1- Choix intertemporels

Objectif :

A la fin de ce chapitre, vous devrez savoir :

- définir les concepts fondamentaux : actualisation, capitalisation, taux marginal de substitution, taux de préférence pour le présent, contrainte budgétaire, taux d'intérêt réel, taux d'intérêt nominal...
- expliquer :
  - le théorème de séparation de Fisher,
  - le principe de valorisation d'un actif
  - le critère de choix d'investissement par maximisation de la valeur actuelle nette
- justifier la rémunération des fonds sur les marchés financiers,
- résoudre et illustrer schématiquement un problème d'optimisation simple et interpréter les conditions d'optimalité dans le contexte des choix intertemporels d'investissement et de consommation, donc expliquer et utiliser les outils mathématiques de base de l'optimisation.

PLAN :

introduction
1- contrainte budgétaire dans le modèle à deux périodes
2- préférences dans le modèle à deux périodes
3- décisions optimales dans le modèle à deux périodes
4- épargne et équilibre du marché financier dans le modèle à deux périodes
conclusion
annexes

BIBLIOGRAPHIE :

Varian (2015), *Introduction à la microéconomie*, De Boeck (chapitre 10 « les choix intertemporels »)

Cobbault (1997), *Théorie financière*, Economica (chapitre 2 « consommation, épargne, investissement et taux d'intérêt »)

Picard (2011), *Éléments de microéconomie – 1. Théorie et applications*, Montchrestien (chapitre 14 « les choix intertemporels, l'épargne et l'investissement »)

INTRODUCTION :

Première fonction des marchés financiers → **échange de capitaux dans le temps**

exemple :
- investir dans des projets personnels, professionnels ou industriels
- préparer sa retraite

dans ce chapitre : explorer cette fonction à l'aide du **modèle de Fisher** (1930)

- (H1) avenir connu avec certitude
- (H2) deux périodes : présent et futur
- (H3) un marché financier « parfait » permet de prêter/emprunter moyennant un taux de rendement r (sans risque)

exposer les principes de :

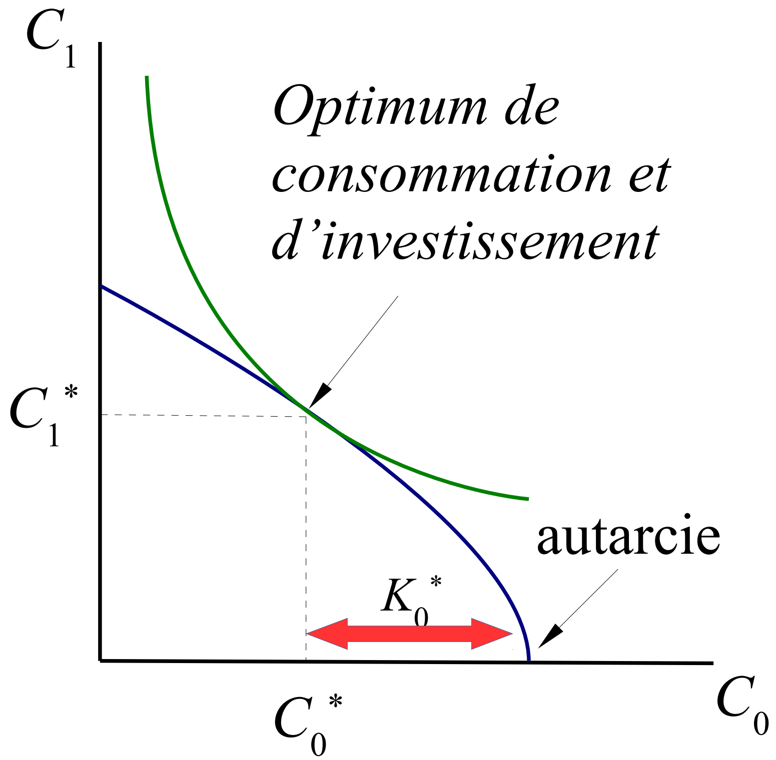
- capitalisation / actualisation
- choix d'investissement par maximisation de la Valeur Actuelle Nette
- séparation des décisions d'investissement et de consommation
- rémunération du « capital »

La finance de Fisher : vue synthétique

I. Fischer (1930), *The Theory of Interest as determined by impatience to spend income and opportunity to invest it*, Macmillan

→ *Représentation des choix intertemporels de consommation et d'investissement*

Sans marché financier

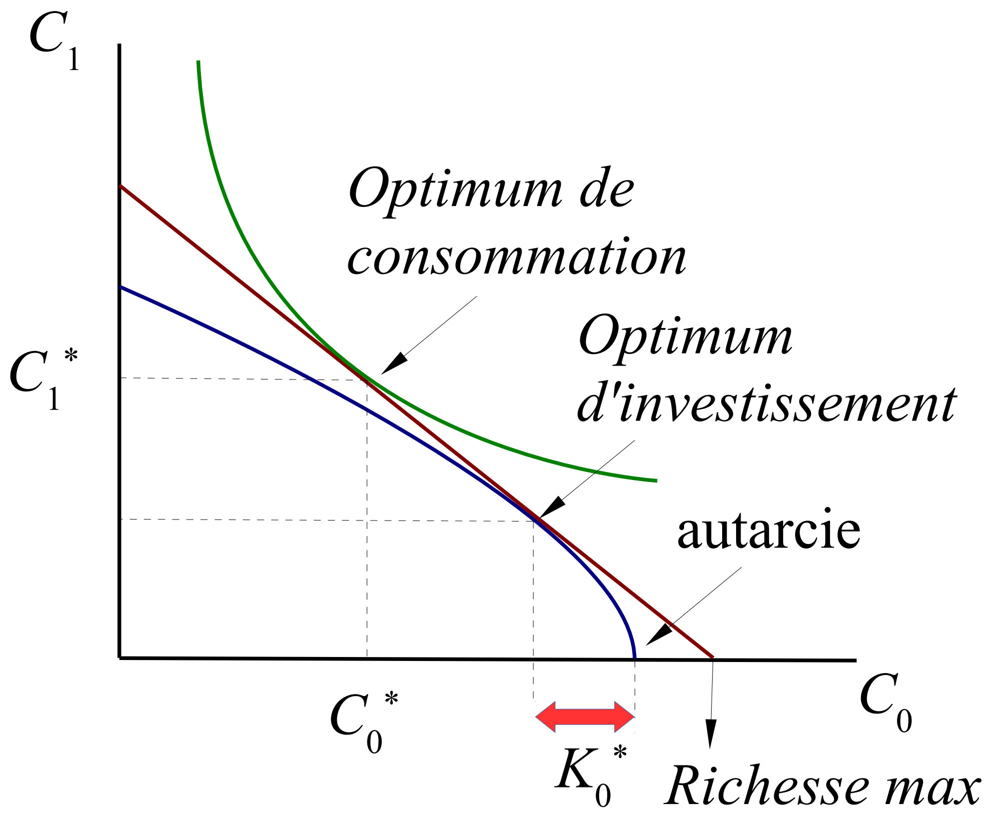


- en bleu : possibilité d'investissement dans une technologie à productivité marginale décroissante transformant les biens disponibles en t=0 en biens disponibles en t=1.
- en vert : courbe d'indifférence
- autarcie : absence d'échange intertemporel (ici : $Y_1 = 0$)

$$\text{Max } U(C_0, C_1)$$
$$\text{s.c.} \quad C_0 = f(K_0)$$
$$K_0 = Y_0 - C_0$$

→ *consommation et investissement sont des décisions inséparables.*

Avec marché financier



- en rouge : possibilité de prêter ou emprunter sur un *marché financier* à un taux de rémunération r donné.

Max U(C_0, C_1)
s.c. $C_1 = f(K_0) + (1+r_0)\ S_0$
$Y_0 = C_0 + K_0 + S_0$

soit s.c. $$\frac{C_1}{1+r_0}+C_0=Y_0+\frac{f(K_0)}{1+r_0}-K_0$$

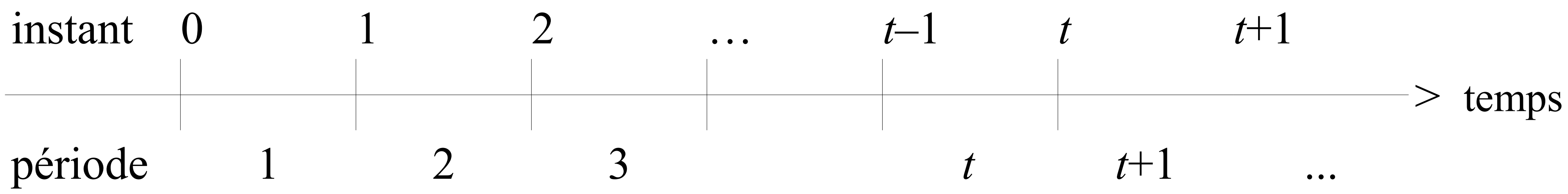
(1) maximiser la richesse en choisissant le montant investi
(max VAN de l'investissement)
(2) choisir les consommations

→ *consommation et investissement sont des décisions séparées.*

La représentation du temps :

temps « **discret** » (par opposition à « continu ») :

- ne peut prendre qu'un ensemble fini ou dénombrable de valeurs
- divisé en « périodes » (régulières) par des « instants »



ATTENTION : date (indice *t*) = « instant » ou « période » ?

Les **stocks** (valeurs des actifs et des passifs) mesurés à/datés par des « instants »

Les **flux** sont mesurés sur/devraient être datés par des « périodes »

Les **taux d'intérêt** devraient être datés par deux instants (initiation et échéance)

Convention :

tous les flux d'une périodes sont considérés comme survenant en début de période
→ toutes les dates sont des « instants »

- C_0 = consommation de la période 1
- Y_0 = revenu (« dotation ») de la période 1
- S_0 = épargne de la période 1
- r_0 = taux de rendement d'un placement/d'un emprunt (d'une durée d'1 période) entre les périodes 1 et 2 (entre les instants 0 et 1).

NB :

- le taux de rendement est supposé connu au moment de placer/d'emprunter

- contexte monopériodique : pas de « structure par terme » des taux d'intérêt (ni « taux court », ni de « taux long »)

1- CONTRAINTE BUDGÉTAIRE DANS LE MODÈLE À DEUX PÉRIODES

faire les comptes… d'un décideur devant choisir comment allouer des revenus *réels* disponibles à deux dates 0 et 1, entre des consommations *réelles* à ces deux dates

avec marché financier parfait

possibilité de placer/se financer au taux r_0

relation entre taux d'intérêt réel et taux d'intérêt nominal

extension à plusieurs périodes

avec avec marché financier imparfait

placer au taux r_P et se financer au taux r_E ($r_P < r_E$)

avec possibilité d’investir dans un projet

sans / avec marché financier

la valeur d'un actif comme somme des revenus actualisés qu'il procure

maximiser la *Valeur Actuelle Nette*

L'occasion de rappels méthodologiques (mathématiques, représentation graphique)

1.1- Contrainte budgétaire avec marché financier parfait

marché financier parfait : possibilité de placer/se financer au taux r_0

- **contrainte périodique :** emplois de la période = ressources de la période

  $C_0 + S_0 = Y_0$

  $C_1 = Y_1 + (1+r_0)\, S_0$

  autarcie financière : $S_0 = 0$ (ni prêt, ni emprunt), $C_0 = Y_0$ et $C_1 = Y_1$

- **contrainte intertemporelle :**
  - en valeur future : emplois capitalisés = ressources capitalisées

    $$C_1 + (1+r_0)\, C_0 = Y_1 + (1+r_0)\, Y_0$$
  - en valeur actuelle : emplois actualisés = ressources actualisées

    $$C_0 + \frac{C_1}{1+r_0} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r_0}$$ valeur actuelle des revenus futurs = « richesse »

→ ajouter des revenus, des dépenses à dates différentes en les convertissant :

$(1+r_0)$ et $1/(1+r_0)$ sont des prix relatifs.

