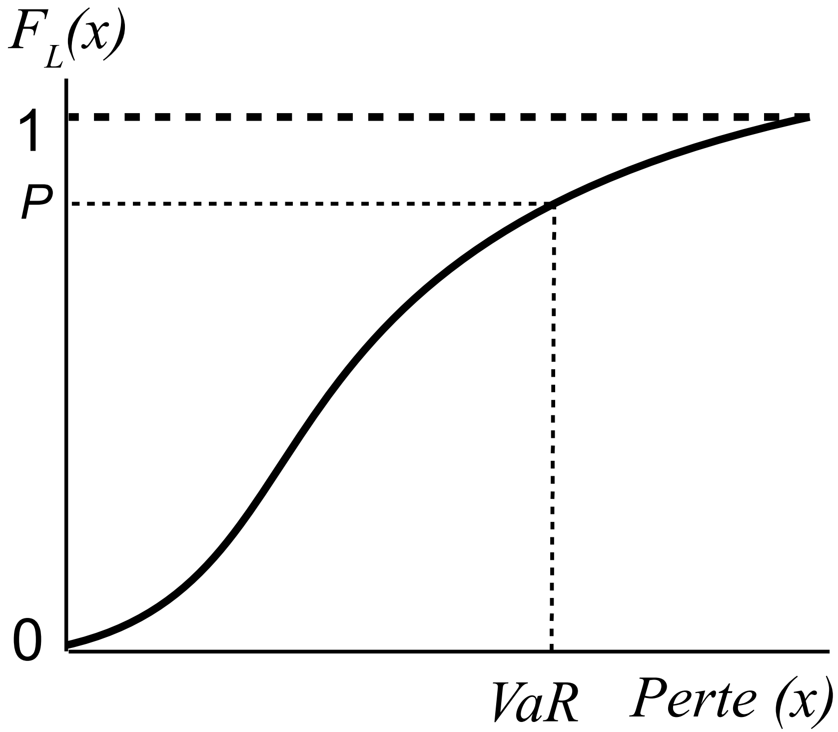
- $Pr(X \leq V) = q$
- $q = F^{-1}(P)$

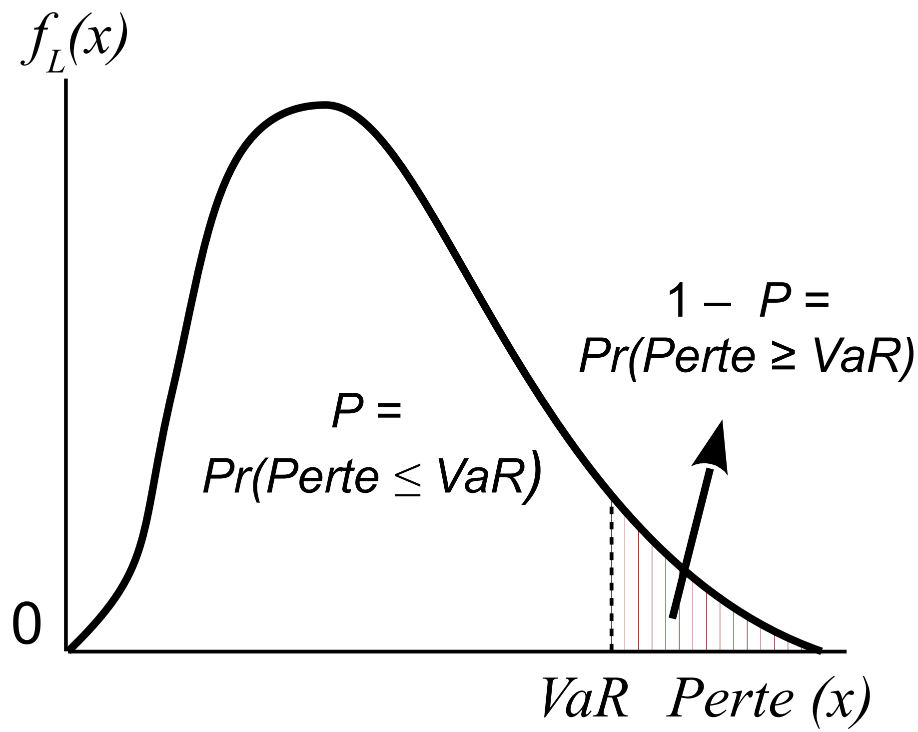
Exemple : Value-at-risk d'un portefeuille

« Si la VaR d'un portefeuille est de 1M€ à 10 jours au seuil de 99% , il y 99% de chances que la perte à 10 jours subie n'excède pas 1 M€ »

- à partir de la distribution des pertes à 10 jours : $Pr(\text{Perte} \leq VaR) = P$

  → **VaR au seuil *P* = « *P* quantile » de la distribution des pertes**





1.3- Exemples de fonctions de répartition :

a- Loi de Bernoulli

- X peut prendre deux valeurs, 1 si « succès », ou 0 si « échec » : « épreuve »

- $Pr(X = 1) = \text{p}$; $Pr(X = 1) = 1 - p$.
- $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$

→ la valeur du château de Moulinsart...

b- Loi binomiale : $X \sim B(n, p)$

- loi du nombre de succès dans n « épreuves » de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

- $Pr(X=k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ où $k!=k\times(k-1)\times(k-2)\times\ldots\times 2\times 1$
- $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

c- Loi de Poisson : $X \sim P(\lambda)$

- nombre de succès dans des « épreuves » de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, répétées indéfiniment, à nombre moyen de succès donné (λ)
- loi du nombre d'événements indépendants sur une période donnée, survenant en moyenne λ fois durant cette période (« loi des événements rares »)

- $Pr(X=k)=\dfrac{e^{\lambda}\lambda^{k}}{k!}$
- $E(X) = V(X) = \lambda$

la loi de Poisson peut être utilisée comme approximation d'une loi binomiale $B(n, p)$ quand n est « grand » et p « petit » ($n > 50$, $p < 0{,}1$ et $np < 10$) avec $\lambda = np$.

- Si 3% des dossiers de crédit arrivent au contentieux pendant l'année suivant la signature, $e^{3}3^{k}/k!$ est la probabilité que k dossiers sur un lot de 100 deviennent contentieux avant un an.

d- Loi uniforme : $X \sim U(a, b)$

toutes les valeurs de l'intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$ sont équiprobables

- $Pr(X \leq x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ et $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
- $E(X) = (a + b)/2$ et $V(X) = (b - a)^2/12$

Un prêt à un an de 10 M€ au taux d'intérêt de 2 % a une probabilité de défaut de 1,25%. Le taux de recouvrement en cas de défaut est uniforme sur [0; 1].

Quelle est la fonction de répartition du revenu du prêt pour la banque ?

e- Loi normale (gaussienne) : $X \sim N(\mu, \sigma)$

- X peut prendre toutes les valeurs de de $\mathbb{R}$
- fonction de densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
- $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

loi normale centrée réduite : $N(0, 1)$

- $x \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow (x-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$
- $y \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$

Pour une variable gaussienne :

- distribution symétrique → *skewness* = 0
- distribution mésokurtique → *kurtosis* = 0

Théorème central-limite

Lindeberg et Lévy :

- Une suite de variables aléatoires X_1, X_2, … X_n, indépendantes de même loi et de même paramètres ayant une variance finie σ^2 (et donc une espérance μ) vérifie :

  la somme centrée et réduite $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)$ converge en loi vers $N(0,1)$.

  la moyenne centrée et réduite $\frac{1}{\sigma^2/n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)$ converge en loi vers $N(0,1)$.

Lyapunov :

- Une suite de variables aléatoires X_1, X_2, … X_n, indépendantes ayant chacune un moment d'ordre 3 (donc une variance finie σ_i^2 une espérance μ_i) vérifie :

  $\frac{1}{\sigma_\Sigma}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_\Sigma\right)$ converge en loi vers $N(0,1)$ avec $\mu_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2$ et $\sigma_\Sigma{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

Conséquence :

- la loi normale est la loi limite de toutes les lois stables dans l'addition

par exemple : la loi normale est la loi limite de la loi binomiale quand n $\rightarrow \infty$

- **En finance :**

  On découpe la période de mesure de rentabilité en T sous-périodes

  $R_1 = \ln V_1 - \ln V_0$ $\quad\rightarrow$ rentabilité logarithmique sur la période [0, 1]

  $r_t = \ln V_t - \ln V_{t-1}$ $\quad\rightarrow$ rentabilité logarithmique sur la sous-période $[t-1, t]$

$R_1 = \sum_{t=1}^{T} r_t$: pour T « assez grand » on peut considérer que R_1 suit une loi normale...

- la loi normale est la loi qui régit les phénomènes ayant des causes multiples, indépendantes, aux effets additifs et de faible ampleur (aucune cause ne domine)

  $\rightarrow$ « loi des effets additifs »

f- Loi log-normale : $X \sim LogN(\mu, \sigma)$

- X peut prendre toutes les valeurs strictement positives de $\mathbb{R}$
- $\ln X \sim N(\mu, \sigma)$
- fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$
- $E(x) = e^{\mu+\sigma^2/2}$ et $V(x) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$

le logarithme transforme un produit en somme → « loi des effets multiplicatifs »

En finance :

$R_1 = \ln V_1 - \ln V_0$ suit une loi normale → V_1 suit une loi normale log-normale

1.4- Couple de variables aléatoires :

distribution jointe : $F(x_{0,} y_0) = Pr(X \leq x_0 \, et \, Y \leq y_0)$

→ règle de calcul : $\boxed{E(aX+bY) = a\,E(X) + b\,E(Y)}$

→ règle de calcul : $\boxed{V(aX+bY) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y) + 2\,a\,b\,Cov(X,Y)}$

Covariance de X et de Y = espérance du produit – produit des espérances :

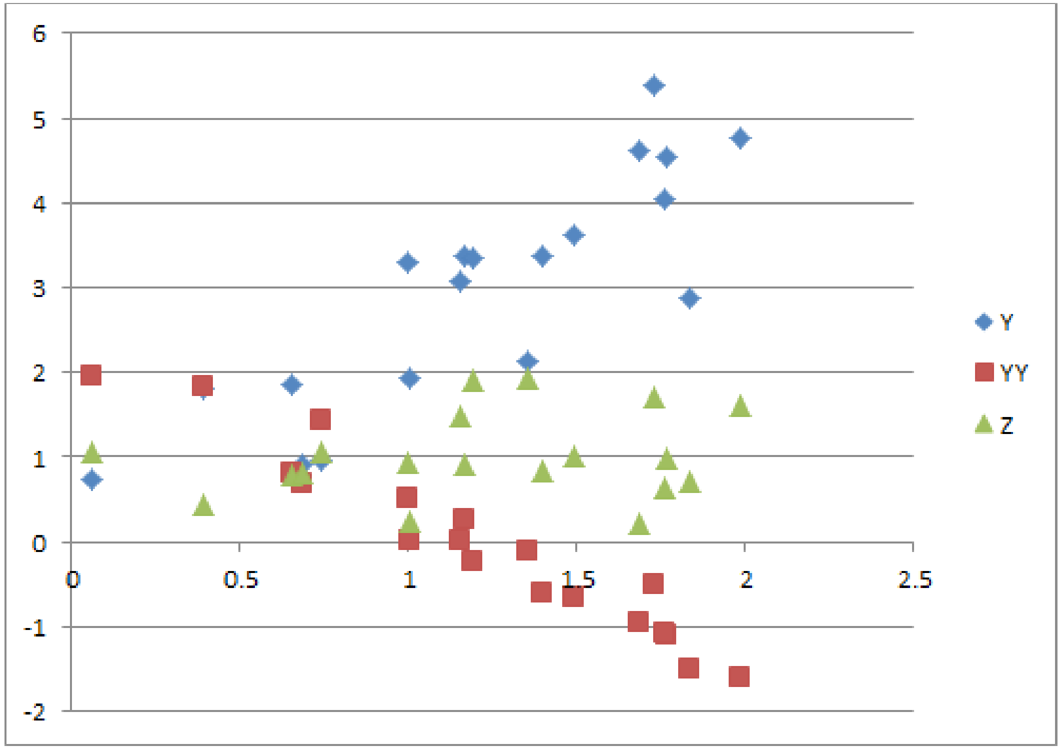
$$\boxed{Cov(X, Y) = E[X\,Y] - E[X]\,E[Y]}$$