Représentation graphique : ($Y_0 = 100$ et $Y_1, = 50$, $r_0 = 10$ %)

(1) tracer les axes :

axe des abscisses = axe des grandeurs « présentes » : C_0, Y_0, S_0, $Y_0/(1+r_0)$
axe des ordonnées = axe des grandeurs « futures » : C_1, Y_1, $(1+r_0)S_0$, $(1+r_0)\ Y_0$

(2) représenter le point d'autarcie

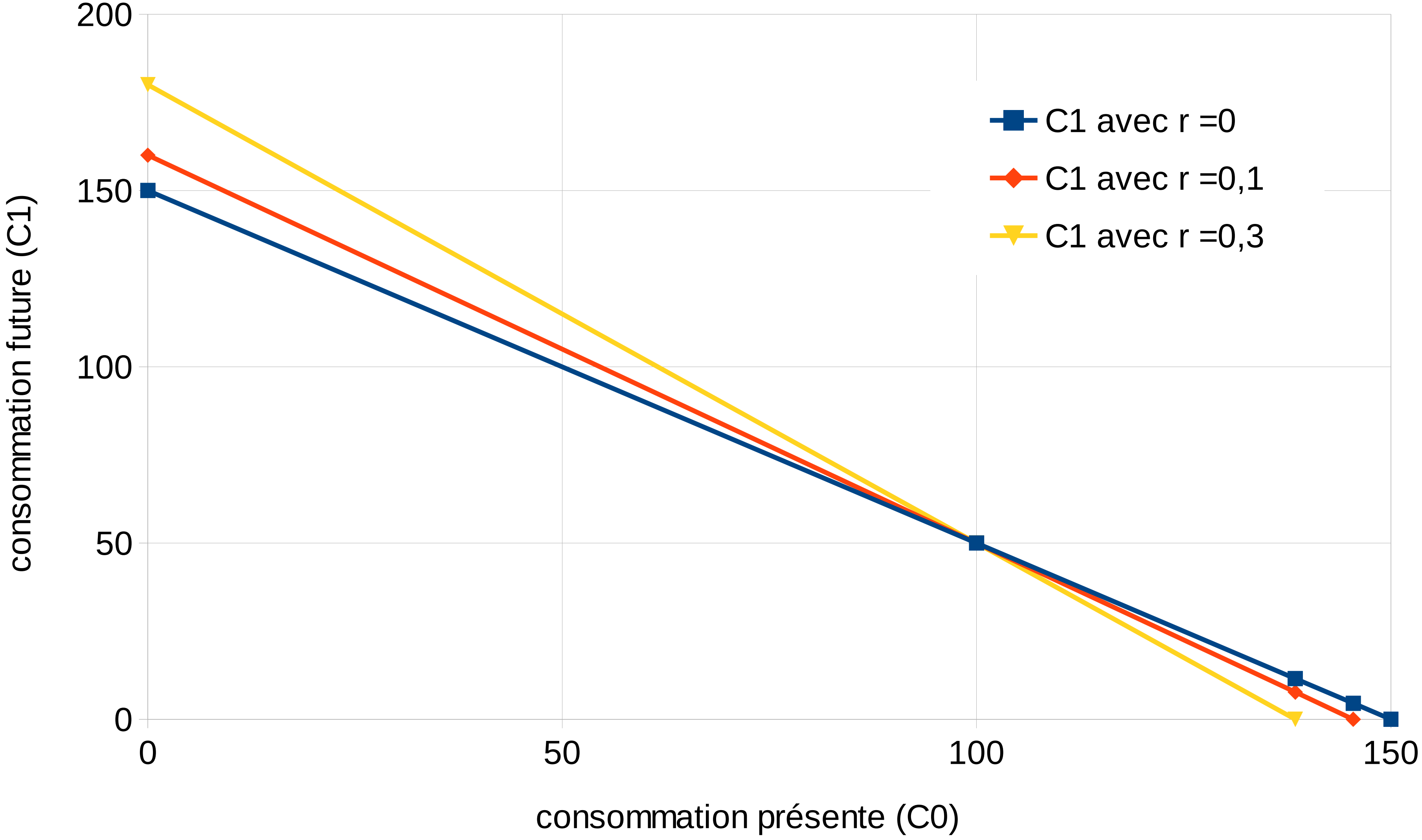
(3) tracer la « droite de budget » (quelle est sa pente?)

(4) représenter la richesse et la valeur capitalisée des ressources.

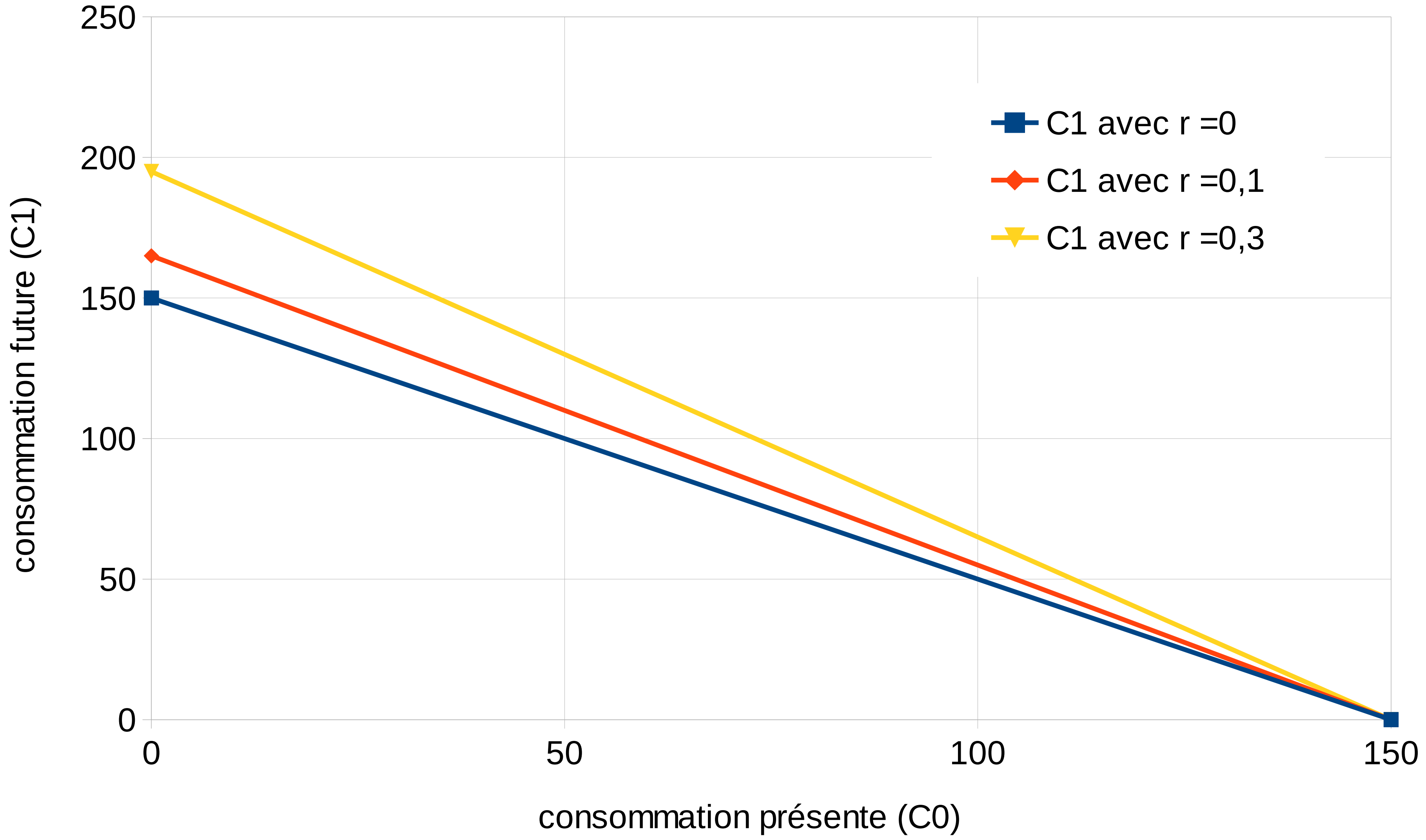
(5) Questions :

- Que représente la surface sous la droite ?
- Que représente la surface au-dessus de la droite ?
- Quel panier de consommation est choisi par une prêteuse / un emprunteur ? Représenter l'épargne. (Est-elle positive ou négative?)
- Comment la représentation de la droite change-t-elle quand r augmente ?

exemple : $Y_0 = 100$ et $Y_1, = 50$, $r_0 = 0$ %, puis 10 % puis 30 %



exemple : $Y_0 = 150$ et $Y_1, = 0$, $r_0 =$ 0 %, puis 10 % puis 30 %



Exercice de réflexion 1 : taux d'intérêt réel, taux d'intérêt nominal et inflation

Noter :

- C_t, Y_t et S_t les grandeurs réelles (volumes, quantités de bien) en date t.
- P_t le niveau des prix des biens en date t (mesurés en unités monétaires), et π le taux d'inflation entre les dates 0 et 1.
- c_t, y_t, s_t les grandeurs nominales
- r_0 le taux d'intérêt réel et i_0 le taux d'intérêt nominal entre les dates 0 et 1.

1. Réécrire les contraintes budgétaires en termes réels, puis en termes nominaux.
2. Quelle relation existe entre taux d'intérêt réel, taux d'intérêt nominal et inflation ?
3. Dans cette relation (dite « équation de Fischer »), le taux d'inflation est-il constaté ou prévu ?

1.2- Contrainte budgétaire avec avec marché financier imparfait

marché financier imparfait : placer au taux r_P et se financer au taux r_E ($r_P < r_E$)

- **contrainte périodique :** emplois de la période = ressources de la période

$C_0 + S_0 = Y_0$

$C_1 = Y_1 + (1+r_{0P})\, S_0$ si $S_0 \geq 0$

$C_1 = Y_1 + (1+r_{0E})\, S_1$ si $S_0 \leq 0$

autarcie financière : $S_0 = 0$ (ni prêt, ni emprunt), $C_0 = Y_0$ et $C_1 = Y_1$

- **contrainte intertemporelle :**
  - en valeur future : emplois capitalisés = ressources capitalisées

$$C_1 + (1+r_{0P})\, C_0 = Y_1 + (1+r_{0P})\, Y_0$$

→ capitalisation = report dans le futur d'une somme disponible aujourd'hui

  - en valeur actuelle : emplois actualisés = ressources actualisées

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r_{0E}} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r_{0E}}$$

→ actualisation = anticipation sur une somme disponible dans le futur

Représentation graphique : ($Y_0 = 100$ et $Y_1, = 50$, $r_{0P} = 10$ %, $r_{0P} = 30$ %)

(1) tracer les axes

(2) représenter le point d'autarcie

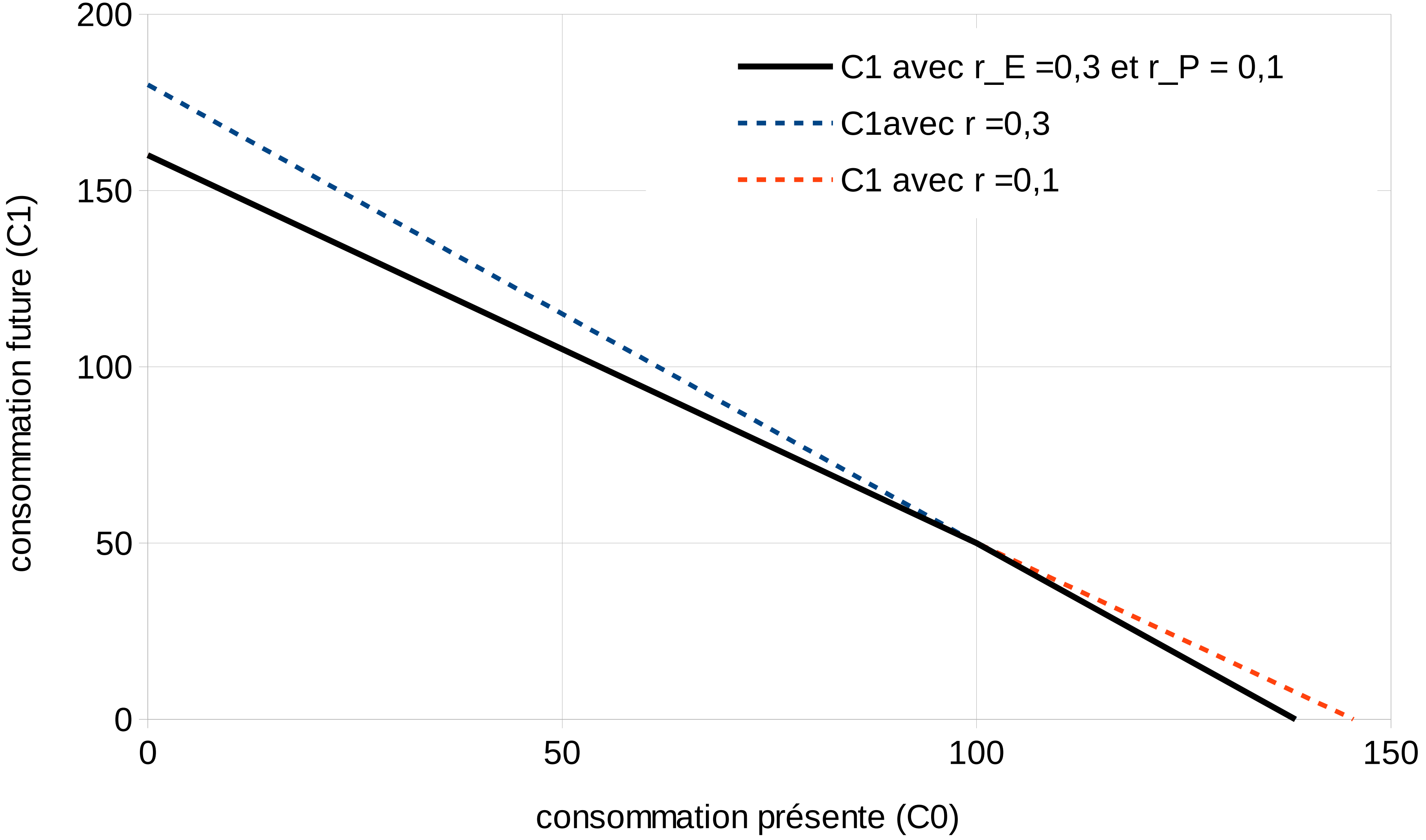
(3) tracer les deux « droites de budget » (une pour chaque taux d'intérêt)

(4) représenter la richesse et la valeur capitalisée des ressources.

(5) Questions :

- Où sont situés les paniers accessibles ?
- Qui est contraint par l'imperfection de marché (existence de taux d'intérêt) : le prêteur ou l'emprunteur ?

exemple : $Y_0 = 100$ et $Y_1, = 50$, $r_{0P} = 10$ %, $r_{0P} = 30$ %



Exercice de réflexion 2 :

Un ménage se voit refuser l'accès au crédit.

1. Comment ajuste-t-il sa consommation à une hausse, et à une baisse, du taux d'intérêt réel ?
2. La déréglementation des marchés financiers lui permet maintenant d'accéder au crédit. Comment varie sa richesse ? Et si la concurrence accrue, due à la déréglementation, fait diminuer les taux d'intérêt réel ?

(Raisonner dans le cadre du modèle de Fisher à deux périodes).

1.3- Contrainte budgétaire avec possibilité d'investir dans un projet

a- Les caractéristiques du projet :

- la transformation du capital investi en date 0 en revenu en date 1 est représentée par une « fonction de production » notée *f(K)*
- un capital K_0 investi en 0 génère un revenu brut $f(K_0)$ en 1

Définitions :

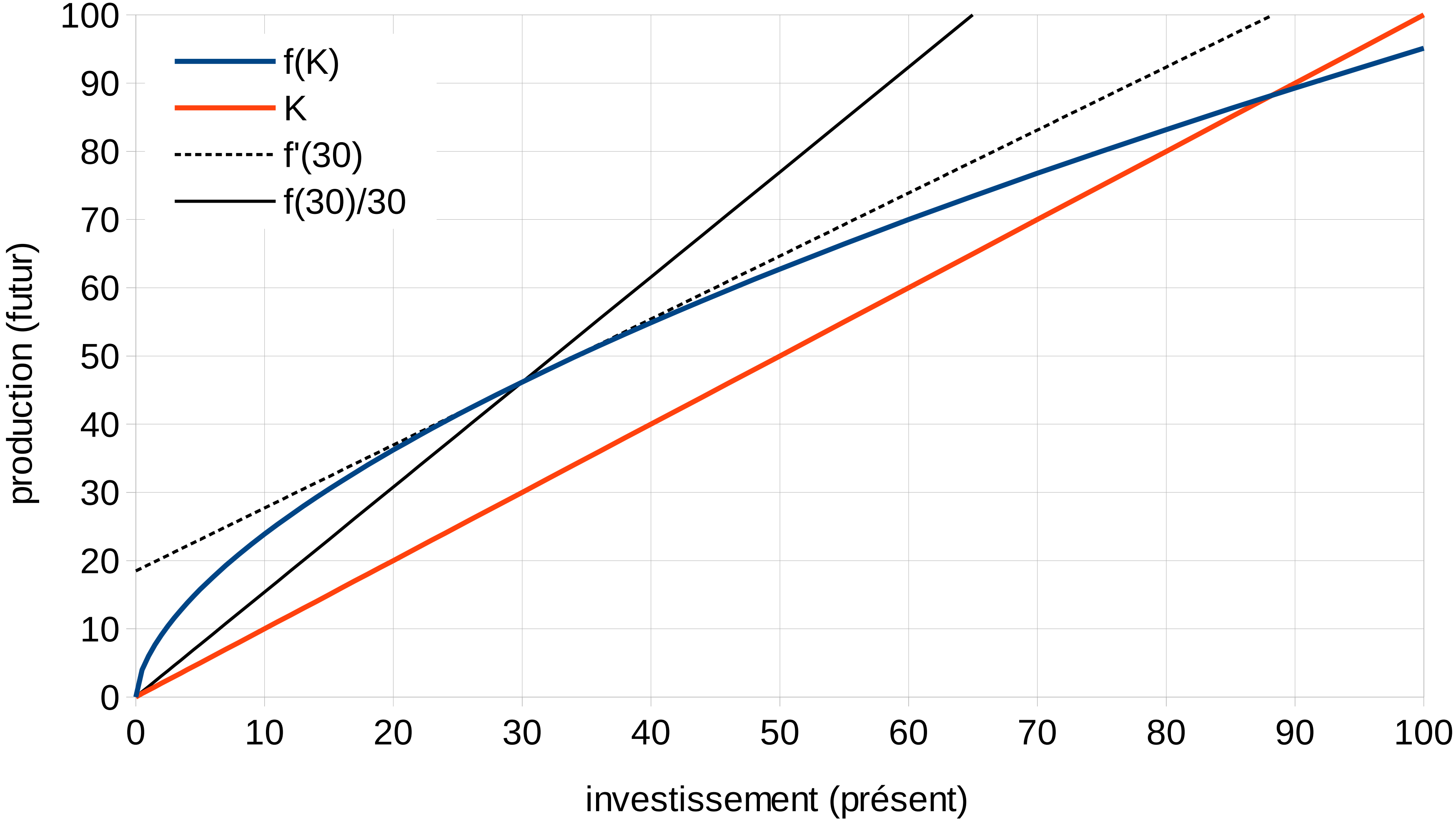
- productivité moyenne : revenu brut sur capital investi, $f(K) / K$
- productivité marginale : accroissement du revenu rapporté à un accroissement initial dK du capital investi, $[f(K+dK) - f(K)] / [dK]$

Pour un investissement initial K_0 la productivité marginale vaut :

$$\frac{f\left(K_0+dK\right)-f\left(K_0\right)}{dK}=f'\left(K_0\right)$$ → c'est la dérivée de la fonction *f(K)* en K_0

- taux de rentabilité : gain en % de l'investissement initial, $[f(K_0) - K_0] / K_0$
  taux de rentabilité = productivité moyenne – 1

Représentation graphique : $f(K) = 6\ K^{0,6}$



Quelques rappels mathématiques (pour une fonction différentiable)

la fonction $f(K)$ est croissante si :

- pour $X > K$, $f(X) > f(K)$
- $f'(K) > 0$
  la pente de la tangente est positive

la fonction est concave si :

- $f(\alpha K_0 + (1-\alpha) K_1) \geq \alpha f(K_0) + (1-\alpha) f(K_1)$ pour $0 \leq \alpha \leq 1$
  l'image de la moyenne est supérieure à la moyenne des images
- $f''(K) \leq 0$
  la pente est décroissante (la pente diminue quand K augmente)
- $f(K_1) - f(K_0) \leq (K_1 - K_0)\, f'(K_0)$
  la tangente est au-dessus de la courbe

Calculer $f'(K)$ et $f''(K)$ pour : $f(K) = 6\, K^{0,6}$. Vérifier si $f(K) = 6\, K^{0,6}$ est concave.
Que signifie, en termes économiques, que $f(K)$ est croissante et concave ?

Approximation linéaire en un point : tangente.

- Au point K_0, la dérivée de $f(K)$ vaut : $f'(K_0)$
- l'équation de la tangente est : $y = f(K_0) + f'(K_0)\ (K - K_0)$
- $f(K) \approx f(K_0) + f'(K_0)\ (K - K_0)$

Approximation polynomiale en un point : développement limité,

- Au point K_0 :

$$f(K) \approx f(K_0) + f'(K_0)(K - K_0) + \frac{1}{2} f''(K_0)(K - K_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(K_0)(K - K_0)^3 + \ldots$$

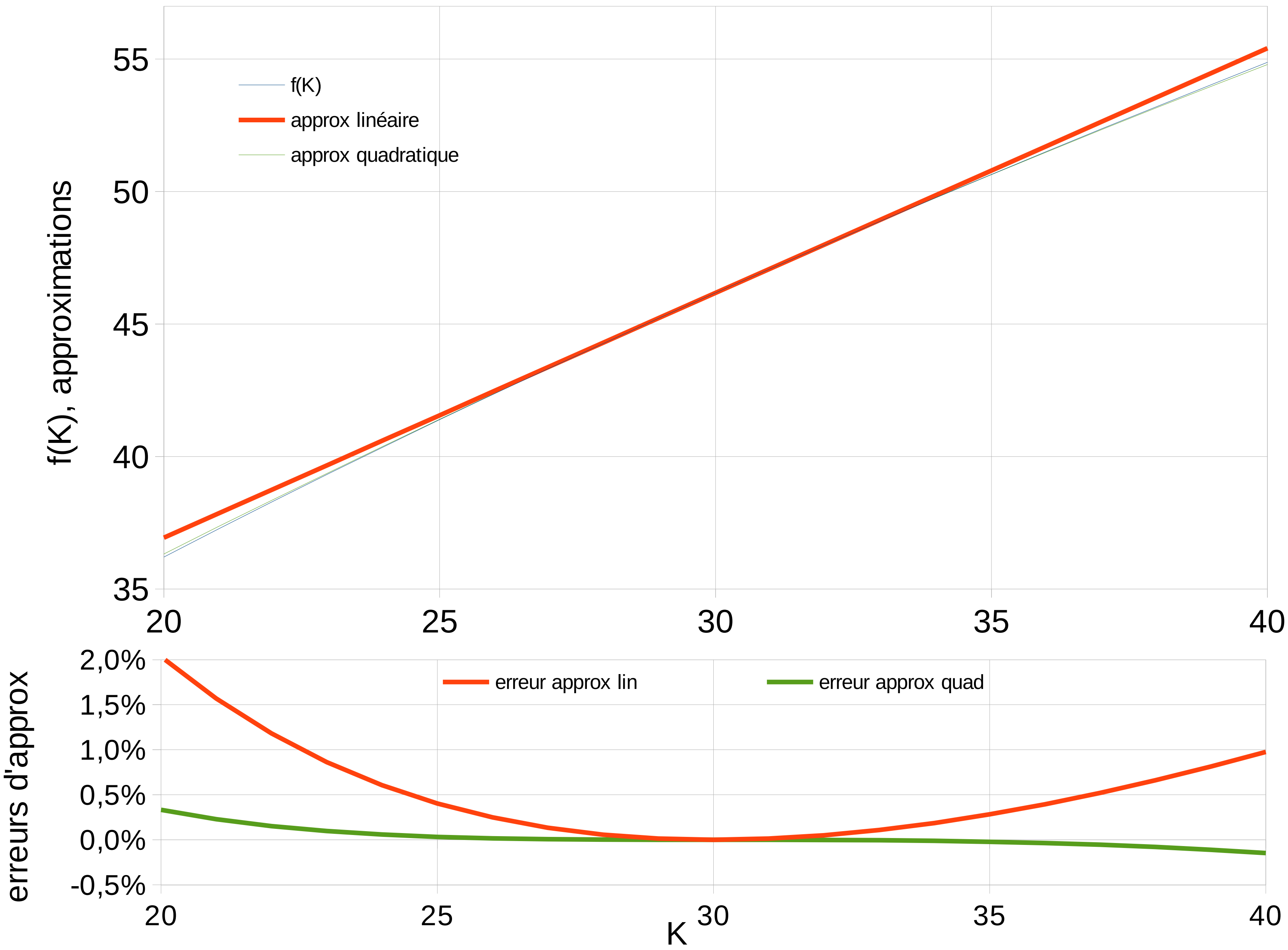
formule de Taylor, de terme général : $\frac{1}{n!} f^{(n)}(K_0)(K - K_0)^n$

Exemple :

Déterminez les approximations linéaire et quadratique de $f(K) = 6\ K^{0,6}$ au voisinage de $K=30$.

Représentez sur un graphique, pour K compris entre 20 et 40, $f(K)$, les approximations linéaire et quadratiques, et les erreurs d'approximation.

Représentation graphique de f(K) = 6 K^0,6 (pour K compris entre 20 et 40)



b- Possibilité d'investir dans un projet sans marché financier

sans marché financier : sans de possibilité de prêter ou d'emprunter

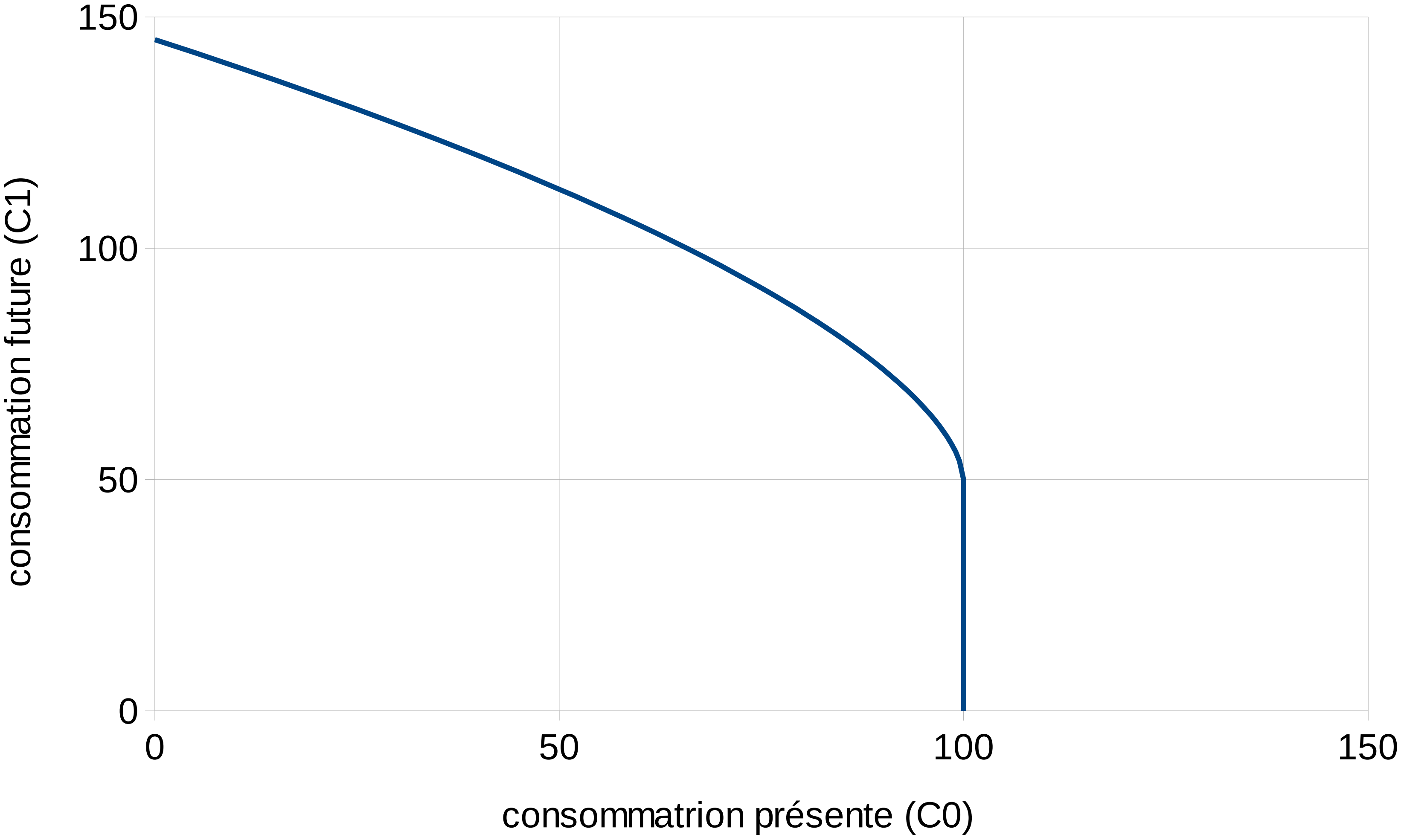
- **contrainte périodique :** emplois de la période = ressources de la période