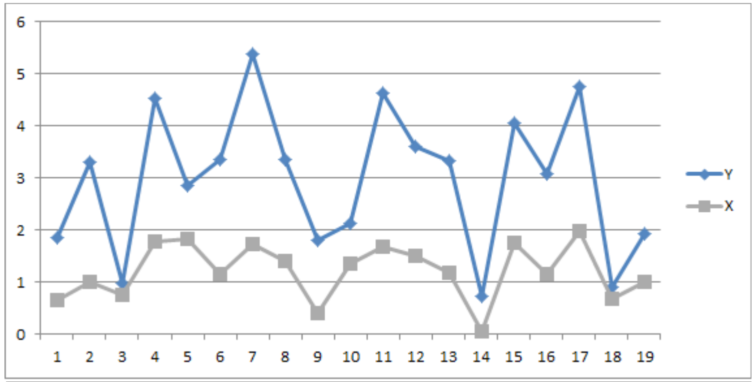
→ règle de calcul : $\boxed{Cov(aX, Y+Z) = a\,Cov(X, Y+Z) = a\,Cov(X, Y) + a\,Cov(X, Z)}$

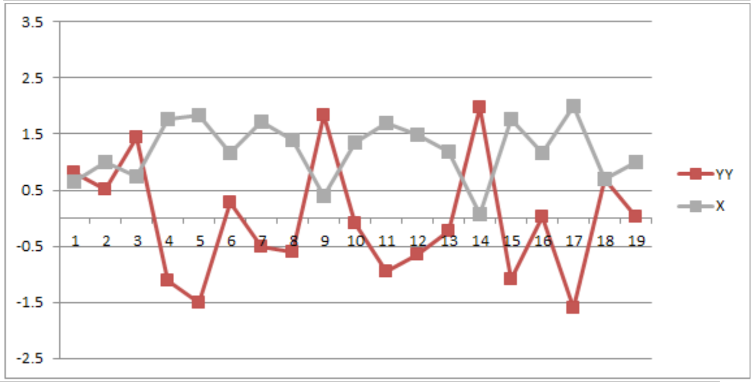
Coefficient de corrélation : rapport de la covariance au produit des écart-types :

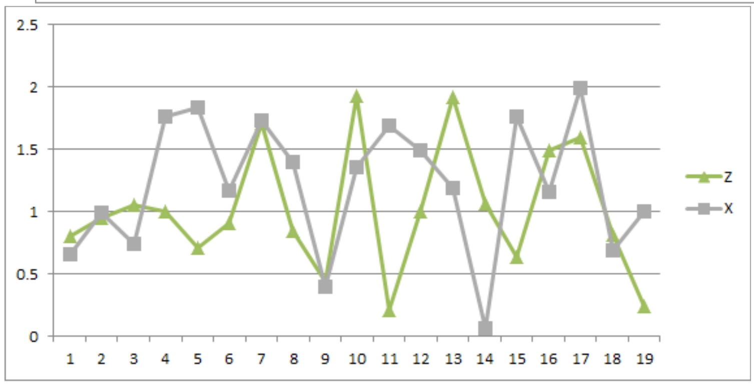
$$\boxed{\rho(X, Y) = Cov(X, Y) / (\sigma_X\,\sigma_Y)}$$

Exemple : ρ(X,Y) ≈ 0,85 ; ρ(X,YY) ≈ – 0,97 ; ρ(X,Z) ≈ 0,18









1.5- Source du « risque » = « états de la nature »

un **état de la nature** = une combinaison de valeurs des différentes variables décrivant l'environnement du décideur

- l'ensemble des états de la nature est exhaustif
- les états de la nature sont mutuellement exclusifs
- les états de la nature sont hors de contrôle du décideur

- l'ensemble des états de la nature est connaissance commune
- chaque décideur reconnaît l'état de la nature qui se réalise
- chaque décideur assigne une distribution de probabilité aux états de la nature qui obéit aux lois usuelles :
  - $0 \leq \Pr(\text{état } s) \leq 1$
  - $\Pr(\text{état } s) = 1 \rightarrow$ il est certain que l'état s se produira
  - $\Pr(\text{état } s) = 0 \rightarrow$ il est certain que l'état s ne se produira pas
  - Pr(état s <u>ou</u> état s') = Pr(état s) + Pr(état s') ; Pr(état s <u>et</u> état s') = 0
  - un au moins des états doit se produire : $\sum \Pr(\text{état } s) = 1$

Biens contingents et perspectives conditionnelles de consommation

les biens (futurs) et les dotations (futures) sont « conditionnels »
ou « contingents » à l'état de la nature

→ les préférences s'expriment sur des paniers de biens contingents
(« perspectives conditionnelles de consommation »)
→ le comportement peut être étudié à l'aide des outils usuels de la théorie des choix

En finance : représentation du risque par une « **loterie monétaire** »

- monétaire : biens futurs = quantités de monnaie (richesses, cash-flows)
- loterie = perspective conditionnelle : variable aléatoire réelle
    - des valeurs possibles
    - des probabilités d'occurrence de ces valeurs

→ fonction de répartition

Le décideur doit choisir son action préférée…
→ représenter chaque action comme une « loterie »
→ caractériser les préférences sur les loteries

Exemple : un seul parmi deux états se produira en $t = 1$

- bonne conjoncture (H), avec probabilité p ;
- mauvaise conjoncture (L), avec probabilité $(1 - p)$.

- Le cash-flow d'un projet d'investissement prend deux valeurs, selon l'état de la nature.

Revenu net		état de la nature	
		bonne conjoncture (H)	mauvaise conjoncture (L)
probabilité		50 %	50 %
plan d'action	Investir dans (A)	50	10
	Investir dans (B)	30	30

Choisir entre deux loteries :

Investir dans (A)

50 % « H » → revenu = 50

50 % « L » → revenu = 10

Investir dans (B)

50 % « H » → revenu = 30

50 % « L » → revenu = 30

Investir dans (A)

50 % 50

0 % 30

50 % 10

Investir dans (B)

0 % 50

100 % 30

0 % 10

→ choisir une action =	choisir une distribution de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles

1.6- Trois applications

Application 1 : Une entreprise a besoin de 100 k€ pour 1 an. Son EBE est aléatoire

70 % « état H » : demande élevée → EBE = 160 k€

30 % « état L » : demande basse → EBE = 50 k€

→ EBE « espéré » = … écart-type de l’EBE =

Banque : coût des ressources (rémunération des dépôts) : 2 %

Banque et entreprise négocient un **contrat de prêt (contrat de dette)** :

- taux d'intérêt : r → l'entreprise paye $(1+r)\times 100\,k€$ si EBE suffisant
- responsabilité limitée : l'entreprise est liquidée et la banque saisit 50k€ si l'emprunteur ne peut pas rembourser
- pas de coût de vérification du résultat
- coût de faillite (pour les emprunteurs) : 70k€ (rémunération non versée, frais de procédure, coût des emprunts futurs, ...)

état	Résultat net Entreprise	Résultat net Banque	proba
H : prêt remboursé	$(60\,\% - r) \times 100\text{k}\,€$	$(r - 2\,\%) \times 100\text{k}\,€$	70 %
L : prêt non remboursé	–70k€	–52k€	30 %
Résultat net moyen (espérance mathématique)	...	...	
Écart-type du résultat net	...	...	

$r = 25\ \%$

H : prêt remboursé	35k€	23k€	70 %
L : prêt non remboursé	–70k€	–52k€	30 %
Résultat net moyen (espérance mathématique)	3,5k€	0,5k€	
Écart-type du résultat net	48,12k€	34,37k€	

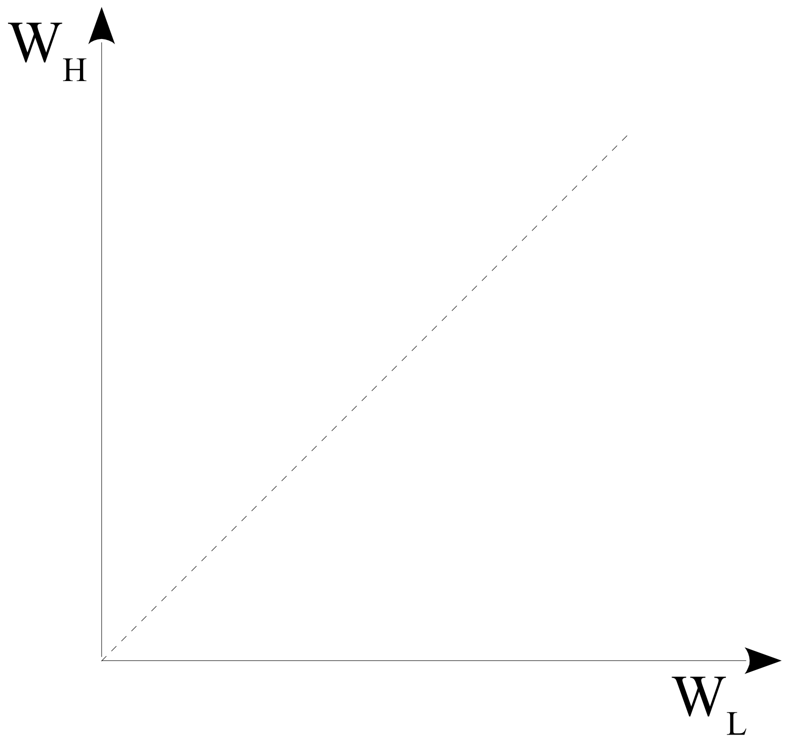
Application 2 :

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

- Un fonds en UC rapporte soit 50 % (avec proba 60%) soit –20 % (proba 40%).
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

Il décident de placer une proportion x en UC (et 1 – x en fonds euros).
Quelle est leur « richesse » au moment de la retraite ?

richesse...	si $x = 0$	si $0<x<1$	si $x=1$
état H			
état L			
moyenne			
écart-type			



Application 3 :

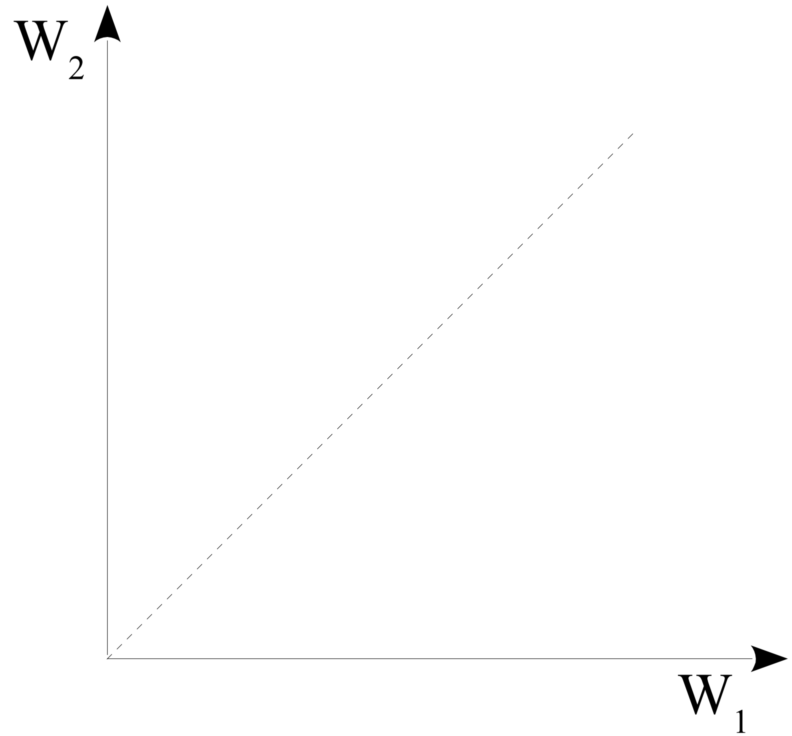
Mme M peut avoir besoin de dépenser sa richesse dans un an ou dans deux ans.
Elle investi $1 - x$ dans un actif « illiquide » et x dans un actif « liquide »

- actif illiquide, maturité 2 ans : rentabilité –100 % à un an, +50 % à deux ans
- actif liquide : rentabilité 0 %

Au moment d'investir, Mme M sait qu'elle a une proba :

- 20 % d'avoir besoin de dépenser dans un an (« précoce »)
- 80 % d'avoir besoin de dépenser dans deux ans (« tardive »)

richesse utile...	dans un an	dans deux ans
« précoce »		
« tardive »		
moyenne		
écart-type		



2- LE CHOIX RATIONNEL EN SITUATION DE RISQUE

2.1- Deux exemples

Exemple 1 : Choisir entre deux « loteries »

Choix 1 :

A	Rapporte • 100 M € à coup sûr	Choix : A : 8 B : 2
B	rapporte • 500 M € avec une probabilité de 98%, • 0 € avec une probabilité de 2% ;	

Choix 2 :

C	rapporte • 100 M € avec une probabilité de 1%, • 1 € avec une probabilité de 99%,	Choix : C : 4 D : 6
D	rapporte • 500 M € avec une probabilité de 0,98%, • 1 € avec une probabilité de 99%, • 0 avec une probabilité de 0,02% ;	

Synthèse des choix	A	B	total
C	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	
D	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	
total			

Exemple 2 : Choisir (encore) entre deux (autres) « loteries » :

Question 1 :

Supposons que vous êtes plus riches de 300 €. Que choisissez-vous ?