  $C_0 + K_0 = Y_0$ avec $K_0 \geq 0$

  $C_1 = Y_1 + f(K_0)$

- **contrainte intertemporelle :**
  - en valeur future : $C_1 = Y_1 + f(Y_0 - C_0)$ *si* $Y_0 - C_0 \geq 0$
  - en valeur actuelle : pas de marché → pas de dotation future *actualisable*

Représentation graphique : $Y_0 = 100$ et $Y_1, = 50$ et $f(K) = 6\ K^{0,6}$



c- Possibilité d'investir dans un projet avec marché financier

avec marché financier : possibilité de prêter ou d'emprunter à taux de rendement donné

- **contrainte périodique :** emplois de la période = ressources de la période
  $C_0 + K_0 + S_0 = Y_0$ avec $K_0 \geq 0$ et S_0 positif ou négatif
  $C_1 = Y_1 + f(K_0) + (1+r_0)\, S_0$

- **contrainte intertemporelle :**
  - en valeur future : $C_1 = Y_1 + f(K_0) + (1+r_0)\,(Y_0 - C_0 - K_0)$
  - en valeur actuelle :

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r_0} = Y_0 + \frac{Y_1}{1+r_0} + \frac{f(K_0)}{1+r_0} - K_0$$

NB : le marché financier permet de donner une valeur présente au projet, $\frac{f(K_0)}{1+r_0}$

« la valeur d'un actif est égale à la somme des revenus actualisés qu'il procure »

$$C_0+\frac{C_1}{1+r_0}=Y_0+\frac{Y_1}{1+r_0}+\frac{f\left(K_0\right)}{1+r_0}-K_0$$

→ la richesse (somme des ressources actualisées) est composée de :

- la somme des revenus actualisés
- la Valeur Actuelle Nette (VAN) de l'investissement dans le projet

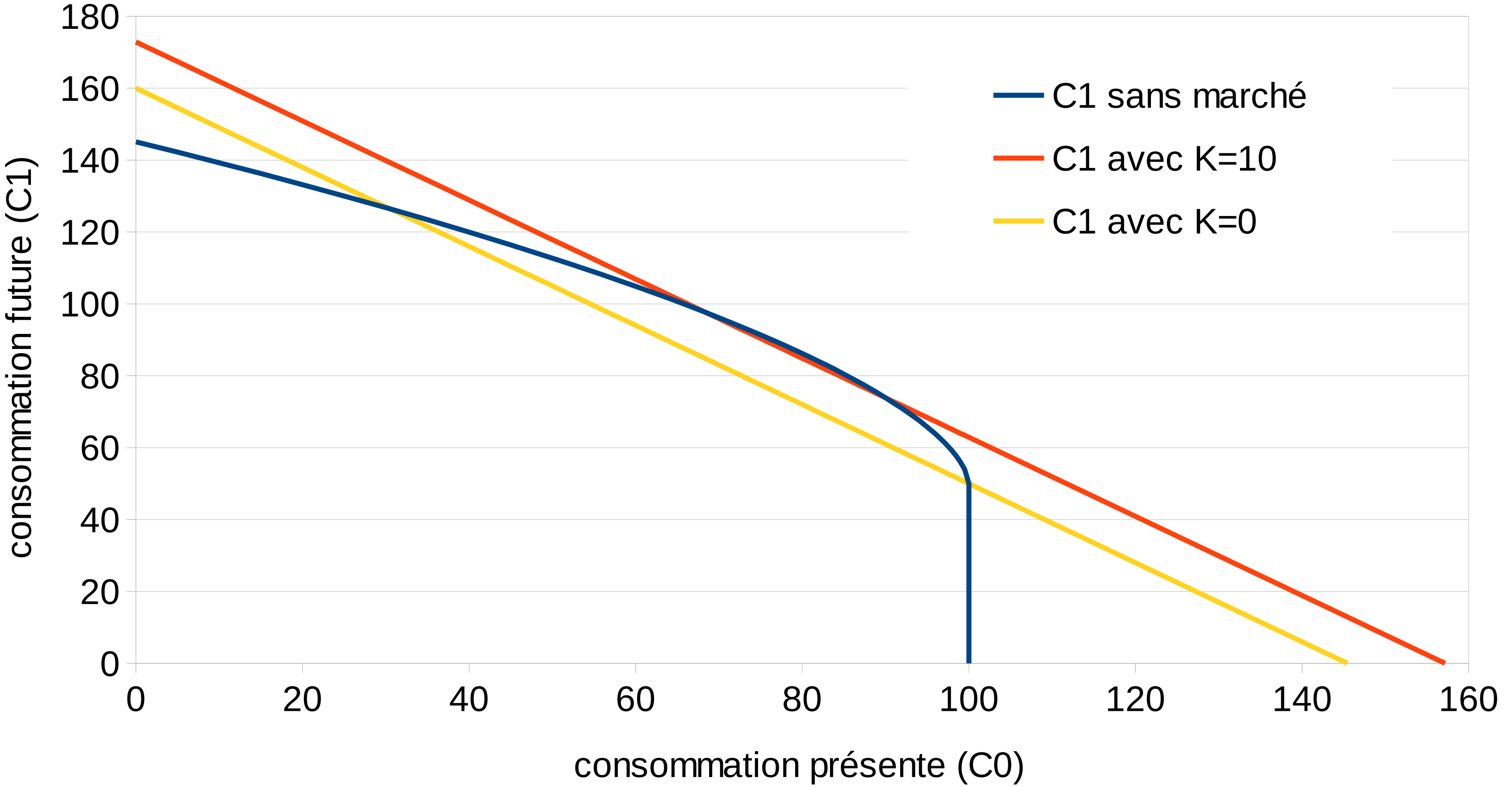
→ investir dans des projets à VAN > 0

- VAN > 0 signifie que *valeur* > coût initial donc… investissement profitable
- augmente la richesse (et les possibilités de consommation)
- modifie le point d'autarcie financière : out se passe comme si (Y_0, Y_1) devenait (Y'_0, Y'_1) avec $Y'_0 = Y_0 - K_0$ et $Y'_1 = Y_1 + f(K_0)$

→ **décision optimale d'investissement :**

- maximiser les possibilités de consommation (la richesse)
- investir le montant K_0* qui maximise $VAN(K_0)$
- utiliser des ressources propres ou emprunter au taux de marché pour financer l'investissement : le mode de financement n'a pas d'importance.

Représentation graphique : $Y_0 = 100$, $Y_1, = 50$, $f(K) = 6\,K^{0,6}$; $K_0 = 10$; $r_0 = 10\ \%$



Représenter : point d'autarcie, K_0, richesse avant/après investissement, $VAN(K_0)$.
Que représente la surface entre les deux droites ?
$K_0 = 10$ est-il le montant d'investissement optimal ?

L'investissement optimal (rappels d'optimisation d'un fonction différentiable) :

Maximiser $V(K) = \frac{f(K)}{1+r_0} - K$ sous contrainte $K \geq 0$

- condition de premier ordre (CPO) : *V'(K)* = 0
(« au sommet, la pente vaut 0 »)

  si V'(K) ne s'annule pas pour toute valeur admissible de K, c'est que
  - *V'(K) est toujours < 0 (la fonction V(K) est décroissante, elle atteint une valeur maximale pour le plus petit possible) ou que*
  - *V'(K) est toujours > 0 (la fonction V(K) est croissante, elle atteint une valeur maximale pour K le plus grand possible)*

- condition de deuxième ordre (CDO) : *V''(K)* ≤ 0 pour un maximum
(plus *K* monte, plus la pente diminue : la pente est positive avant le sommet, et devient négative après le sommet)

Maximiser $V(K)=\frac{f(K)}{1+r_0}-K$ revient à maximiser $v(K)=f(K)-(1+r_0)K$

(car r_0 ne dépend pas de K)

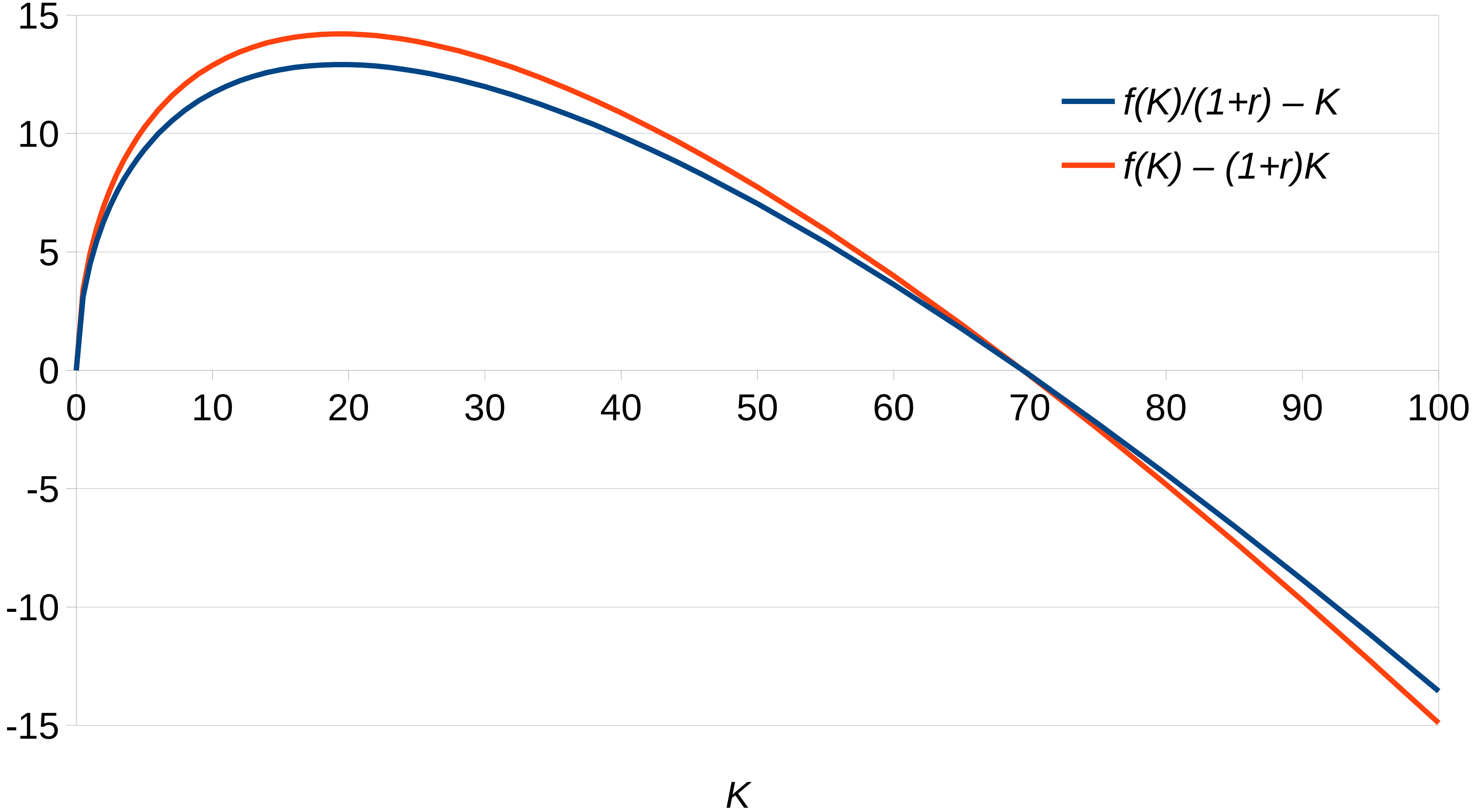
objectif	$V(K)=\frac{f(K)}{1+r_0}-K$	$v(K)=f(K)-(1+r_0)K$
CPO :	$\frac{f'(K)}{1+r_0}-1=0$	$f'(K)-(1+r_0)=0$
interprétation	$f'(K)=1+r_0$: revenu marginal = coût marginal	
CDO :	$\frac{f''(K)}{1+r_0}<0$	$f''(K)<0$
	Condition vérifiée si *f(K)* est concave	

Si $f(K) = 6\ K^{0,6}$ alors :

$CPO \Leftrightarrow\ 6 \times 0,6 \times K^{0,6-1} = 1 + r_0 \Leftrightarrow\ K^*=\left(\frac{3,6}{1+r_0}\right)^{2,5} \approx \frac{24,59}{(1+r_0)^{2,5}}$

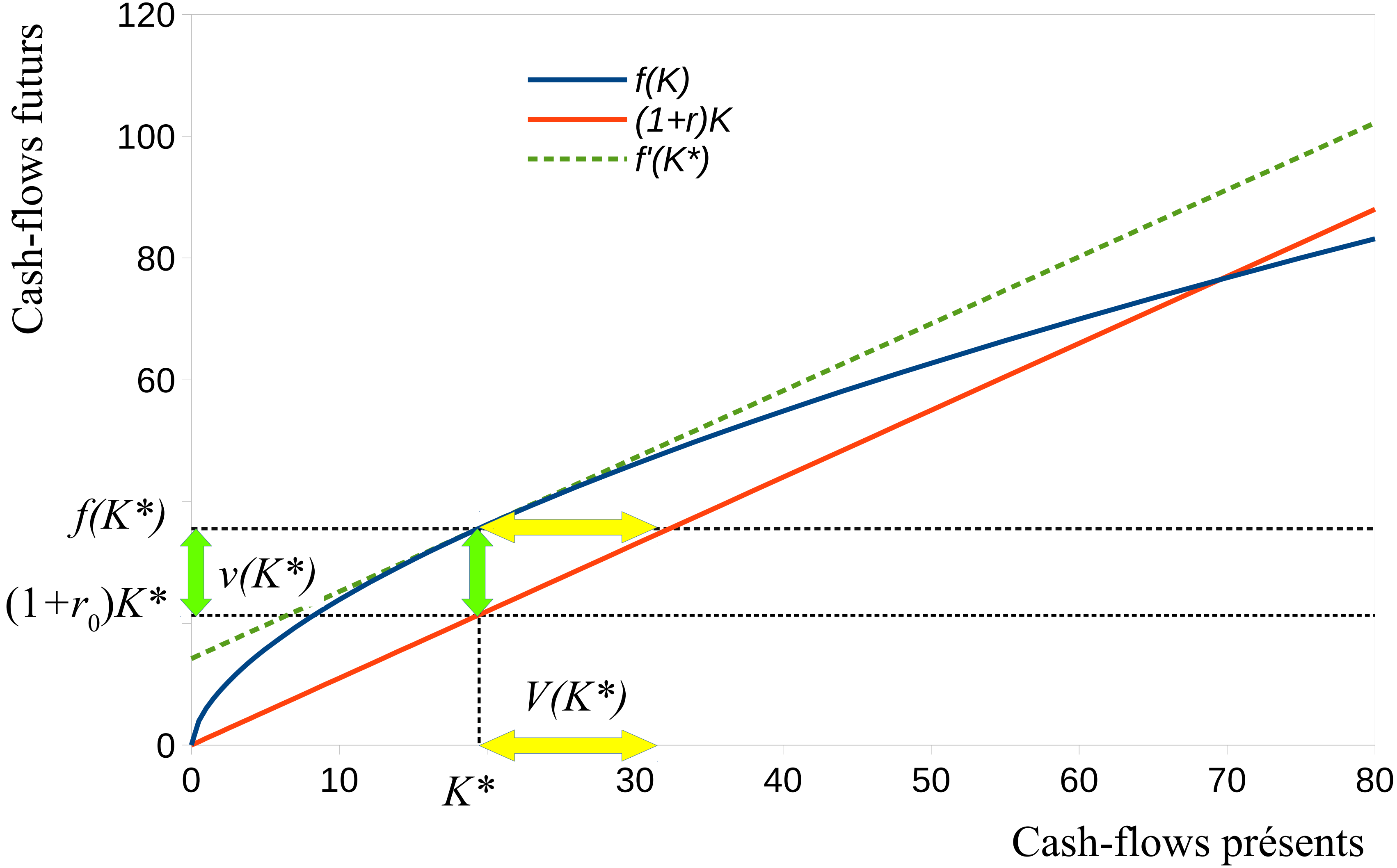
Représentation graphique : $\dfrac{f(K)}{1+r_0} - K$ et $f(K) - (1+r_0)K$ en fonction de K.

avec $f(K) = 6\,K^{0,6}$



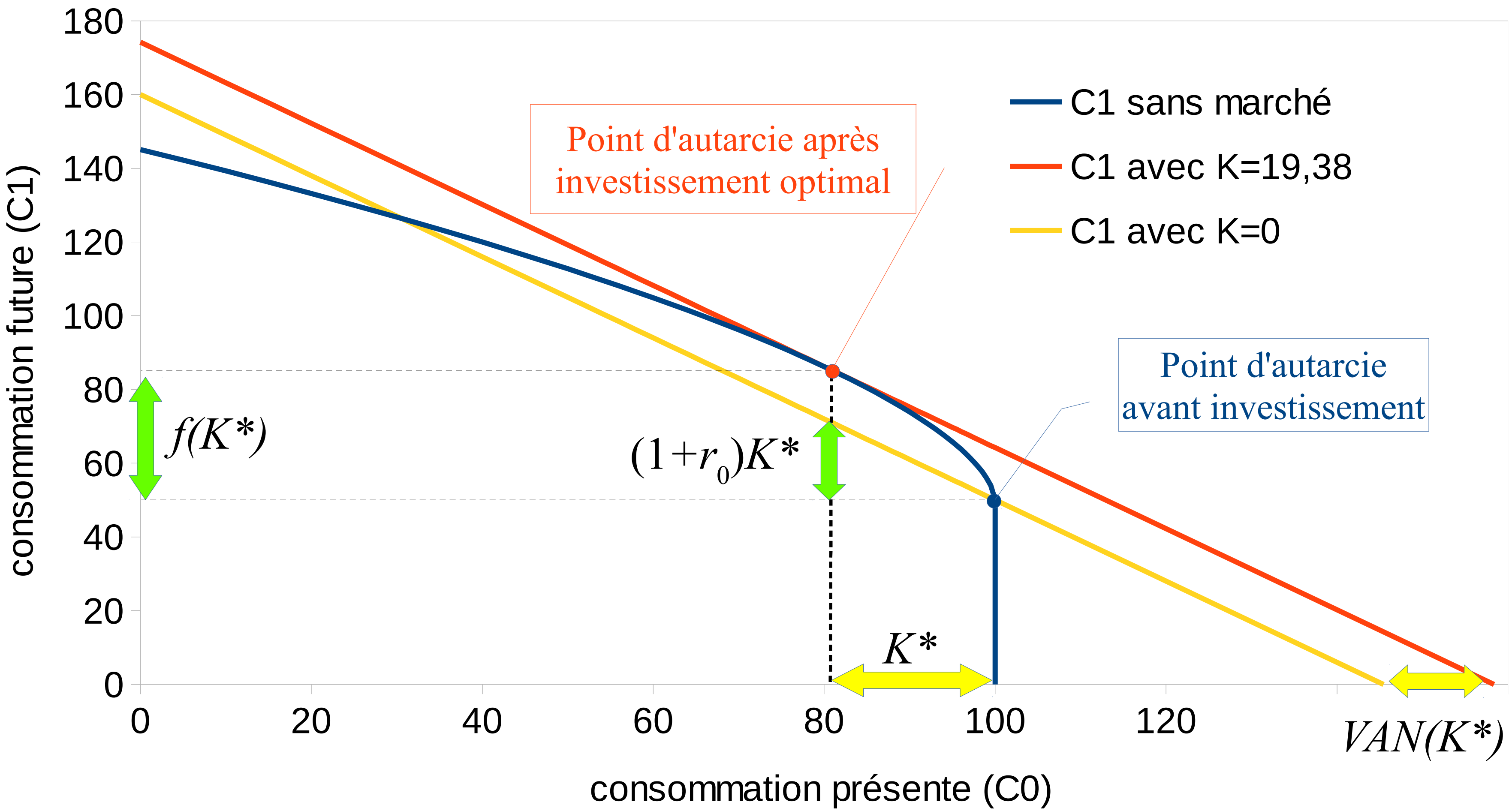
Comment la pente évolue-t-elle quand K augmente ?

Représentation graphique dans le plan (présent, futur)



NB : $V(K^*) = VAN(K^*)$

Représentation graphique de la contrainte budgétaire avec investissement optimal



NB : Entre les deux droites, nouvelles possibilités de consommation permises grâce à l'investissement optimal.

Exercice de réflexion 3 : impôt sur les bénéfices et modalités de financement

Un investisseur envisage un projet d'investissement sur une période de montant K qui génère un revenu f(K), fonction croissante et concave de K. L'alternative serait de placer sur le marché financier au taux d'intérêt r.
Il est réalisé sous la forme juridique d'une entreprise soumise à un impôt sur le bénéfice. Il peut être financé par fonds propres (FP) ou par endettement (D) au taux d'intérêt r sur le marché financier.
Les charges financières correspondant aux intérêts (rD) sont déductibles du bénéfice imposable (le remboursement de la dette ne l'est pas). On suppose que la période correspond à l'exercice fiscal et on note θ (thêta) le taux d'impôt sur les sociétés (IS).

1. Comparez les montants optimaux d'investissement selon que le financement est effectué entièrement par fonds propres ou entièrement par dette.
2. Recherchez (dans des sources fiables) ce que dit le « théorème de Modigliani et Miller ».

2- PRÉFÉRENCES DANS LE MODÈLE À DEUX PÉRIODES

Objet du choix : « panier » de biens datés (C_0, C_1) en quantités C_0 et C_1.

Les préférences sont dites « **rationnelles** » si elles sont…

- complètes : tous les paniers peuvent être classés par ordre de préférence
- transitives : si (C_0, C_1) est préféré à (Q_0, Q_1) et (Q_0, Q_1) est préféré à (Z_0, Z_1) alors (C_0, C_1) est préféré à (Z_0, Z_1)

→ des préférences rationnelles peuvent être représentées par une fonction d'utilité ordinale continue

Les préférences sont dites « **normales** » si elles sont…

- monotones : ($C_0+\Delta C_0$, $C_1+\Delta C_1$) est préféré à (C_0, C_1) pour tout $\Delta C_0 \geq 0$ et $\Delta C_1 \geq 0$
  → **préférence pour l'abondance** (biens désirables, non saturation)
- convexes : mélanger deux paniers préférés à (Z_0, Z_1), donne encore un panier préféré à (Z_0, Z_1)
  → **préférence pour le lissage** : paniers mélangés préférés aux paniers extrêmes

Fonction d'utilité : fonction à valeur réelle attribuant à tout panier de biens un nombre représentatif de son classement par ordre de préférence

$$(C_0, C_1) \text{ préféré à } (Q_0, Q_1) \Leftrightarrow U(C_0, C_1) \geq U(Q_0, Q_1)$$

NB :

- Le niveau d'utilité n'a pas de sens en soi :
  - l'utilité n'est pas **cardinale** : elle ne mesure pas la satisfaction
    → si $U(C_0, C_1) = 2$ et $U(Q_0, Q_1) = 4$,
    on *ne peut pas* dire que (Q_0, Q_1) *est deux fois plus utile que* (C_0, C_1) !
  - l'utilité est **ordinale** – elle reflète l'ordre de préférence
- L'utilité est personnelle, on ne peut pas comparer les niveaux d'utilité d'individus différents
- La fonction d'utilité est définie à une transformation croissante près :
  → soit $g()$ une fonction croissante,
  $U(C_0,C_1)$ et $g(U(C_0,C_1))$ représentent les mêmes préférences.