<table>
<tr><td>A'</td><td>• un gain certain de 100€</td><td rowspan="2">Choix :</td></tr>
<tr><td>B'</td><td>• 50 % de chance de gagner 200€
• 50 % de chance de ne rien gagner.</td></tr>
</table>

Question 2 :

Supposons que vous êtes plus riches de 500 €. Que choisissez-vous ?

C'	• une perte certaine de 100€	Choix :
D'	• 50 % de chance de perdre 200€ • 50 % de chance de ne rien perdre.	

Synthèse :

	C'	D'	total
A'	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	
B'	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	
total			

2.2- Le « paradoxe de Saint-Pétersbourg »

Bernoulli (1738)

VERSION 1 :

Un mendiant ne possède qu'un billet de loterie qui rapporte :

- 1 millions de RUB avec une probabilité de 50 %
- 0 avec une probabilité de 50 %

Le mendiant accepte de le vendre à un riche marchand contre 10000 RUB.

A-t-il eu raison ?

VERSION 1 :

Un mendiant ne possède qu'un billet de loto qui rapporte :

- 1 millions de RUB avec une probabilité de 50 %
- 0 avec une probabilité de 50 %

Le mendiant accepte de le vendre à un riche marchand contre 10000 RUB.

A-t-il eu raison ?

Question → quel critère d'évaluation du billet de loterie ?

Critère de Blaise **Pascal** :

- le « juste prix » est l'espérance mathématique du gain procuré par le billet
- ainsi, en moyenne, le bénéfice net du parieur est nul

Critère	Utilité de la richesse en gardant...	… en vendant	choix
Pascal	$50\% \times 1000k + 50\% \times 0 = 500k$	10k	garde

VERSION 2 :

On jette une pièce N fois jusqu'à obtenir « pile ». Le parieur gagne alors 2^N RUB.
A la cour de Saint-Pétersbourg, vers 1730, Nicolas Bernoulli n'a trouvé personne prêt à parier plus de 20 RUB.

→ « paradoxe » eu égard au *critère de décision de Pascal* (espérance de richesse)

VERSION 2 :

On jette une pièce N fois jusqu'à obtenir « pile ». Le parieur gagne alors 2^N RUB. A la cour de Saint-Pétersbourg, vers 1730, Nicolas Bernoulli n'a trouvé personne prêt à parier plus de 20 RUB.

→ « paradoxe » eu égard au *critère de décision de Pascal* (espérance de richesse)

séquence	P obtenu au lancer n°...	gain	probabilité
P	1	2	1/2
FP	2	2^2	1/4
FFP	3	2^3	1/8
FFFF……FFFFP ← N–1 fois →	N	2^N	$1/2^N$

$$\text{espérance du gain} = \frac{1}{2}\times 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^N\times 2^N+\ldots=+\infty$$

- Daniel Bernoulli (1738) :
  critère de décision = espérance d'une <u>fonction</u> de la richesse
  → logarithme népérien

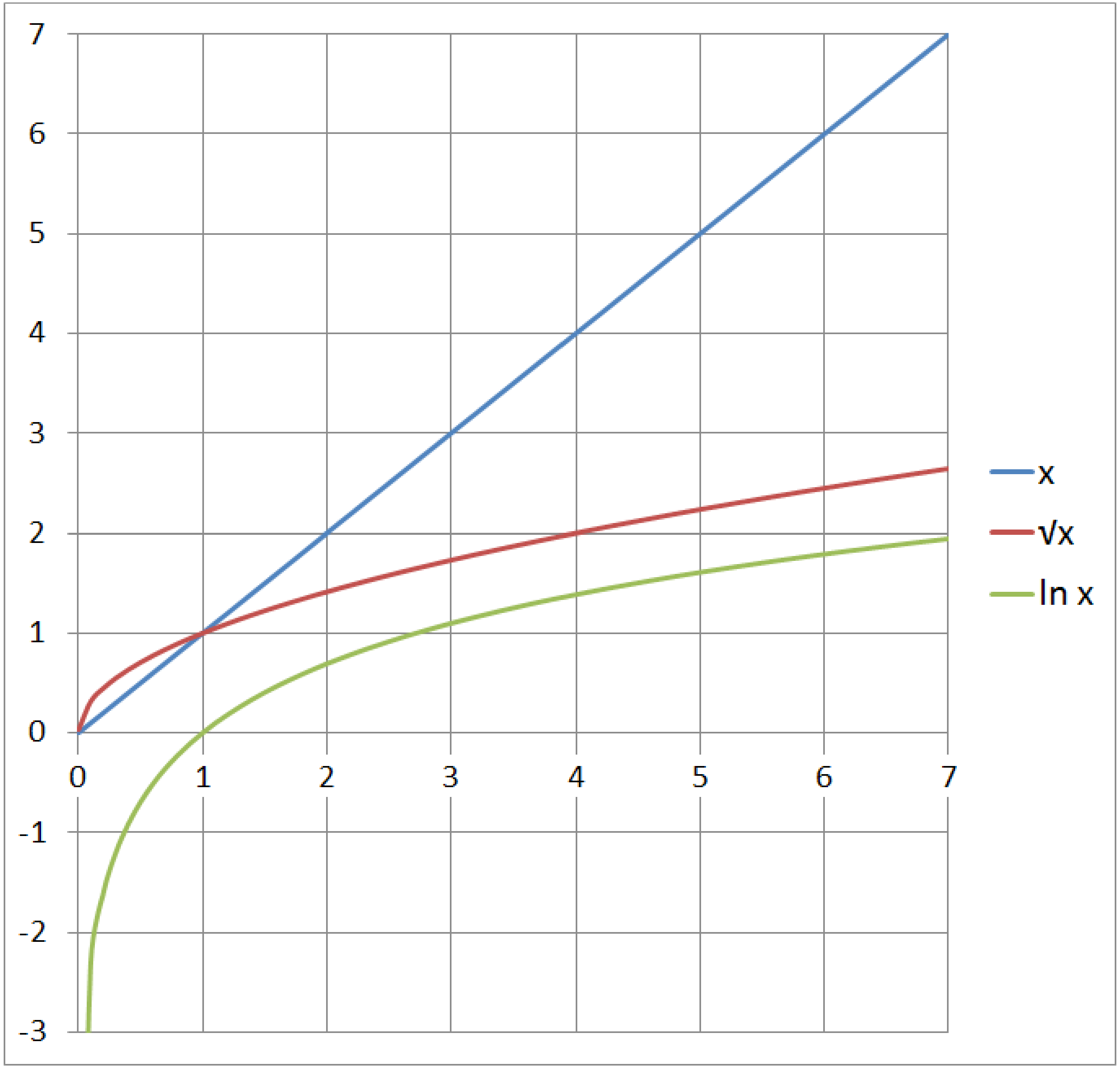
avec une richesse initiale de 1000, le prix du billet max. serait 10,95

- Gabriel Cramer (même époque) → racine carrée

avec une richesse initiale de 1000, le prix du billet max. serait 12,93

→ solution de Bernoulli axiomatisée par **Von Neumann et Morgenstern** (1944)
VNM

représentation de
x, $\sqrt{x}$ et $\ln x$
en fonction de x



2.3- Choix rationnel selon VNM : maximiser l'utilité espérée

Théorème de l'Utilité Espérée (Von Neumann – Morgenstern) :

Si les préférences d'un décideur sur l'ensemble des loteries vérifient quelques hypothèses […], alors il existe une fonction d'utilité (à valeurs réelles) définie sur l'ensemble des loteries, représentant les préférences, ayant la forme d'une « espérance d'utilités » des lots.

$$U(L) = \mathrm{E}[u(l)]$$

U(.) = utilité de la loterie ;

u(.) = utilité des lots (fonction d'utilité de VNM)

Loterie L donne des lots l_i avec probabilité p_i :

→ critères de Pascal ? De Bernoulli ? De Cramer ?

critère	$u(l)$	$U(L)$
Pascal	$u(l)=l$	$U(L)=p_1 l_1+p_2 l_2+\ldots+p_N l_N$
Bernoulli	$u(l)=\ln(l)$	$U(L)=p_1 \ln(l_1)+p_2 \ln(l_2)+\ldots+p_N \ln(l_N)$
Cramer	$u(l)=\sqrt{l}$	$U(L)=p_1 \sqrt{l_1}+p_2 \sqrt{l_2}+\ldots+p_N \sqrt{l_N}$

→ la décision du mendiant (que faire du billet de loto) ?

	Garder le billet	Vendre le billet
Richesse (loterie)	1 M avec proba 50 %, 0 avec proba 50 %	10k avec proba 100 %

Crière	**Utilité de la richesse en gardant...**	**… en vendant**	**choix**
Pascal	$50\,\% \times 1000\text{k} + 50\,\% \times 0 = 500\text{k}$	$10\,k$	garde
Bernoulli	$50\,\% \times \ln(1000\text{k}) + 50\,\% \times \ln(0) = -\infty$	$\ln(10\text{k}) \approx 9{,}21$	vend
Cramer	$50\,\% \times \sqrt{1000\,k} + 50\,\% \times \sqrt{0} = 500$	$\sqrt{10\,k} = 100$	garde

Application :

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

- Un fonds en UC rapporte soit 50 %, soit –20 %.
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

choix « tout ou rien »

critère	$u(l)$	100 % UC	100 % euro
Pascal	$u(l)=l$		
Bernoulli	$u(l)=\ln(l)$		
Cramer	$u(l)=\sqrt{l}$		

M. et Mme Z épargnent pour leur retraite (dans 10 ans). Ils disposent de 100 k€.

- Un fonds en UC rapporte soit 50 %, soit –20 %.
- Un fonds en euros (sans risque) rapporte 0%.

Quelle est la composition optimale de leur portefeuille ?

2.4- Aversion pour le risque et neutralité au risque (cas d'un risque additif)

un décideur a de l'aversion pour le risque s'il préfère posséder l'espérance des lots d'une loterie avec certitude plutôt que la loterie elle-même :

$$u(w_0 + \mathrm{E}[L]) > \mathrm{E}[u(w_0 + L)]$$

ou :

un décideur a de l'aversion pour le risque s'il n'aime pas toute loterie dont l'espérance mathématique des lots est nulle (risque de moyenne nulle) :

$$u(w_0) > \mathrm{E}[u(w_0 + z)] \text{ avec } \mathrm{E}z = 0$$

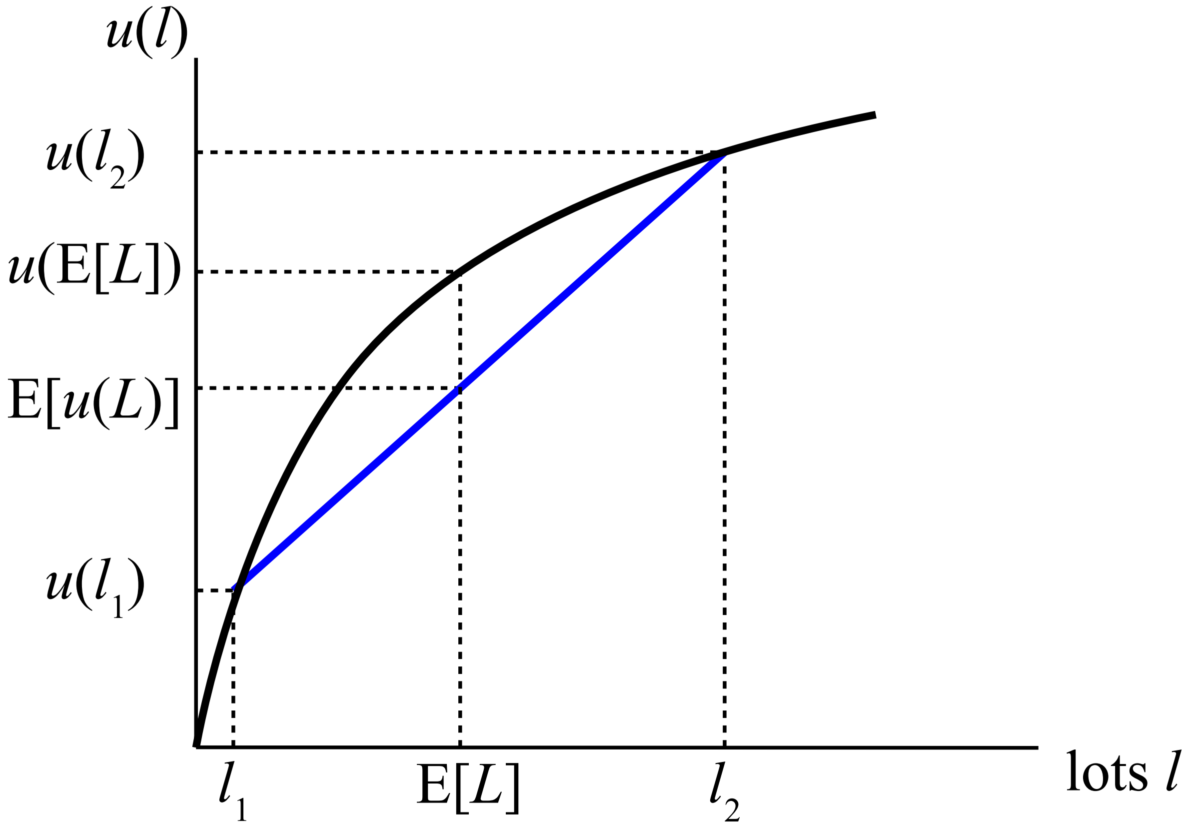
→ mathématiquement, cette condition est une condition de concavité de $u(.)$.
cf. inégalité de Jensen : $\boxed{f(x) \text{ concave} \leftrightarrow f(\mathrm{E}[\mathrm{X}]) > \mathrm{E}[f(\mathrm{X})]}$

→ la concavité de $u(.)$ détermine l'attitude à l'égard du risque

→ mesurer l'**aversion absolue** pour le risque par le « degré de concavité » :

$$A(w_0) = -\,u''(w_0)/u'(w_0)$$

$A(w_0)$ = « degré d'aversion absolue pour le risque »



- riscophobe = qui a de l'aversion au risque (*risk-averse*) : u(.) concave

- riscophile = qui aime le risque (risk-lover) : u(.) convexe
- neutre au risque = indifférent (risk-neutral) : u(.) linéaire

→ *représentation graphique ?*

2.5- Équivalent certain, prix d'achat/ de vente d'une loterie, prime de risque

équivalent-certain de la loterie L pour une richesse initiale w_0 :
la somme C qui procure la même utilité que la loterie : $u(w_0 + C) = \mathrm{E}[u(w_0 + L)]$

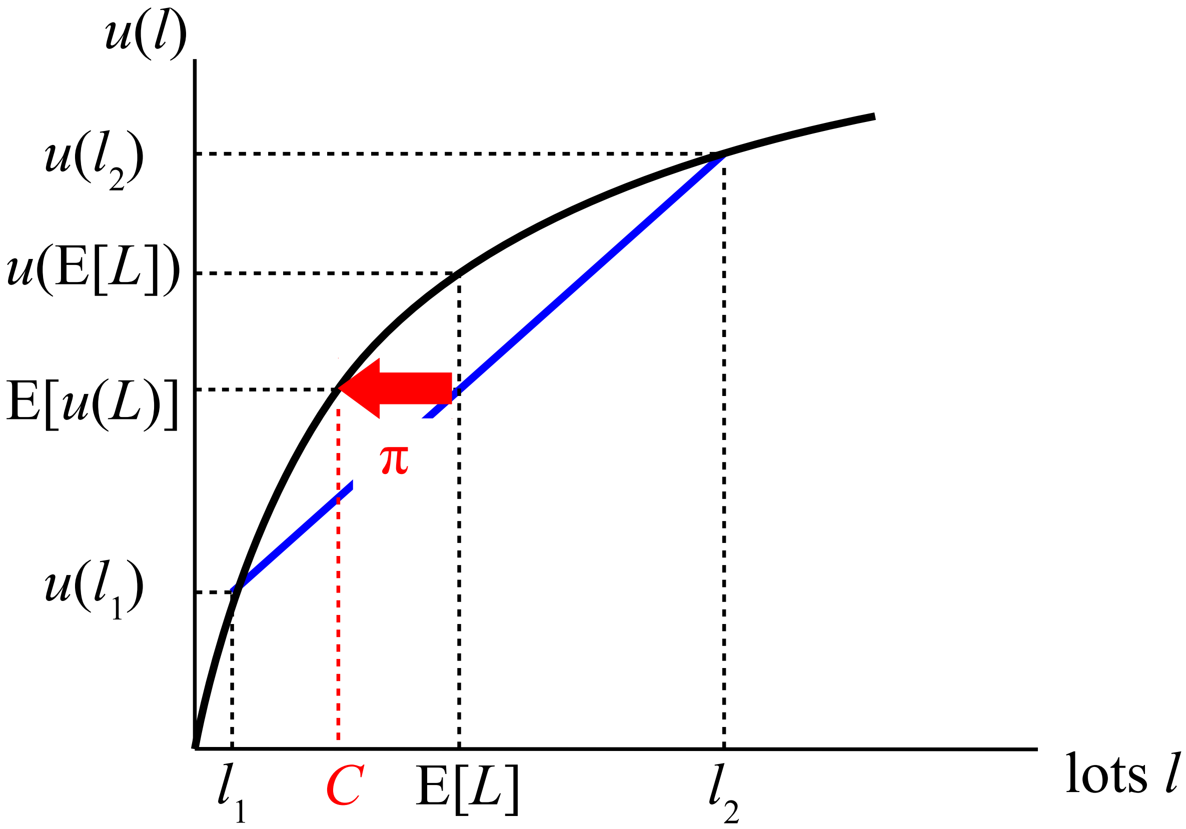
prime de risque de la loterie L pour une richesse initiale w_0 : la différence π entre l'espérance et l'équivalent-certain de L : $\pi = \mathrm{E}[L] - C$

$\rightarrow u(w_0 + \mathrm{E}[L] - \pi) = \mathrm{E}[u(w_0 + L)]$

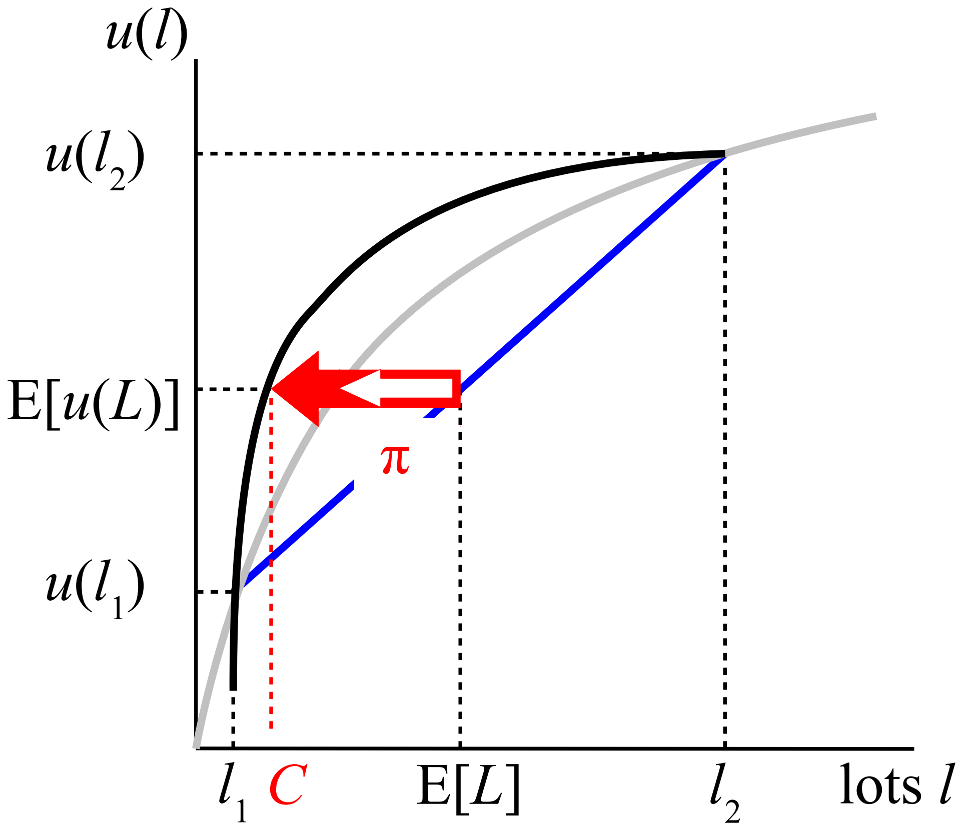
prix d'achat : la somme certaine PA que le décideur est prêt à payer pour obtenir la loterie : $u(w_0) = \mathrm{E}[u(w_0 + L - PA)]$

prix de vente : la somme certaine PV que le décideur est prêt à accepter pour céder la loterie : $\mathrm{E}[u(w_0 + L)] = u(w_0 + PV)]$
$\rightarrow PV = \mathrm{E}[L] - \pi$

Représentation de la prime de risque et de l'équivalent-certain

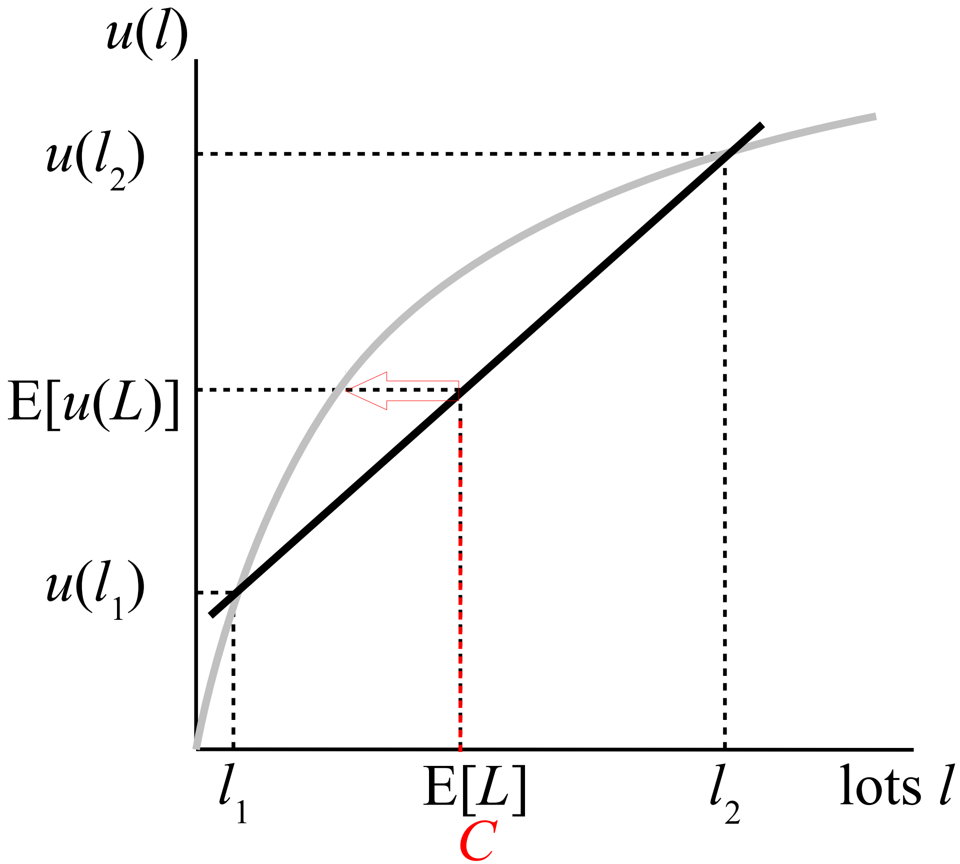


fonction d'utilité plus concave



Prime de risque plus élevée
aversion au risque plus forte

fonction d'utilité linéaire



Prime de risque nulle
neutralité au risque

Interprétation de la prime de risque : le « coût du risque »