- **utilité marginale** du bien 0 : variation de l'utilité totale du panier pour une hausse infinitésimale de la quantité de bien 0, à quantité de bien 1 constante
  utilité marginale du bien 0 = dérivée partielle de $U(C_0, C_1)$ par rapport à C_0

$$U'_0(C_0, C_1) = \frac{\partial U(C_0, C_1)}{\partial C_0}$$

- utilité marginale **positive** : utilité croissante avec la quantité → bien désirable
  [utilité marginale négative : utilité décroissante avec la quantité → bien indésirable]

- utilité marginale **décroissante** : plus le bien est abondant (dans le panier), moins l'ajout de ce bien accroît l'utilité

Exemple :

$$U(C_0, C_1) = \frac{C_0^{1-s}}{1-s} + \delta \frac{C_1^{1-s}}{1-s} \quad \text{avec } 0 < \delta < 1,\ s > 0 \text{ et } s \neq 1$$

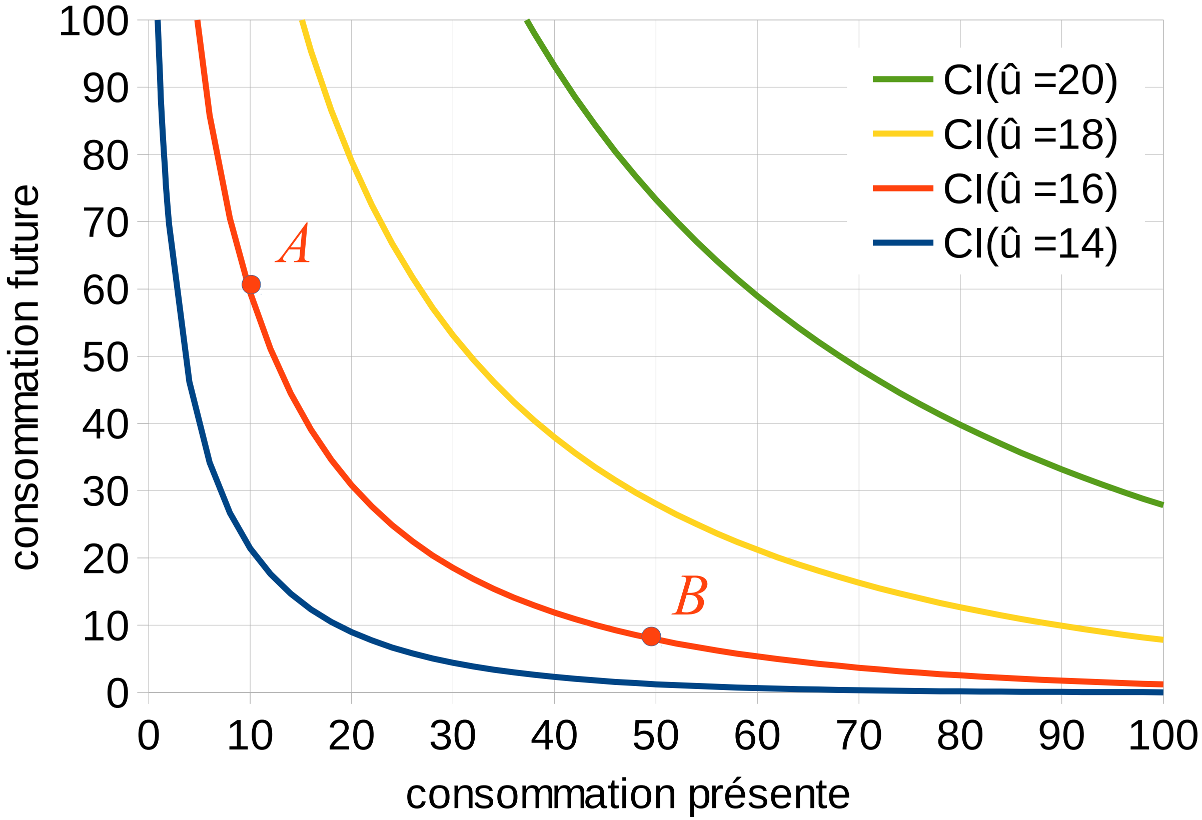
- Quelle est la particularité de cette fonction d'utilité ?
- Comment interpréter δ ?
- A quelle condition l'utilité est-elle positive ?
- A quelle condition l'utilité marginale de C_0 est-elle positive ?
- A quelle condition l'utilité marginale de C_0 est-elle décroissante ?

NB : avec $s = 1$, on aurait $U(C_0, C_1) = \ln C_0 + \delta \ln C_1$ rappel : $\frac{d \ln C_0}{d C_0} = \frac{1}{C_0}$

Courbe d'indifférence :

- ensemble des paniers de biens procurant un niveau donné d'utilité $CI(\hat{u})=\{(C_0,C_1) \mid U(C_0,C_1)=\hat{u}\}$
- frontière de l'ensemble des paniers de biens préférés à un panier donné

Représentation graphique : $U(C_0,C_1)=4C_0^{0,25}+0,8\times 4C_1^{0,25}$



Représenter le sens des niveaux d'utilité croissants.

Situer les paniers préférés à A.

Situer les paniers constitués de mélanges des paniers A et B.

Pourquoi cette fonction d'utilité représente-t-elle une préférence pour le lissage intertemporel de la consommation ?

Le **taux marginal de substitution** de la conso future à la conso présente ($TMS_{1,0}$) :

- nombre d'unités de « biens futurs » que le décideur est prêt à échanger contre une unité de « bien présent » à partir d'un panier donné, de sorte que son niveau d'utilité reste constant.
- pente, en un point donné, d'une courbe d'indifférence dans la plan « consommation présente, consommation future ».
- rapport de l'utilité marginale du bien du bien présent sur l'utilité marginale du bien futur

Calcul :

- si on modifie un peu les quantités consommée, le changement de niveau d'utilité est montré par la différentielle totale :

$$dU(C_0, C_1) = \frac{\partial U(C_0, C_1)}{\partial C_0} dC_0 + \frac{\partial U(C_0, C_1)}{\partial C_1} dC_1$$

- le niveau d'utilité est inchangé si $dU(C_0, C_1) = 0$ soit si :

$$\frac{-dC_1}{dC_0} = \frac{U'_0(C_0, C_1)}{U'_1(C_0, C_1)} = TMS_{1,0}$$

interprétation :

- $TMS_{1,0}$ = **prix subjectif** du bien présent en termes de biens futurs pour un panier donné.
- $TMS_{1,0} - 1$ = **taux de préférence pour le présent**
  $TMS_{1,0} - 1$ = nombre d'unités de C_1 *supplémentaires* que le décideur exige contre une unité de C_0 (à niveau d'utilité constant) = taux d'intérêt subjectif

Si les courbes d'indifférences sont convexes, le TMS est décroissant :

- convexité des courbes d'indifférences → pente diminue en valeur absolue quand la quantité de bien présent augmente (en même temps que la quantité de bien futur diminue)
- plus le bien présent est (relativement) abondant dans le panier, plus son prix (relatif) subjectif est bas

Application :

Calculer le TMS du bien futur au bien présent pour $U(C_0, C_1) = 4\,C_0^{0,25} + 0{,}8 \times 4\,C_1^{0,25}$

- Combien vaut-il pour $C_0 = 100$ et $C_1 = 50$?
- Comment interpréter ce nombre ?
- Combien vaut le taux de préférence pour le présent ?
- Le taux de rendement réel d'un placement sur le marché financier est de 10 %. Le panier ($C_0 = 100$, $C_1 = 50$) est-il optimal ?

3- DÉCISIONS OPTIMALES DANS LE MODÈLE À DEUX PÉRIODES

Maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire intertemporelle.

Max $U(C_0, C_1)$ sous contrainte $\dfrac{C_1}{1+r_0}+C_0=\dfrac{Y_1}{1+r_0}+Y_0$

NB : Y_0 et Y_1 après investissement optimal

Calcul :

(1) Substitution : contrainte $\rightarrow C_1 = g(C_0) \rightarrow U(C_0, C_1) = U(C_0, g(C_0)) = u(C_0)$

CPO : $u'(C_0) = 0$;

CDO : $u''(C_0) < 0$

(2) Lagrange : contrainte $\rightarrow h(C_0, C_1) = 0 \rightarrow L = U(C_0, C_1) + \lambda\, h(C_0, C_1)$

« lagrangien »

CPO : $\partial L/\partial C_0 = 0$; $\partial L/\partial C_1 = 0$; $\partial L/\partial \lambda = 0$;

$\rightarrow$ les courbes $h(C_0, C_1) = 0$ et $U(C_0, C_1) = \hat{u}^*$ sont tangentes

CDO : la matrice hessienne (dérivées secondes) est définie négative

(condition suffisante : que les courbes d'indifférences soient convexes)

Interprétation des conditions d'optimalité :

Avec les consommations optimales, le TMS du bien futur au bien présent doit être égal au prix relatif de marché du bien présent (1 + taux de rendement du marché).

- $TMS_{1,0}$: indique combien d'unités de consommation future le décideur exige en compensation d'une baisse d'une unité de consommation présente, à utilité constante
- $1 + r_0$: indique combien d'unités de consommation future le décideur peut obtenir en compensation d'une baisse d'une unité de consommation présente
- Si $TMS_{1,0} < 1 + r_0$: renoncer à de la consommation présente permet d'obtenir plus de consommation future que nécessaire pour garder l'utilité constante… l'utilité peut augmenter → le panier n'est pas optimal !
- Si $TMS_{1,0} > 1 + r_0$: …

$TMS_{1,0} \neq 1 + r_0$, en modifiant les consommations :

- le prix objectif de la consommation présente $1 + r_0$ ne change pas (c'est le prix d'un marché parfait, indépendant d'une décision individuelle) ;
- le prix subjectif de la consommation présente $TMS_{1,0}$ varie ;
- **le panier optimal est atteint quand le prix subjectif est égal au prix objectif**.

Exemple : $U(C_0, C_1) = \dfrac{C_0^{1-s}}{1-s} + \delta \dfrac{C_1^{1-s}}{1-s}$ et en notant $\Omega = \dfrac{Y_1}{1+r_0} + Y_0$

Montrer que les consommations optimales

- sont telles que : $\dfrac{C_1}{1+r_0} + C_0 = \Omega$ et $C_1 = [\delta(1+r_0)]^{1/s} C_0$
- et valent : $C_0^* = \dfrac{(1+r_0)\Omega}{(1+r_0)+[\delta(1+r_0)]^{1/s}}$ et $C_1^* = \dfrac{[\delta(1+r_0)]^{1/s}\Omega}{(1+r_0)+[\delta(1+r_0)]^{1/s}}$

Application numérique : $U(C_0, C_1) = 4\,C_0^{0,25} + 0,8 \times 4\,C_1^{0,25}$

Y_0 = 100 et Y_1, = 50, r_0 = 10 %.

Vérifier que :

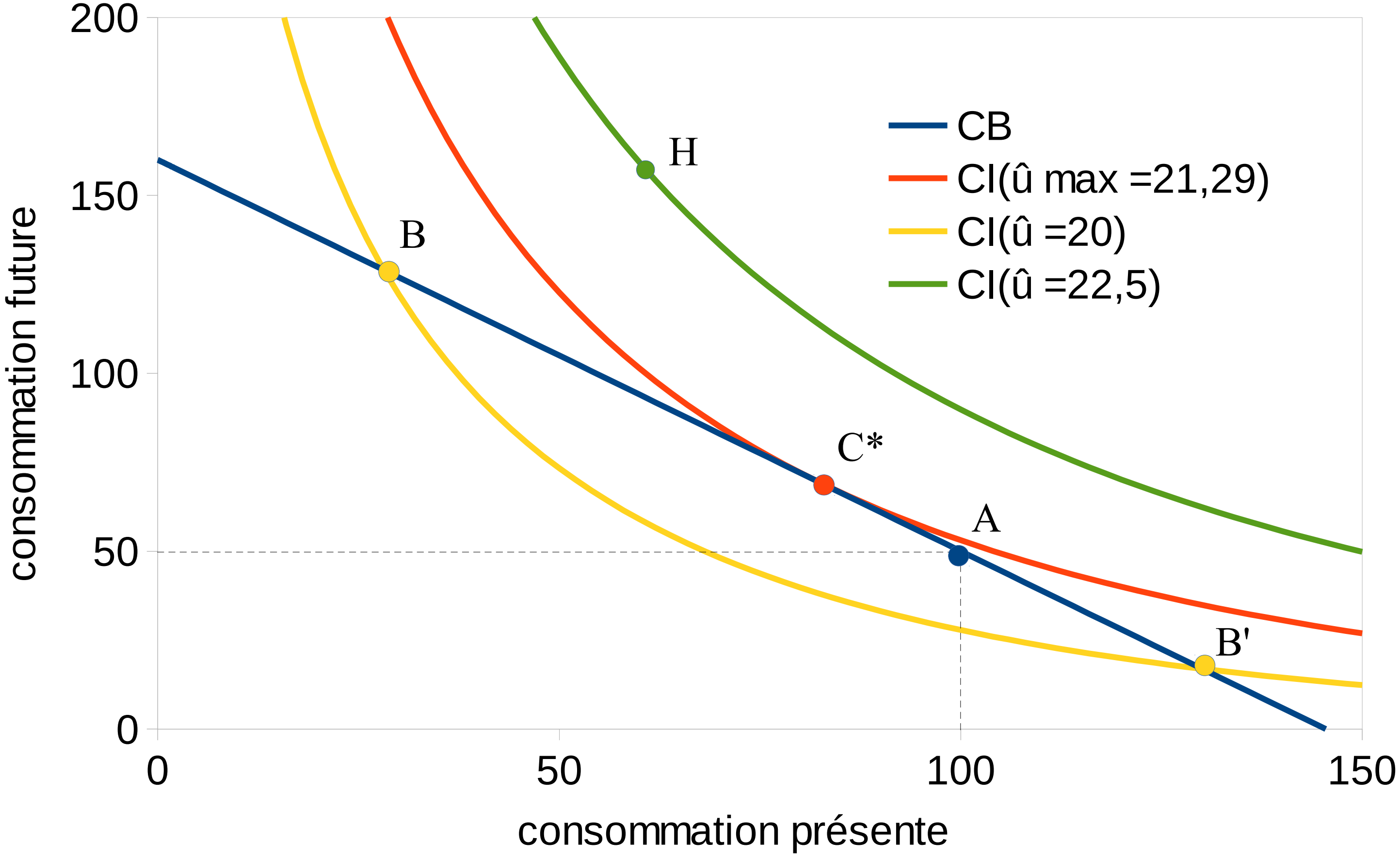
Ω = 145,45 ;

C_1^* = 1,1 (145,45 – C_0^*) et C_1^* = 0,8433 C_0^*

C_0^* = 82,33 ; C_1^* = 69,43

Représentation graphique : $U(C_0, C_1) = 4\,C_0^{0,25} + 0,8 \times 4\,C_1^{0,25}$

$Y_0 = 100$ et $Y_1, = 50$, $r_0 = 10$ %



P*ourquoi H n'est-il pas optimal ?*

Pourquoi B n'est-il pas optimal ?