La somme que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur
(somme positive → riscophobe)

cas d'un aléa (additif) affectant la richesse : $w_0 + L$

- $L = \mathrm{E}(L) + z$, avec $\mathrm{E}(z) = 0$
- z = « risque pur » (valeur moyenne nulle)

se débarrasser de z en payant π :

- la richesse devient $w_0 + \mathrm{E}[L] - \pi$
- acceptable si : $u(w_0 + \mathrm{E}[L] - \pi) = \mathrm{E}[u(w_0 + L)]$

Le supplément à payer à un décideur pour l'inciter à accepter un risque pur

cas d'une richesse initiale certaine

- ajouter un « risque pur » (valeur moyenne nulle), z → refus
- ajouter un risque pur + une somme certaine a ?
  - acceptable si $u(w_0) = \mathrm{E}[u(w_0 + \mathrm{z} + a)]$
  - Prime de risque attachée à $w_0 + z + a$:
    π t. q. $u(w_0 + a - \pi) = \mathrm{E}[u(w_0 + z + a)]$

$a = \pi$

Application :

On considère une richesse composée d'une partie certaine w=25 et d'une partie aléatoire X valant –9 avec une probabilité 0,4 et 11 avec une probabilité 0,6 (on a donc E(X)=3 et V(X)=96).

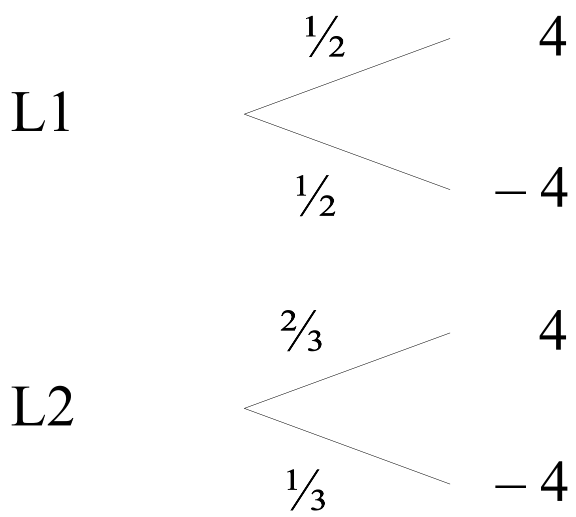
a. On considère un décideur neutre au risque .
   i. Pour lui, quel est l'équivalent certain de cette richesse ?
   ii. A quel prix est-il disposé à vendre X, la partie aléatoire de la richesse ?
   iii. A quel prix est-il disposé à acheter X s'il possède une richesse certaine égale à 25 ?

b. On considère un décideur riscophobe dont les préférences sont représentées par la fonction racine carrée :
   i. Montrez que l'équivalent certain de cette richesse vaut 27,04.
   ii. Montrez qu'il est disposé à vendre X à un prix de 2,04.
   iii. Quelle est la prime de risque qu'il attache à cette richesse ?
   iv. Quelle interprétation de la prime de risque à la lumière de la différence entre les prix de vente trouvés en a et en b.

Question de réflexion :

« L'aversion pour le risque est le fait de préférer ne pas jouer plutôt que de risquer de perdre en jouant ». Un bon résumé à retenir, ou une erreur à oublier ?

Pour y réfléchir… un « joueur » ayant une fonction d'utilité de Cramer, dispose d'une richesse initiale de 5. On lui propose de jouer gratuitement aux deux « loteries » suivantes. Accepte-t-il ?



2.6- Qui a le plus d'aversion pour le risque ?

Décideur « U » avec fonction d'utilité $u(\ )$ et une richesse certaine w_0

- accepte de prendre un risque x (avec $E(x) = \mu$ et $V(x) = \sigma$) si

$$E[u(w_0 + x)] \geq u(w_0)$$

- **Comment un changement de $u(\ )$ affecte-t-il sa décision ?**

Comparer décideur « U » et décideur « V » avec fonction d'utilité $v(\ )$ et même richesse certaine w_0 :

« V » une aversion pour le risque plus marquée (est plus riscophobe) que « U » si :
- la prime de risque pour tout risque est plus grande pour « V » que pour « U »
- pour tout w , $A_V(w) \geq A_U(w)$
- $v(\ )$ est une transformation concave de $u(\ )$: il existe une fonction f croissante concave telle $\forall\ w,\ v(w) = f(u(w))$

Application : qui, de Bernoulli et de Cramer, est le plus riscophobe ?

Comparez les degrés d'aversion absolue pour le risque

Montrez que, pour une richesse initiale de 4000, confrontés à un investissement risqué x produisant 0 avec une probabilité ½ et 8000 avec une probabilité ½ :

- pour Bernoulli, l'équivalent-certain de x vaut 3464,1 ;
  la prime de risque vaut 535,9
- pour Cramer, l'équivalent-certain de x vaut 2928,5 ;
  la prime de risque vaut 1071,5

Remarque (approximation d'Arrow-Pratt) : pour de « petits » risques, on peut approximer la prime de risque π associée à la richesse $w_0 + x$ par :

$$\pi \approx \frac{1}{2}\sigma^2 A\left(w_0\right)$$

Qu'en est-il dans le cadre de l'exemple précédent. ?

- **Comment un changement de w_0 affecte-t-il sa décision ?**

Intuitivement (selon Arrow) :

+ riche → – moins disposé à payer pour éliminer un risque donné

$\uparrow w_0 \rightarrow \downarrow \pi(w_0)$

on peut montrer que :
la prime de risque associée à la richesse $w_0 + x$ décroît avec w_0 si et seulement si l'aversion absolue pour le risque décroît avec w_0

$$\pi'(w_0) \leq 0 \uparrow w_0 \leftrightarrow \downarrow A'(w_0) \leq 0$$

on qualifie de « decreasing absolute risk aversion » (**DARA**) les fonctions d'utilité ayant cette propriété.

Application : $u(l)=\ln(l)$ et $v(l)=\sqrt{l}$ sont-elles DARA ?

Et $u(w)=\frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}$?

- **Risque additif vs risque multiplicatif**

risque additif (ou absolu) : $w = w_0 + x$
risque multiplicatif (ou relatif) : $w = w_0\,(1 + y)$

les deux sont liés… $y = x/w_0$

On suppose des risques purs : $E[x] = 0$ et $E[y] = 0$

prime de risque absolu : π_A tel que $u(w_0 - \pi_A) = E[u(w_0 + x)]$
somme que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur

prime de risque relatif : π_R tel que $u(w_0\,(1 - \pi_R)) = E[u(w_0\,(1 + y))]$
part de richesse que le décideur est prêt à payer pour se débarrasser du risque pur

les deux primes sont liées et de même signe… $\pi_R = \pi_A/w_0$

approximation de la prime de risque absolu :

développement limité au voisinage de w_0 de :

$$u(w_0 - \pi_A) = E[u(w_0 + x)]$$

(donc on considère des « petits » risques)

à l'ordre 1 :

$u(w_0 - \pi_A) \approx u(w_0\ ) - \pi_A\, u'(w_0)$

à l'ordre 2 :

$E[u(w_0 + x)] \approx E[u(w_0) + x\, u'(w_0) + ½\, x^2\, u''(w_0 + \mu)]$

soit : $E[u(w_0 + x)] \approx u(w_0 + \mu) + ½\, \sigma^2\, u''(w_0 + \mu)$

d'où : $\pi_A \approx -\, ½\, \sigma^2\, u''(w_0)/u'(w_0)$ soit $\boxed{\pi_A \approx ½\, \sigma^2\, A(w_0)}$

la prime de risque absolu dépend de :

- la variance (élément objectif)
- l’aversion absolue pour le risque, les préférences (élément subjectif)

approximation de la prime de risque relatif :

$\pi_R = \pi_A / w_0$
$\pi_A \approx -\frac{1}{2}\,\sigma^2\, u''(w_0)/u'(w_0)$

$$\rightarrow \qquad \pi_R \approx \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{-w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)}\right) = \frac{\sigma^2}{2} w_0 A(w_0)$$

Coefficient d'aversion relative pour le risque : $R(w_0) = \dfrac{-w_0 u''(w_0)}{u'(w_0)} = w_0 A(W_0)$

- l'opposé de l'élasticité de l'utilité marginale
- indique de quel % l'utilité marginale baisse quand la richesse augmente de 1 % (≠ aversion absolue pour le risque, qui indique de quel % l'utilité marginale baisse quand al richesse augment de 1€, ou 1$...)
- n'a pas d'unité (≠ aversion absolue pour le risque)
- effet de la richesse sur l'aversion relative pour le risque : on suppose généralement (Arrow) : l'aversion relative pour le risque ne diminue pas quand la richesse augmente

  ex : « constant relative risk aversion » (CRRA) : $u(w) = \dfrac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ … $R(w) = \alpha$

3- MUTUALISATION, DIVERSIFICATION ET PARTAGE DES RISQUES

3.1- Mutualisation (regroupement)

N personnes dotées de revenus indépendants identiquement distribués y_i

- elles regroupent les revenus : $Y = \sum_{i=1}^{N} y_i$ et $\mathrm{Cov}(y_i, y_j) = 0 \rightarrow \mathrm{V}[Y] = N\,\mathrm{V}[y_i]$

- elles partagent en parts égales : chaque participant reçoit $y = Y/N$

  $\rightarrow \mathrm{V}[y] = \mathrm{V}[Y/N] = \mathrm{V}[Y] / N^2 = \mathrm{V}[y_i] / N$
  $\rightarrow$ plus N est grand, plus le risque individuel est petit

Loi des grands nombres :
si on regroupe des « risques » indépendants, identiquement distribués
(si on ajoute des variables aléatoires iid),
alors la variance de la moyenne tend vers 0
quand le nombre de « risques » tend vers l'infini.

3.2- Diversification :

constitution d'un **portefeuille** de titres distribuant des revenus y_i imparfaitement corrélés

Supposons :

- titres de même volatilité σ, et de même coefficient de corrélation 2 à 2, ρ,
- portefeuille équipondéré, part = $1/N$

Variance du revenu du portefeuille : $\sigma_P^2 = \dfrac{\sigma^2}{N} + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\rho\,\sigma^2$

→ En augmentant le nombre de titres en portefeuille (en diversifiant), le « risque » du portefeuille diminue.

La covariance moyenne détermine le socle de risque qui subsiste après diversification ($\rho\sigma^2$)

→ cf. MEDAF, différence entre risque diversifiable et risque systématique...