Pourquoi B' n'est-il pas optimal ?

Exercice de réflexion 4 : le décideur est-il prêteur ou emprunteur ?

Le décideur est prêteur ou emprunteur si :

- Prêter ou emprunter vaut mieux que l'autarcie financière...
- Consommer le revenu de chaque période n'est pas optimal :
  Choisir le panier $A = (Y_0,Y_1)$ n'est pas optimal : $\mathrm{TMS}_{1,0}(A) \neq 1 + r_0$

Montrez que

- *pour un prêteur :* $TMS_{1,0}(A) < 1 + r_0$
- *pour un emprunteur :* $TMS_{1,0}(A) > 1 + r_0$

Représentez chaque optimum sur un schéma… et interprétez !

→ Prêteur ou emprunteur… selon dotations (A), taux d'intérêt, préférences

Statique comparative :

effet d'une hausse des revenus :

- les consommations présentes et futures sont des biens « **normaux** »,
  si : $\uparrow Y_0$ ou $Y_1 \rightarrow \uparrow C_0^*$ et $\uparrow C_1^*$
- si Y_0 augmente suffisamment, un emprunteur peut devenir prêteur
- si Y_1 augmente suffisamment, un prêteur peut devenir emprunteur

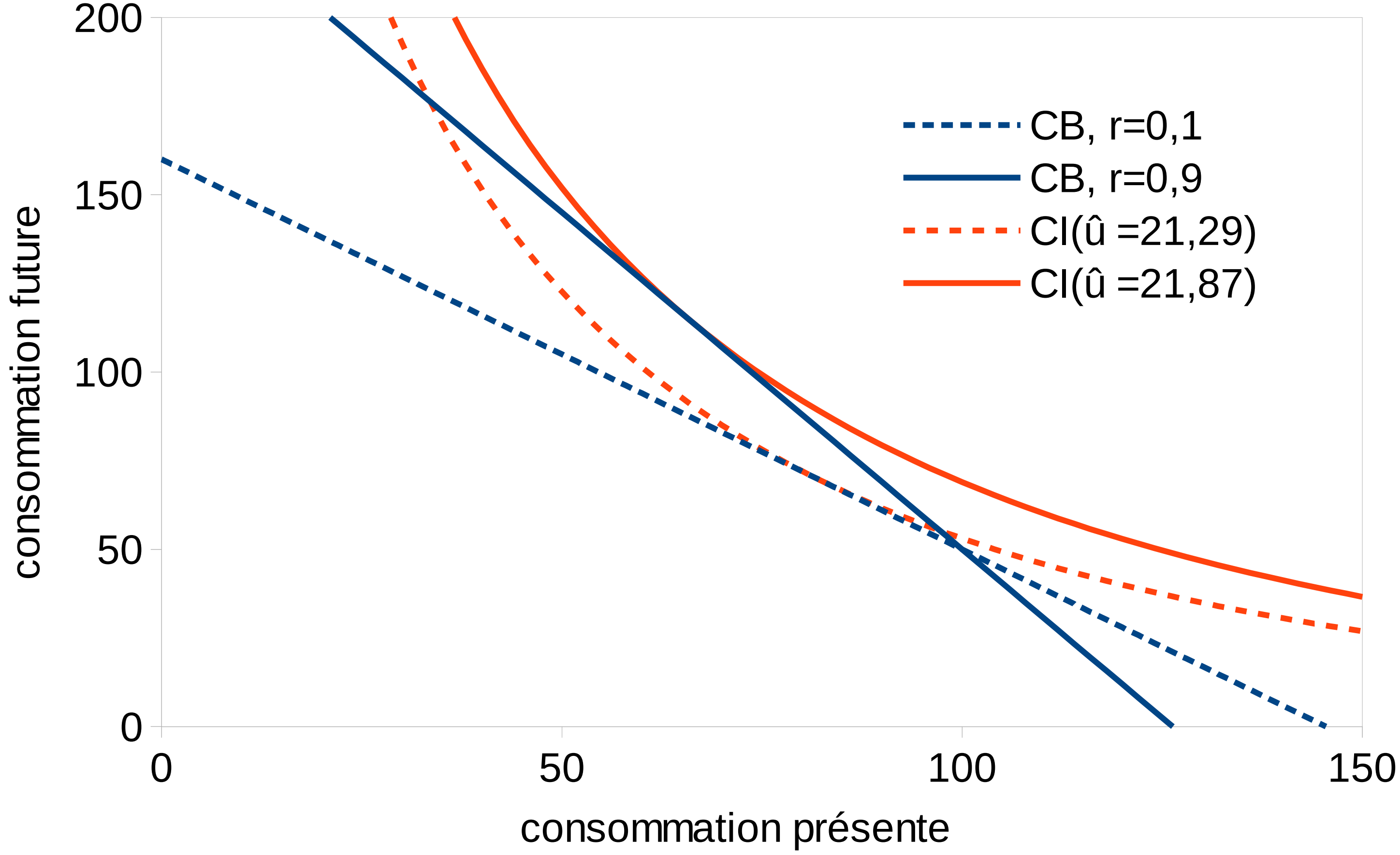
$\rightarrow$ lissage intertemporel des consommations

effet d'une hausse du taux d'intérêt :

- effet de substitution : $\uparrow r_0 \rightarrow \downarrow C_0^*$ et $\uparrow C_1^*$
- effet de revenu ordinaire : $\uparrow r_0 \rightarrow \uparrow$ revenus d'un prêteur $\rightarrow \uparrow C_0^*$
  $\downarrow$ revenus d'un emprunteur $\rightarrow \downarrow C_0^*$
- effet de richesse : $\uparrow r_0 \rightarrow \downarrow$ richesse ($\downarrow$ valeur act. de Y_1) $\rightarrow \downarrow C_0^*$ et $\downarrow C_1^*$

- la consommation présente est un bien « **typique** » si : $\uparrow r_0 \rightarrow \downarrow C_0^*$
  la consommation future est un bien « **typique** » si : $\uparrow r_0 \rightarrow \uparrow C_1^*$

Représentation graphique (effet d'une hausse du taux d'intérêt) :



4- ÉPARGNE ET ÉQUILIBRE DU MARCHÉ FINANCIER DANS LE MODÈLE À DEUX PÉRIODES

Exemple d'une économie à deux décideurs, *A* et *B* :

- épargne du décideur *i* : $S_i(r_0)$ = offre de financement

à l'équilibre :

- *A* finance *B* ou l'inverse (ou chacun reste en autarcie)
- le taux d'intérêt est tel que l'offre excédentaire de financement est nulle :

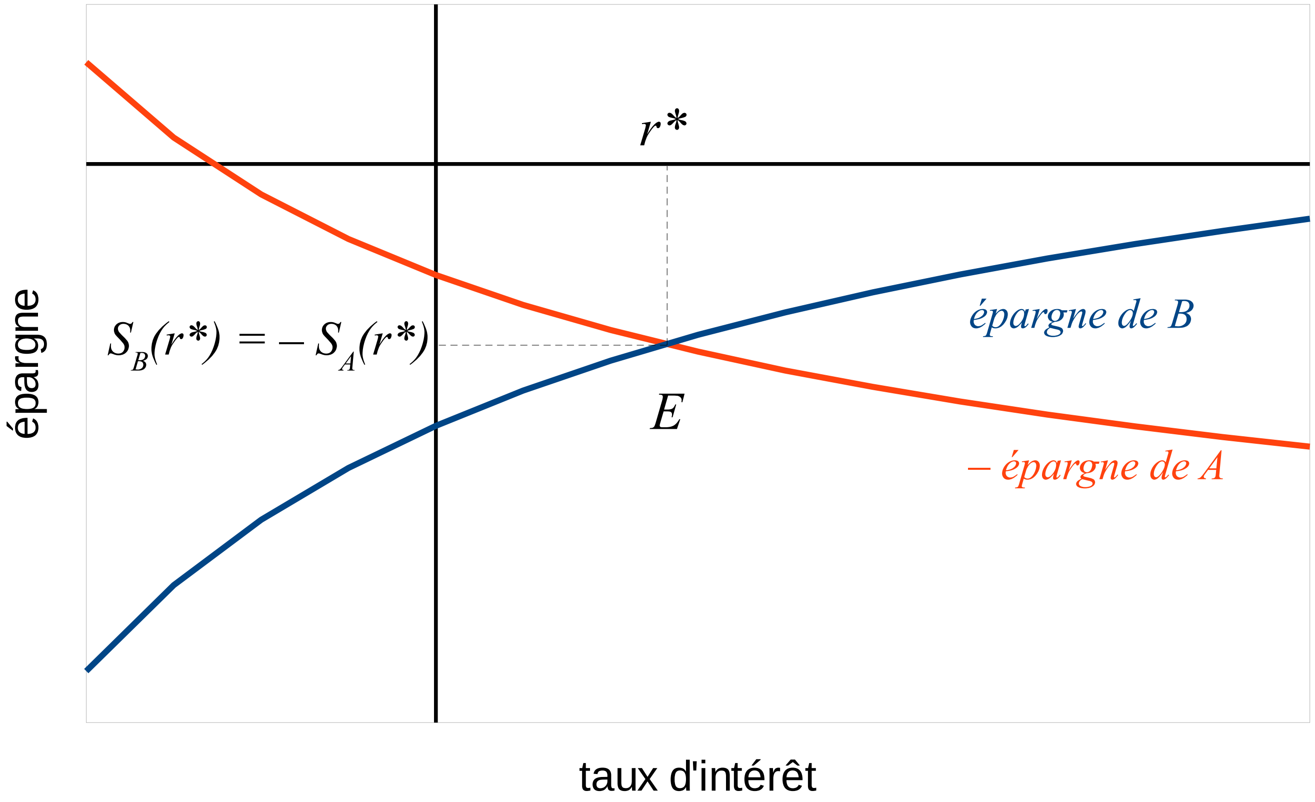
$$S_A(r^*) + S_B(r^*) = 0$$

- les $\text{TMS}_{1,0}$ des décideurs sont égaux : $\text{TMS}_{1,0}(A) = \text{TMS}_{1,0}(B) = 1 + r^*$

Que se passe-t-il si $TMS_{1,0}(A) > TMS_{1,0}(B)$?

- *il existe un gain à l'échange entre A et B… de quelle nature ?*
- *la situation n'est pas celle d'un équilibre*

Illustration graphique :



Sur ce schéma, à l'équilibre, *A* finance *B*.

Quelles pourraient en être les raisons (dotations, préférences) ?

Que se passerait-il si A et B avaient les mêmes revenus et les mêmes préférences ?

à l'équilibre d'un marché parfait :
toute opportunité d'échange est exploitée de manière mutuellement avantageuse

→ l'équilibre est un « **optimum au sens de Pareto** » : il est impossible de modifier l'allocation des ressources de manière à

- accroître simultanément l'utilité des décideurs,
- accroître celle de l'un sans baisser celle de l'autre.

→ l'allocation des ressources est « **efficace** »
(premier théorème de l'économie du bien-être)

CONCLUSION

le marché financier permet l'**allocation intertemporelle des ressources**

un marché financier parfait permet la séparation des décisions de consommation et d'investissement (« Théorème de séparation » de Fisher)

justification du critère de **maximisation de la Valeur Actuelle Nette** :

- équivalente à la maximisation de la richesse nette
- critère partagé par tous les décideurs, quelles que soient préférences individuelles
- des décideurs ± impatients font les mêmes choix d'investissement

  → le marché financier permet la **mise en commun des ressources**

justification de la rémunération des fonds (à l'équilibre du marché financier) :

- préférence pour le présent des individus : $r = \mathrm{TMS}_{1,0} - 1$
- rentabilité marginale des projets d'investissement : $r = f'(K) - 1$

ANNEXE : exercices récapitulatifs

Un individu salarié doit faire des choix intertemporels de consommation sur deux périodes, sa « vie active » (période 1) et sa « retraite » (période 2). Son revenu (salarial) de période 1 vaut 1, et il anticipe toucher en période 2 une pension de retraite égale à 0,5. Au point d'autarcie financière, son TMS de la consommation future à la consommation présente vaut 1 en valeur absolue. Le taux d'intérêt est de 20%.

1. Définir et interpréter le TMS.
2. Écrire sa contrainte budgétaire intertemporelle.
3. Indiquer si le salarié est épargnant ou emprunteur durant sa vie active (justifier).
4. Déterminer x si on suppose que la fonction d'utilité du salarié est de la forme : $u(C_1,C_2) = \ln C_1 + x \ln C_2$
5. Déterminer les consommations optimales.
6. Illustrer sur un schéma (avec la consommation présente en abscisse et la consommation future en ordonnée).

Un individu doit faire des choix intertemporels de consommation sur deux périodes. Sa dotation de période 1 vaut 1, sa dotation de période 2 vaut 0. Sa fonction d'utilité est de la forme : $u(C_1,C_2) = ln\ C_1 + ln\ C_2$. Il peut reporter sa consommation dans le temps au seul moyen d'une « technologie de production » à rendements marginaux décroissants $f(K) = K^{0,5}$.