3.3- Partage du risque :

→ « neutralité au risque » pour des projets partagés (Arrow et Lind 1970)

N personnes ayant le même revenu initial w_0 :

- participent à un projet risqué coûtant P et générant un revenu aléatoire Y :
- partagent coût le revenu à parts égales : chacun paye $p = P/N$ et reçoit $y = Y/N$

- p est tel que : $\mathrm{E}[u(w_0)] = \mathrm{E}[u(w_0 + y - p)]$
- $P = Np$

On peut montrer que : **si Y et w_0 ne sont pas corrélés, alors *le prix total que les participants sont prêts à payer* tend vers E(Y) quand N tend vers l'infini.**

→ quand le nombre de participants au projet devient très grand,
le projet peut être évalué par le revenu espéré,
comme si l'ensemble des participants était neutre au risque.

Interprétation :

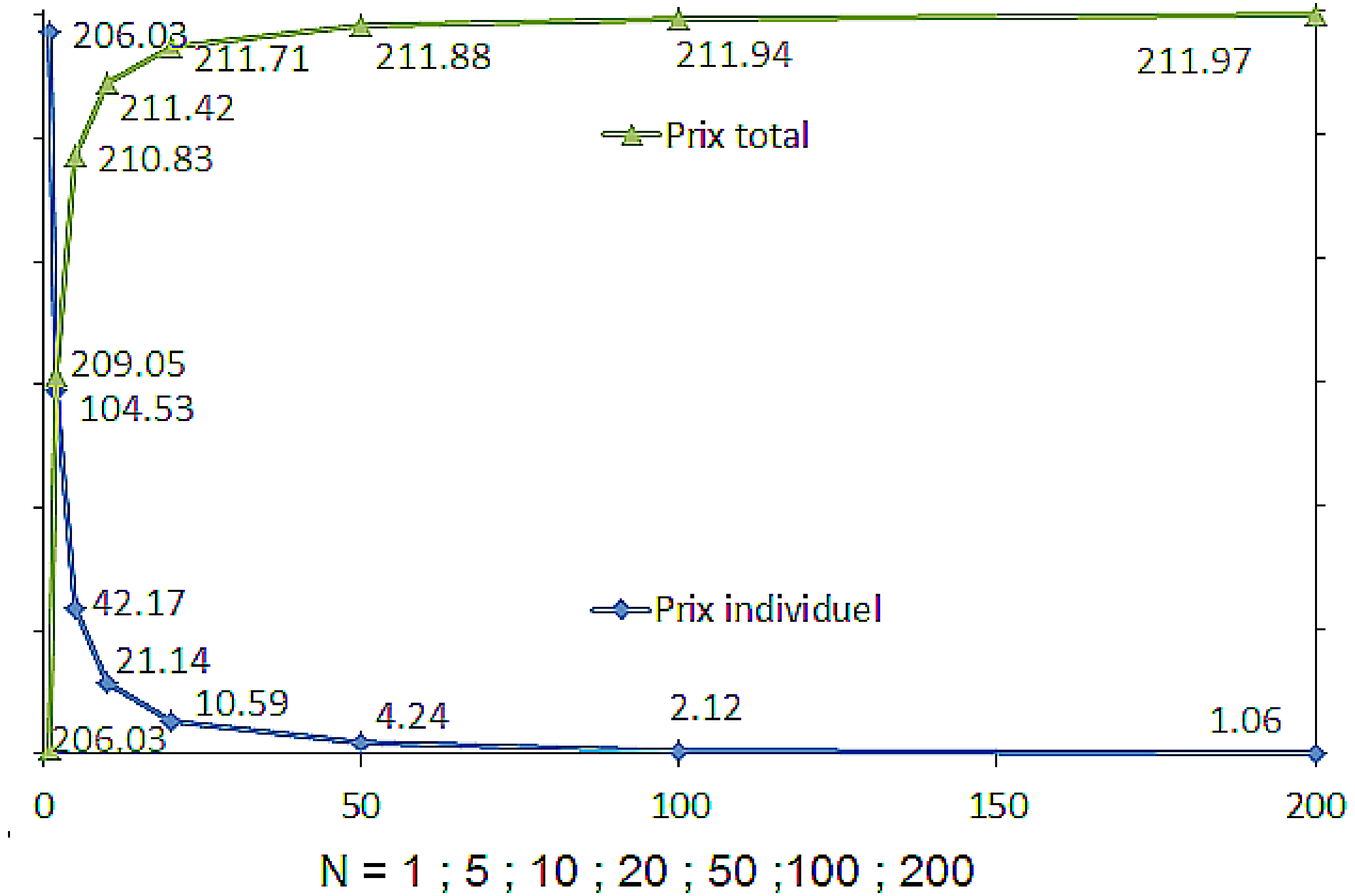
Si une entreprise a de nombreux actionnaires tous dotés d'un patrimoine bien diversifié, alors elle peut se comporter comme si elle était neutre au risque.

Exemple :

Les investisseurs ont une richesse de 1000.
Leur fonction d'utilité VNM est ln(x).
Le revenu moyen de l'investissement est 212.

revenus: 60 % → 300 ; 40 % → 80

prix individuel : p tq. $\ln(1000) = 0{,}6 \ln(1000 + 300/N - p) + 0{,}4 \ln(1000 + 80/N - p)$



4- PARMI DEUX « RICHESSES », QUELLE EST LA « PLUS RISQUÉE » ?

On considère deux richesses aléatoires...

...et un décideur *riscophobe* dont les préférences sont représentées par la fonction racine carrée

W1 : 50 % → 0 ; 50% → 4

W2 : 87,5 % → 1 ; 12,5% → 9

	W1	W2
E[W]		
V[W]		
E[u(W)]		

→ la variance n'est pas une mesure du risque « perçu » (subjectif)...

Pour classer les aléas par « taille », par « risque » : **dominance stochastique**

Dominance stochastique d'ordre un :

Une richesse X domine stochastiquement à l'ordre 1 une richesse Y
si tous les décideurs **rationnels** au sens de VNM (dont les préférences sont représentables par une fonction d'utilité espérée) et **insatiables** (dont la fonction d'utilité est croissante) préfèrent X à Y :

$$X \succ_{DS1} Y \Leftrightarrow \forall\, u(.), u'(.) \geq 0, E(u(X)) > E(u(Y))$$

une condition nécessaire et suffisante :

$$X \succ_{DS1} Y \Leftrightarrow \forall\, w, F_X(w) \leq F_Y(w)\, et\, \exists\, w, F_X(w) < F_Y(w)$$

→ la fonction de répartition de X est à droite/en-dessous de celle de Y
→ « X a une probabilité plus basse que Y de prendre des valeurs basses »

Représenter les fonction de répartition de X et de Y

Y représente un « accroissement du risque » par rapport à *X*, au sens d'un **décalage** *vers la gauche* de la distribution.

Application :

Un décideur doit placer son patrimoine, w,

- en actif risqué, dont le taux de rendement est aléatoire et vaut -5% avec une probabilité p et 15% avec une probabilité 1–p,
- ou en actif non risqué, dont le rendement est certain et vaut i.

On note W(α) la richesse finale, avec α le montant investi en actif risqué.

1. Écrire le problème de décision comme un choix de loterie.
2. À quelle condition sur i W(a) domine-t-elle stochastiquement à l'ordre 1 W(0), pour a>0 ?
3. En quoi cette question est-elle intéressante ?

Dominance stochastique d'ordre deux :

Une richesse X domine stochastiquement à l'ordre 2 une richesse Y
si tous les décideurs **rationnels** au sens de VNM, **insatiables** et **riscophobes** (dont la fonction d'utilité est concave) préfèrent X à Y :

$$X \succ_{DS2} Y \Leftrightarrow \forall u(.), u'(.) \geq 0, u''() < 0, E(u(X)) > E(u(Y))$$

une condition nécessaire et suffisante :

$$X \succ_{DS2} Y \Leftrightarrow \forall w, \int_{-\infty}^{w} F_X(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{w} F_Y(t)\,dt \quad et \quad \exists w, \int_{-\infty}^{w} F_X(t)\,dt < \int_{-\infty}^{w} F_Y(t)\,dt$$

Pour des richesses de même espérance :

- si Y est construite à partir de X par « ajout de bruits blancs », alors $X \succ_{DS2} Y$
- si F_Y est construite à partir de F_X par « transfert de poids » vers les extrêmes, alors $X \succ_{DS2} Y$
  → Y représente un « accroissement du risque » par rapport à X, au sens d'un **étalement de la distribution à moyenne constante** (*mean preserving spread*).

Application :

Dans le royaume de *Far-Far-Away*, chaque année, toute maison peut :

- être endommagée et perdre 20% de sa valeur avec une probabilité de 25%,
- être endommagée et perdre 80% de sa valeur avec une probabilité de 5%
- ou rester intacte.

Une compagnie d'assurance propose d'assurer complètement toute maison, contre le paiement d'une somme égale à une proportion s de la valeur de la maison : le propriétaire d'une maison assurée dispose d'un patrimoine certain de valeur $(1-s)M$ où M est la valeur de la maison intacte non assurée.

1. Définissez l'aversion au risque.
2. Définissez la dominance stochastique d'ordre un et la dominance stochastique d'ordre deux. En quoi ces concepts permettent-ils de classer les loteries ?
3. Montrer que tout habitant riscophobe de Far-Far-Away assure sa maison si et seulement si s est inférieur à 9%.

5- ASSURANCE ET CHOIX DE PORTEFEUILLE

5.1- Assurance

Décideur riscophobe avec fonction d'utilité $u(\ )$

- peut subir un sinistre/une perte/un dommage $x \geq 0$ sur sa richesse initiale w_0
- $\pi(x)$ = prime de risque associée

contrat d'assurance :

- prime P payée par l'assuré
- Indemnité versée par l'assureur $I(x)$

Prime « pure » ou « actuarielle » ou « actuariellement équitable » : $E[I(x)]$

Couverture intégrale : $I(x) = x$

- le décideur est prêt à payer $P = \pi(x)$ pour s'assurer intégralement
- il est optimal pour le décideur riscophobe de s'assurer intégralement si la prime est actuarielle

taux de chargement (« loading factor ») c : couvre le coût de gestion subi par l'assureur, pour chaque euro d'indemnité

- Assureur neutre au risque (diversification parfaite…), réalise un profit nul si

$$P = (1+c)\mathrm{E}[I(x)]$$

coassurance : contre prime $P(b)$, l'assureur rembourse une fraction b du dommage

$$I(x) = b\,x.$$

- b = taux de coassurance
- $1 - b$ = taux de rétention

le taux de coassurance est choisi par l'assuré, sachant la tarification :

$$P(b) = (1+c)\ \mathrm{E}[I(x)] = b\ P_0$$

où $P_0 = (1+c)\ \mathrm{E}[x]$ est la prime d'assurance intégrale

Richesse finale de l'assuré : $w = w_0 - b\ P_0 - (1 - b)\ x = w_0 - x + b\ (x - P_0)$

- $b = 1 \rightarrow$ couverture intégrale $\rightarrow w = w_0 - P_0$ non aléatoire
- $b = 0 \rightarrow w = w_0 - x \rightarrow$ pas d'assurance

5.2- Choix de portefeuille

Décideur riscophobe avec fonction d'utilité $u(\ )$ et richesse initiale w_0

doit décider comment partager sa richesse entre

- un fonds sans risque (fonds euro, obligation) rémunéré au taux certain r
- un fonds risqué (unités de compte, actions) rémunéré au taux aléatoire y

→ a en actions
$w_0 - a$ en obligations

richesse finale de l'investisseur : $w = (1 + r)\,(w_0 - a) + (1 + y)\,a$

soit : $w = (1 + r)\,w_0 + (y - r)\,a$

- $m_0 = (1 + r)\,w_0$: richesse finale en cas de placement intégral sans risque
- $z = y - r$: rentabilité excédentaire des actions

choisir a pour maximiser $\mathrm{E}[u(w)] = \mathrm{E}[u(m_0 + z\,a)]$

5.3- Similitude des problèmes :

contexte	coassurance	choix de portefeuille
objectif	max $E[u(w_0 - b\,P_0 - (1-b)\,x)]$	max $E[u(m_0 + z\,a)]$
instrument	b	a

$$w_0 - b\,P_0 - (1-b)\,x = w_0 - P_0 + (1-b)\,(P_0 - x)$$

(ajouter et soustraire P_0, factoriser)

$w_0 - P_0 \leftrightarrow m_0$	richesse finale prime d'assurance intégrale déduite	richesse finale en cas de placement intégral sans risque
$(1-b)P_0 \leftrightarrow a$	richesse soumise au risque de dommage	richesse placée en actions risquées
	$b = 1$: assurance intégrale	$a = 0$: 100 % sans risque
	$\downarrow b \rightarrow \uparrow$ risque assumé par l'assuré	$\uparrow a \rightarrow \uparrow$ risque du portefeuille
$(P_0 - x)/P_0 \leftrightarrow z$	rendement de la coassurance	rentab. excédent. des actions

5.4- Décision de l'assuré : max $f(b) = \mathrm{E}[u(w)] = \mathrm{E}[u(w_0 - P_0 + (1- b)(P_0 - x))]$

- CPO : $f'(b) = 0 \rightarrow \mathrm{E}[(x - P_0)\, u'(w)] = 0$ → taux de coassurance optimal b^*
- CDO : $f''(b) < 0 \rightarrow \mathrm{E}[(x - P_0)^2\, u''(w)] < 0$ toujours vraie car $u''(\ )<0$ (aversion pour le risque)

Mossin (1968) a montré :

- si $c = 0$ (prime actuarielle) $b^* = 1$ assurance **intégrale** optimale
- si $c > 0$ (taux de chargement positif) $b^* < 1$ assurance **partielle** optimale

Même si l'aversion pour le risque est élevée, si $c > 0$, l'assuré s'assure partiellement

- économie de dépense (prime) → ↑ richesse attendue : effet de *premier ordre*
  → ↑ risque : effet de *second ordre*

Quelques autres résultats :

- décideur + riscophobe ($u(\ )$ + concave) → taux de coassurance b^* + grand
- $u(\ )$ DARA : ↑ richesse → ↓ taux de coassurance (assurance = bien inférieur)
- $u(\ )$ DARA : ↑ taux de chargement → ? taux de coassurance (bien Giffen ?)
- ↑ « risque » → ? taux de coassurance...

5.5- Décision de l'investisseur : max $g(a) = \mathrm{E}[u(m_0 + z\,a)]$

- CPO : $g'(a) = 0 \rightarrow \mathrm{E}[z\,u'(w)] = 0$ → taux de coassurance optimal b^*
- CDO : $f''(b) < 0 \rightarrow \mathrm{E}[z^2\,u''(w)] < 0$ toujours vraie car $u''(\ )<0$ (aversion pour le risque)

- si $\mathrm{E}z = 0$ actions = risque pur $a^* = 0$ Placer 100 % sans risque
- si $\mathrm{E}z > 0$ rentabilité excédentaire peut compenser risque $a^* \geq 0$ Placement en action désirable

Quelques autres résultats si $\mathrm{E}z > 0$:

- décideur + riscophobe ($u(\ )$ + concave) → moindre placement action a^*
- $u(\ )$ DARA : ↑ richesse → ↑ a^*
- $u(\ )$ CRRA : a^* est proportionnel à la richesse
- $\dfrac{a^*}{w} \approx \dfrac{\mu}{\sigma^2}\dfrac{1}{R(w)}$ $\mu = \mathrm{E}(z)$ → prime du marché actions (*equity premium*) ; $\sigma^2 = \mathrm{V}(z)$ → variance des rentabilités des actions ('risque')

  La part investie en action est approximativement ...

  … proportionnelle à la prime du marché actions

  … inversement proportionnelle au risque et à l'aversion relative pour le risque

6- PARADOXE D'ALLAIS ET AXIOME D'INDÉPENDANCE

cf. Exemple 1 (§2.1)

Choisir entre A et B :

A — 100 % → 100M€

B — 98% → 500M€ ; 2 % → 0

Choisir entre C et D :

C — 1 % → 100M€ ; 99 % → 1€

D — 0,98% → 500M€ ; 99 % → 1€ ; 0,02 % → 0

Synthèse des choix	A	B
C		
D		

6.1- Paradoxe d'Allais (1953) : de nombreux individus choisissent A et D...

Or d'après VNM : A > B $\Rightarrow$ C > D

En effet :

A > B $\Rightarrow u(w_0 + 100) > 0{,}98\ u(w_0 + 500) + 0{,}02\ u(w_0)$

$\Rightarrow 0{,}01\ u(w_0 + 100) + 0{,}99\ u(w_0 + 1)$

$> 0{,}01\ [0{,}98\ u(w_0 + 500) + 0{,}02\ u(w_0)] + 0{,}99\ u(w_0 + 1)$

$\Rightarrow 0{,}01\ u(w_0 + 100) + 0{,}99\ u(w_0 + 1)$

$> 0{,}98\ u(w_0 + 500) + 0{,}99\ u(w_0 + 1) + 0{,}02\ u(w_0)$

A > B $\Rightarrow$ C > D

→ montre la difficulté des décisions dans l'incertain...

→ remet en cause une des hypothèses du théorème de l'utilité espérée :

l'axiome d'indépendance.

6.2- L'axiome d'indépendance :

Axiome d'indépendance : « Si on « mélange » deux loteries avec une troisième loterie, le classement des deux loteries résultantes ne dépend que du classement des deux loteries initiales (il ne dépend pas de la troisième). »

Exemple de « mélange » :

Soit Z la loterie qui donne 1€ avec certitude : $Z \xrightarrow{100\ \%} 1€$

B est construite en « mélangeant » 1 % de A et 99 % de Z
D est construite en « mélangeant » 1 % de B et 99 % de Z

$$\begin{array}{ccc} & 1\ \% & A \\ C & & \\ & 99\ \% & Z \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & 1\ \% & B \\ D & & \\ & 99\ \% & Z \end{array}$$

L'axiome d'indépendance dit que : $A > B \Rightarrow C > D$

La signification de l'axiome d'indépendance :

Parmi tous les résultats possibles d'un événement aléatoire, un seul se produit.
→ un seul état du monde se produit
→ on peut supposer que les préférences sont telles que la « valeur » d'une somme disponible dans cet état ne dépend pas de ce qui se passe dans un état qui ne s'est pas produit (≠ préférences sur des biens pouvant être consommés simultanément)

→ c'est le sens de l'hypothèse « d'indépendance » : les choix faits dans un état du monde ne dépendent pas des choix prévus dans les autres états.

→ la fonction d'utilité est « additive » par rapport aux états du monde :

On note $i = 1$ à N les états du monde, p_i les probabilités, l_i les sommes disponibles

$$U(L)=\sum_{i=1}^{N} p_i u(l_i) \text{ soit } U(L)=E[u(l)]$$

axiome d'indépendance et « Dutch book »

« dutch book » : pari qui garantit un gain à coup sûr pour le *bookmaker*
et une perte à coup sûr pour le *parieur.*

Un décideur dont le comportement n'est pas conforme à l'axiome d'indépendance est victime d'un « dutch book » :

- Parmi trois loteries, A, B et C : le décideur les ordonne A > B et A > C.
- Mais il préfère $D = \begin{cases} \overset{50\,\%}{\cdots} B \\ \underset{50\,\%}{\cdots} D \end{cases}$ à A (≠ axiome d'indépendance)

  D est une « loterie composée » : on tire à pile ou face pour jouer B ou C .

Scénario de « dutch book »

- proposer au décideur de choisir entre A, B et C → A
- proposer alors au décideur de payer pour remplacer A par D → paye x → D
- tirer à pile ou face et proposer alors au décideur de payer pour remplacer B ou C (selon résultat du tirage) par A → paye x' → A

→ le décideur a payé $x+x'$ pour revenir au point de départ ! Incohérence !

7- FINANCE COMPORTEMENTALE

- ne suppose pas des agents rationnels et des marchés sans friction
- part des limites à la rationalité, et de la psychologie des décideurs
- met en évidence les biais cognitifs et les erreurs de décisions
- montre les opportunités de profit générées par les erreurs des « noise traders »

Typiquement, on observe :

- choix incompatibles avec la maximisation de l'espérance (subjective) d'utilité
- difficultés dans la mise à jour des croyances (application de la loi de Bayes)

Exemple : Vous savez que...

- 80 % de vos clients (emprunteurs) sont « sûrs », 20 % sont « risqués »
- 90 % des clients « sûrs » payent « à temps »
- 50 % des clients « risqués » payent « en retard »

Un de vos client paye à temps... est-il « sûr » ou « risqué » ?

- La probabilité qu'il soit « sûr » est de …
- Globalement, la probabilité qu'un client paye à temps est de...

7.1- La règle de Bayes :

- A et B deux événements aléatoires,
- $\bar{A}$ le complémentaire de A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Règle de Bayes → comment réviser la probabilité de A, après observation B.

- $P(A)$ « probabilité *a priori* (marginale) de A » aussi appelée probabilité de A.
- $P(A|B)$ = « la probabilité *a posteriori* (conditionnelle) de A sachant B »
- $P(B|A)$, pour un B connu = « vraisemblance de A sachant B »

$P(A \,\&\, B) = P(B|A)\, P(A) = P(A|B)\, P(B)$

→ règle de Bayes : $\mathbf{P(A|B) = P(B|A)\, P(A) \,/\, P(B)}$

$P(B) = P(A \,\&\, B) + P(\bar{A} \,\&\, B) = P(B|A)\, P(A) + P(B|\bar{A})\, P(\bar{A})$

$$\rightarrow \boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B|A)\,P(A) + P(B|\bar{A})\,P(\bar{A})}}$$

Application :

A = « le client est de type 'sûr' » ; $\bar{A}$ = « le client est de type 'risqué' »
B = « client 'ponctuel' » ; $\bar{B}$ = « client 'retardataire' »

P('*ponctuel*') = P('*ponctuel*'|'*sûr*') P('*sûr*') + P('*ponctuel*'|'*risqué*') P('*risqué*')

→ globalement (a priori), 82 % des clients sont '*ponctuels*'

P('*sûr*'|'*ponctuel*') = P('*ponctuel*'|'*sûr*') P('*sûr*') / P('*ponctuel*')

→ la probabilité a posteriori qu'un client ayant payé à temps soit sûr est de :

$$\frac{72\,\%}{82\,\%} \approx 87{,}8\,\%$$

→ remplir le tableau de contingence.

7.2- Psychologie : les croyances – biais cognitifs

enseignements sur la manière apparente dont les gens forment leurs croyances

- **sur-confiance :** confiance excessive dans ses jugements (intervalles de confiances trop étroits, probabilités mal calibrées)
  provient de deux biais :
  - auto-attribution : attribuer ses succès à son propre talent/ses échecs à la malchance
  - recul : après un événement, avoir tendance à penser qu'on l'avait prévu
- **optimisme :** surestimer ses capacités (en part. celle de respecter les échéances)
- **représentativité :** estimer la probabilité par la similitude (négliger les probas a priori)
- **conservatisme** : surestimer les probas a priori

→ mauvaises applications de la loi de Bayes sur la révision des croyances

- **persévérance dans les croyances**, **biais de confirmation :** répugnance à accepter de changer d'avis
- **ancrage :** ajuster ses croyances à partir d'une valeur a priori arbitraire
- **biais de disponibilité :** tous les souvenirs permettant d'estimer les probas d'événements ne sont pas « disponibles » de la même manière

7.3- Psychologie : les préférences

(a) La théorie des perspectives (prospect theory) – Kahneman & Tversky (1979)

Question 1 : Supposons que vous êtes plus riches de 300 €. Que choisissez-vous ?
A'- un gain certain de 100€
B'- 50 % de chance de gagner 200€ et 50 % de chance de ne rien gagner.

Question 2 : Supposons que vous êtes plus riches de 500 €. Que choisissez-vous ?
C'- une perte certaine de 100€
D'- 50 % de chance de perdre 200€ et 50 % de chance de ne rien perdre.

→ choix :
majorité de A' : aversion au risque en cas de gain.
majorité de D' : goût pour le risque en cas de perte.

Les positions finales de A' et C' et celles de B' et D' sont pourtant identiques...
VNM : $A' > B' \Rightarrow C' > D'$

La théorie des perspectives

- remet en cause la théorie de l'utilité espérée (VNM) comme modèle descriptif des décisions en situation de risque.
- fondée sur des constats expérimentaux

Une loterie L rapporte « *gain* » avec probabilité p et « *perte* » avec probabilité q.
L est « évaluée » par :

$$U(L) = \pi(p)\ v(gain) + \pi(q)\ v(perte) \neq E[u(L)] = p\ u(w_0 + gain) + q\ u(w_0 + perte)$$

- v(.) définie sur pertes et gains $\neq$ richesse finale ;
  - riscophilie si perte
  - riscophobie si gain

+ **aversion aux pertes**

pente de v(.) + forte
pour des pertes que pour des gains
$v(x) < - v(- x)$

- $\pi(.)$ transformation non linéaire des probas :
  - surestimation des petites probabilités,
  - sous-estimation des probabilités élevées

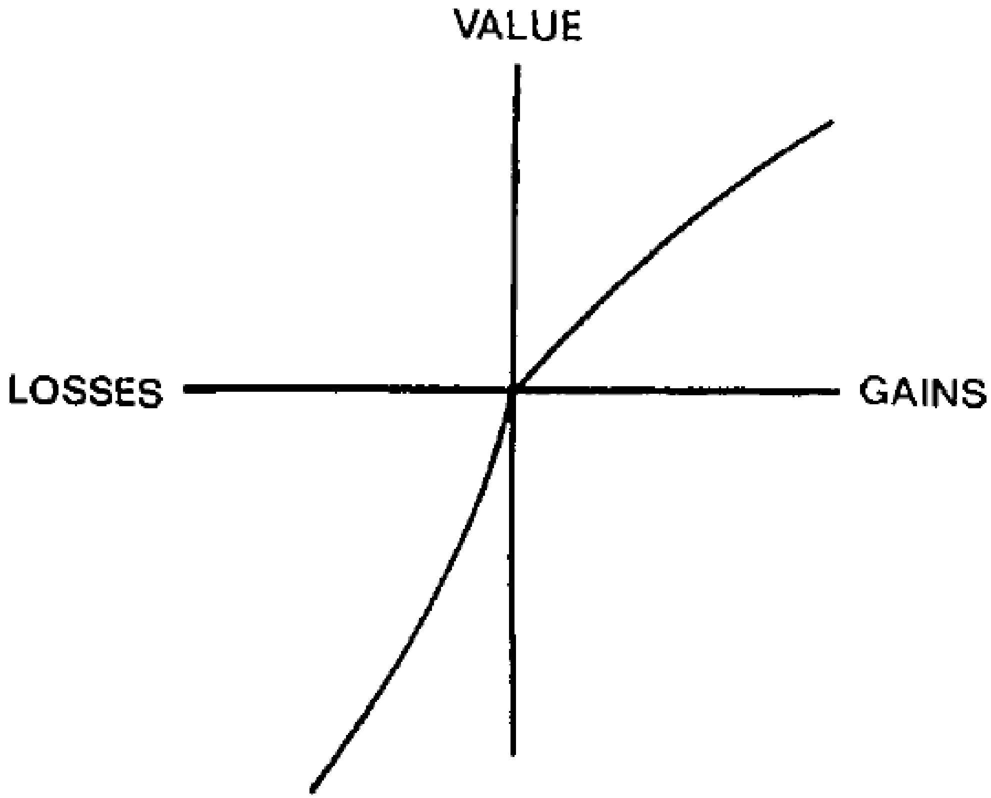


FIGURE 3.—A hypothetical value function

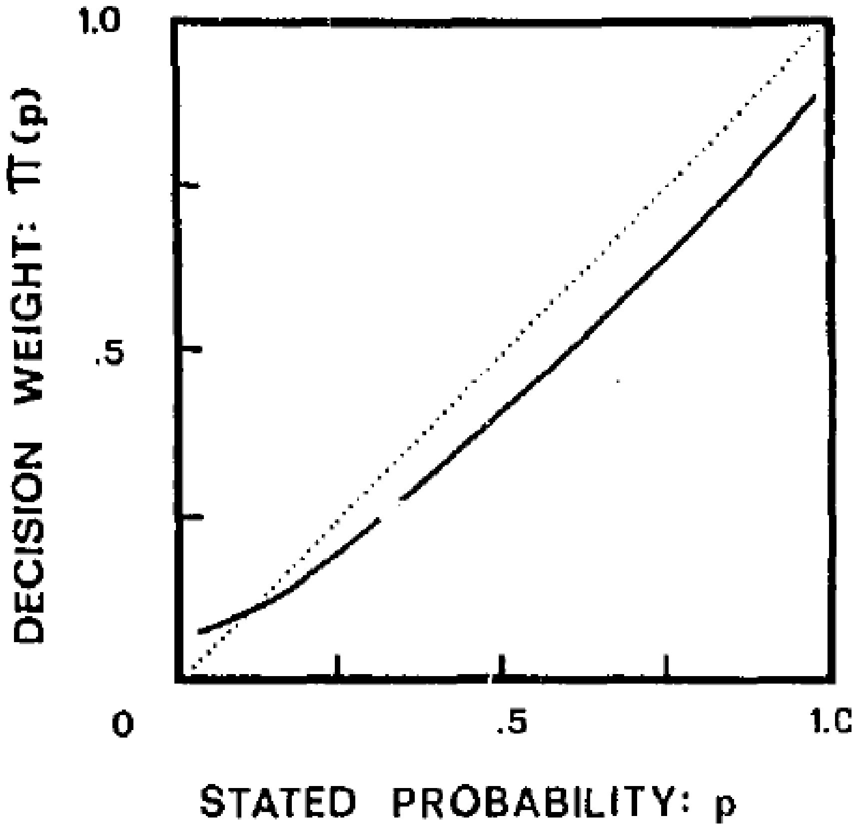


FIGURE 4.—A hypothetical weighting function.

source :Kahnemann & Tversky (1979)

en **théorie des perspectives**

décisions fondées sur 2 opérations cognitives distinctes :

(1) création de « comptes mentaux » (résultant d'une « présentation » - *framing*)

→ la présentation peut influencer la prise de décision (*framing*)
même si les décideurs n'en ont pas toujours conscience

(2) application de règles de décisions différentes sur ces comptes

→ chaque compte mental est évalué séparément
la valeur de l'ensemble est la somme des valeurs séparées

un décideur qui maximise U(L) préfère

- allouer un gain g sur deux comptes séparés car v(g) concave → $2v(g/2) > v(g)$
- allouer une perte l sur deux comptes séparés : v(l) convexe → $v(l) > 2v(l/2)$
- séparer une grosse perte et un petit gain : $v(g) + v(l) > v(g+l)$

(b) Aversion à l’ambiguïté

En réalité, les probabilités sont rarement connues objectivement

- cf. distinction « risque » vs « incertitude »

→ Savage (1964) : théorie de « l’espérance d’utilité subjective »

- distinction « risque » vs « incertitude »

Mais les gens n’aiment pas l’« **ambiguïté** » = les situations où les distributions de probabilités sont elles-même incertaines :

- sentiment d’incompétence
- préférence pour le familier

→ Des comportements inexplicables par le théorie de l’utilité espérée
→ Les préférences ne s’expriment pas toujours par des jugements probabilistes

cf. paradoxe d’Ellsberg (1961)

7.4- Paradoxe d'Ellsberg et aversion à l'ambiguïté :

Deux urnes contiennent chacune 100 boules

- *Urne 1 : ?? bleues + ?? rouges*
- *Urne 2 : 50 bleues + 50 rouges*

Lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *a1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*
- *a2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « rouge », 0 si « bleu »*

Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *b1 : tirer une boule dans l'urne 1, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*
- *b2 : tirer une boule dans l'urne 2, gagner 100 si « bleu », 0 si « rouge »*

typiquement, les gens préfèrent a2 (plutôt que a1) et b2 (plutôt que b1)

→ incohérent avec théorie de « l'espérance d'utilité subjective » (proba subjectives)

a2 > a1 si Pr(rouge | urne 1) > Pr (rouge | urne 2) ; b2 > b1 si Pr(bleu | urne 1) > Pr (bleu | urne 2)

→ **aversion à l'ambiguïté**

cf. Barberis & Thaler (2003)

Paradoxe d'Ellsberg – autre version :

Une urne contient 90 boules : 30 rouges, les autres noires ou jaunes...

Lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *c1 : tirer une boule, gagner 100 si « rouge », 0 sinon*
- *c2 : tirer une boule, gagner 100 si « noire », 0 sinon*

Et lequel des deux paris suivants préférez-vous :

- *d1 : tirer une boule, gagner 100 si « rouge » ou « jaune », 0 sinon*
- *d2 : tirer une boule, gagner 100 si « noire » ou « jaune », 0 si « rouge »*

typiquement, les gens préfèrent c1 (plutôt que c2) et d2 (plutôt que d1)

→ incohérent avec théorie de « l'espérance d'utilité subjective » (proba subjectives)

c1 > c2 si Pr(rouge) > Pr (noire) ; d2 > d1 si Pr(noire ou jaune) = Pr(noire) + Pr(jaune) > Pr(rouge ou jaune) = Pr(rouge) Pr(jaune)

→ aversion à l'ambiguïté

cf. Eber & Willinger (2012)

7.5- Application au comportement des investisseurs

(1) Effet de disposition/de dotation :
valoriser davantage un bien que l'on possède déjà
répugner à vendre / garder trop longtemps un titre dont le cours a baissé

- dû à *croyance irrationnelle* en un « retour vers la moyenne »
- dû à *l'aversion aux pertes* (théorie des perspectives)

exemple : une action achetée 50 cote aujourd'hui 45, faut-il vendre, ou attendre (l'action pourra alors être cotée 50 ou 40, de manière équiprobable) ?

en théorie des perspectives :	utilité de vendre = v(–5) utilité de garder = ½ v(0) + ½ v(–10)	*région des pertes, riscophilie v(.) convexe*	→ garder

(2) transactions trop nombreuses :
de meilleures performances seraient possibles avec moins de transactions (coûts de transaction, mauvaise sélection des titres)

- dues à *sur-confiance* : penser avoir une info justifiant une transaction...

(3) Faible diversification des portefeuilles d'actifs risqués

due à *aversion à l'ambiguïté* :

- difficulté à traiter l'information financière, à envisager les résultats possibles, à évaluer les probabilités, même subjectives
  → renoncer à participer aux marchés financiers
  → concentrer sur une entreprise ou sur un secteur d'activité connu
    → possible biais de sur-confiance
    → diversification naïve (1/n) ou insuffisante

due à *comptabilité mentale* **:** segmentation des choix (investissement dans un portefeuille d'actifs risqués traité indépendamment des autres choix de placement).

- prépondérance d'actifs non risqués pour l'essentiel du patrimoine financier
- faible diversification, fort risque pour le complément (actifs risqués)
  → le patrimoine financier est clairement segmenté, ou encore stratifié
  → chaque strate (typiquement deux) est associée à une fonction d'utilité propre
    - aversion pour le risque pour la première (se prémunir contre la pauvreté, garantir un certain niveau de patrimoine)
    - un goût du risque pour la deuxième (s'enrichir)

7.6- Les conseillers financiers peuvent-ils en profiter ? exemples...

Théorie des perspectives :

→ manipuler le point de référence

- pub/processus de vente : inclure des options ou des caractéristiques inutiles pour augmenter/baisser le point de référence (cf. « conventions de compte »)
- stratégie tarifaire : tarification « au goutte à goutte » (ajouter des éléments au fur et à mesure du processus de vente)

→ exploiter les effets de dotation et l'aversion aux perte :

- pub/processus de vente : présentation (pointer pertes en l'absence d'assurance)
- conception du produit : ex. assurance pour des petits risques
- stratégie tarifaire : périodes d'essai gratuit, réduction temporaire (sur premières échéances)

Comptabilité mentale :

→ manipuler la présentation de la performance des produits (période, inflation...)

Erta & al. (2013), *Applying Behavioural Economics at the Financial Conduct Authority*, FCA occasional-paper n°1