1. Écrire sa contrainte budgétaire intertemporelle.
2. Montrer que l'investissement optimal vaut $K^* = 1/3$.
3. Illustrer ses choix optimaux de consommation et d'investissement sur un schéma.

On suppose dorénavant que l'individu dispose à la fois de la « technologie de production » $f(K) = K^{0,5}$ et d'un accès concurrentiel au marché financier (possibilité de placement ou d'emprunt à taux d'intérêt réel donné *r*) pour reporter sa consommation dans le temps.

4. Écrire sa contrainte budgétaire intertemporelle en valeur actuelle, en faisant clairement apparaître la richesse.
5. Quelle serait sa décision optimale d'investissement ?
6. Quel principe de valorisation des actifs est utilisé dans ce modèle ?
7. On suppose que $r = 0$. Illustrez sur un schéma l'optimum de consommation et d'investissement sur deux périodes.
8. Qu'est-ce que le théorème de séparation de Fisher ?
9. Quelle relation existe à l'optimum entre préférence pour le présent, rendement du capital et taux d'intérêt ?

ANNEXE : Extension à plusieurs périodes

a- Contrainte intertemporelle capitalisée

	Contrainte périodique	Capitalisation de l'épargne
(1)	$C_0 + S_0 = Y_0$	$S_0 = Y_0 - C_0$
(2)	$C_1 + S_1 = Y_1 + (1+r_0)\, S_0$	$S_1 = Y_1 - C_1 + (1+r_0)(Y_0 - C_0)$
(3)	$C_2 + S_2 = Y_2 + (1+r_1)\, S_1$	$S_2 = Y_2 - C_2 + (1+r_1)[Y_1 - C_1 + (1+r_0)(Y_0 - C_0)]$
...	…	...
(t+1)	$C_t + S_t = Y_t + (1+r_{t-1})\, S_{t-1}$	$S_t = Y_t - C_t + (1+r_{t-1})(Y_{t-1} - C_{t-1})$ $+\ldots$ $+ [(1+r_{t-1})...(1+r_0)](Y_0 - C_0)$
	…	...
(T)	$C_{T-1} + S_{T-1} = Y_{T-2} + (1+r_{T-2})\, S_{T-2}$	$S_{T-1} = 0 = Y_{T-1} - C_{T-1} + (1+r_{T-2})(Y_{T-2} - C_{T-2})$ $+\ldots$ $+ [(1+r_{T-2})...(1+r_0)](Y_0 - C_0)$

La $T^{\text{ème}}$ période est la dernière… (la personne le sait et n'épargne pas à l'instant $T - 1$)

Notation :

- somme de termes : $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N = \sum_{t=1}^{N} X_t$ et $X_1 = \sum_{t=1}^{1} X_t$
- produit de facteurs : $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_N = \prod_{t=1}^{N} X_t$ et $X_1 = \prod_{t=1}^{1} X_t$

NB : si $X_1 = X_2 = \ldots = X_N = X$ alors

- somme de termes égaux : $\sum_{t=1}^{N} X = X \sum_{t=1}^{N} 1 = N\,X$
- produit de facteurs égaux : $\prod_{t=1}^{N} X = X^N$

NB : en posant $t' = t - 1$ et $t = t' + 1$

- $\sum_{t=1}^{N} X_t = \sum_{t'=0}^{N-1} X_{t'+1}$

contraintes intertemporelle capitalisée :

$$0 = Y_{T-1} - C_{T-1} + (1+r_{T-2})(Y_{T-2} - C_{T-2}) +\ldots+ [(1+r_{T-2})...(1+r_0)](Y_0 - C_0)$$

$$0 = Y_{T-1} - C_{T-1} + \sum_{t=0}^{T-2}\left[\left(\prod_{i=t}^{T-2}(1+r_i)\right)(Y_t - C_t)\right]$$

soit : $$Y_{T-1} + \sum_{t=0}^{T-2}\left[\left(\prod_{i=t}^{T-2}(1+r_i)\right)Y_t\right] = C_{T-1} + \sum_{t=0}^{T-2}\left[\left(\prod_{i=t}^{T-2}(1+r_i)\right)C_t\right]$$

somme des ressources capitalisées = somme des emplois capitalisés

$\prod_{i=t}^{T-2}(1+r_i)$ = facteur de capitalisation jusqu'à l'instant $T - 1$ du flux perçu en t

si $r_0 = r_1 = \ldots = r_{T\text{-}2} = r$ alors $\prod_{i=t}^{T-2} (1+r_i) = (1+r)^{T-1-t}$ (produit de T–1–t facteurs égaux)

→ r = taux de rendement *périodique* moyen sur l'ensemble des périodes t+1 à T.

la contrainte intertemporelle capitalisée se réécrit :

$$Y_{T-1} + \sum_{t=0}^{T-2} (1+r)^{T-1-t} Y_t = C_{T-1} + \sum_{t=0}^{T-2} (1+r)^{T-1-t} C_t$$

soit :

$$\sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-1-t} Y_t = \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-1-t} C_t$$

Pourquoi ne pas considérer que la personne peut épargner d'emblée sur plusieurs périodes, plutôt que de période en période ? Qu'est-ce que ça changerait ?

b- contrainte intertemporelle actualisée

actualiser → anticiper sur des flux futurs : « s'endetter » pour consommer plus que son revenu dans le présent, et rembourser dans le futur (imaginer S<0)

	Contrainte périodique	Actualisation de l'épargne
(T)	$C_{T\text{-}1} = Y_{T\text{-}1} + (1+r_{T\text{-}2})\, S_{T\text{-}2}$	$S_{T\text{-}2} = (1+r_{T\text{-}2})^{-1}(C_{T\text{-}1} - Y_{T\text{-}1})$
(T–1)	$C_{T\text{-}2} + S_{T\text{-}2} = Y_{T\text{-}2} + (1+r_{T\text{-}3})\, S_{T\text{-}3}$	$S_{T\text{-}3} = [(1+r_{T\text{-}3})(1+r_{T\text{-}2})]^{-1}(C_{T\text{-}1} - Y_{T\text{-}1}) + (1+r_{T\text{-}3})^{-1}(C_{T\text{-}2} - Y_{T\text{-}2})$
...	…	...
(t+1)	$C_t + S_t = Y_t + (1+r_{t\text{-}1})\, S_{t\text{-}1}$	$S_{t\text{-}1} = (1+r_{t\text{-}1})^{-1}(C_t - Y_t) + [(1+r_{t\text{-}1})(1+r_t)]^{-1}(C_{t+1} - Y_{t+1})$ $+\ldots + [(1+r_t)...(1+r_{T\text{-}2})]^{-1}(C_{T\text{-}1} - Y_{T\text{-}1})$
	…	...
(2)	$C_1 + S_1 = Y_1 + (1+r_0)\, S_0$	$S_0 = (1+r_0)^{-1}(C_1 - Y_1) + [(1+r_0)(1+r_1)]^{-1}(C_2 - Y_2)$ $+\ldots + [(1+r_0)...(1+r_{T\text{-}2})]^{-1}(C_{T\text{-}1} - Y_{T\text{-}1})$
(1)	$C_0 + S_0 = Y_0$	$0 = C_0 - Y_0 + (1+r_0)^{-1}(C_1 - Y_1) + [(1+r_0)(1+r_1)]^{-1}(C_2 - Y_2)$ $+\ldots + [(1+r_0)...(1+r_{T\text{-}2})]^{-1}(C_{T\text{-}1} - Y_{T\text{-}1})$

La personne n'hérite d'aucun actif/passif en date 0 ($S_{\text{-}1} = 0$)...

contrainte intertemporelle actualisée :

$$0 = C_0 - Y_0 + \frac{C_1 - Y_1}{(1+r_0)} + \frac{C_2 - Y_2}{(1+r_0)(1+r_1)} + \ldots + \frac{C_{T-1} - Y_{T-1}}{(1+r_0)\ldots(1+r_{T-2})}$$

soit : $$Y_0 + \frac{Y_1}{(1+r_0)} + \ldots + \frac{Y_{T-1}}{(1+r_0)\ldots(1+r_{T-2})} = C_0 + \frac{C_1}{(1+r_0)} + \ldots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_0)\ldots(1+r_{T-2})}$$

soit : $$Y_0 + \sum_{t=1}^{T-1}\left[\left(\prod_{i=1}^{t}(1+r_{i-1})\right)^{-1} Y_t\right] = C_0 + \sum_{t=1}^{T-1}\left[\left(\prod_{i=1}^{t}(1+r_{i-1})\right)^{-1} C_t\right]$$

somme des ressources actualisées = somme des emplois actualisés

$$\left[\prod_{i=1}^{t}(1+r_{i-1})\right]^{-1} = \left[\prod_{j=0}^{t-1}(1+r_j)\right]^{-1}$$ = facteur d'actualisation en 0 du flux perçu en t

= produit des facteurs d'actualisations applicables aux flux des périodes intermédiaires si $r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_{t\text{-}1} = r$ alors $\left[\prod_{i=1}^{t}\left(1+r_{i-1}\right)\right]^{-1} = \left(1+r\right)^{-t} = \dfrac{1}{\left(1+r\right)^{t}}$

→ r = taux d'actualisation constant

= taux de rendement « périodique » moyen sur l'ensemble des périodes 1 à t+1

contrainte intertemporelle actualisée s'écrit : $\sum_{t=0}^{T-1}\dfrac{Y_t}{\left(1+r\right)^{t}} = \sum_{t=0}^{T-1}\dfrac{C_t}{\left(1+r\right)^{t}}$

Supposons que le revenu est constant dans le temps et vaut 1 *:* $Y_0 = Y_1 = \ldots = Y_{T\text{-}1} = 1$.

Montrez que la richesse vaut : $\sum_{t=0}^{T-1}\dfrac{1}{\left(1+r\right)^{t}} = \sum_{t=0}^{T-1}\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^{t} = 1 + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r\left(1+r\right)^{T-1}}$

Comment l'expression change-t-elle si $Y_0 = 0$ et $Y_1 = \ldots = Y_{T\text{-}1} = 1$ *?*

Et quand $T \to +\infty$ *?*

Pourquoi ne pas considérer que la personne peut emprunter d'emblée sur plusieurs périodes, plutôt que de période en période ? Qu'est-ce que ça changerait ?

Exercice de réflexion :

Un couple ayant deux enfants dispose d'un revenu mensuel net d'impôts de 3600 € et envisage de souscrire un prêt immobilier sur 20 ans pour financer l'achat de sa résidence principale. Le taux d'intérêt annuel est de 3,6 %.

Quelle est sa capacité d'emprunt ?

sachant que...

… le prêt envisagé est à mensualité constante (montrez que : $P_0 = \left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)\frac{M}{r}$ où P_0 = capital emprunté, r = taux d'intérêt mensuel, T = durée en mois, M = mensualité)

… typiquement, un conseiller clientèle doit vérifier deux critères d'octroi :

- taux d'endettement ou taux d'effort (mensualité du prêt/revenu mensuel) idéalement compris entre 25 % et 30 %, en tout cas inférieur à 35 %;
- reste-à-vivre (revenu mensuel – mensualité du prêt) minimal, disons de 1200 € pour un couple, plus 240 € par enfant à charge.

Remarque :

à partir de la contrainte « actualisée » : $\sum_{t=0}^{T-1} \frac{Y_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{C_t}{(1+r)^t}$

multiplier par $(1+r)^{T-1}$ et distribuer :

$$\sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-1}(1+r)^{-t} Y_t = \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-1}(1+r)^{-t} C_t$$

remplacer : $(1+r)^{T-1}(1+r)^{-t} = (1+r)^{T-1-t}$

on retrouve la contrainte « capitalisée » :

$$\sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-1-t} Y_t = \sum_{t=0}^{T-1} (1+r)^{T-1-t} C_t$$

c- Principes de capitalisation à T périodes :

- valeur future (après T périodes) d'un *cash-flow* actuel (C_0) placé au taux r avec intérêts composés (réinvestis) :

$VF(C_0, T, r) = C_0(1+r)^T$ → le taux r est « actuariel »

NB : si les intérêts ne sont pas réinvestis, la valeur future (après T périodes) d'un *cash-flow* actuel (C_0) placé au taux r est donnée selon le *principe des intérêts simples* :

$VFS(C_0, T, r) = C_0(1+r\times T)$ → le taux r est « proportionnel »

- valeur future (après T périodes) d'un ensemble de *cash-flows* (C_0, C_1, …, C_T) placés au taux r avec intérêts composés :

$$VF(C_0, C_1, \ldots, C_T) = C_0(1+r)^T + C_1(1+r)^{T-1} + \ldots + C_T = \sum_{t=0}^{T} C_t(1+r)^{T-t}$$

- si les taux d'intérêt varient à chaque période :

$$VF(C_0, C_1, \ldots, C_T) = C_0\left[(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_T)\right] + C_1\left[(1+r_2)\ldots(1+r_T)\right] + \ldots + C_T$$

d- principes d'actualisation à T périodes :

- valeur actualisée au taux actuariel r d'un *cash-flow* futur (C_T disponible en T) :

$$VA(C_T, T, r) = C_T \times v_T \text{ avec } v_T = \frac{1}{(1+r)^T}$$

- valeur actualisée au taux r d'une séquence de *cash-flows* futurs (C_0, C_1, …, C_T)

$$VA(C_0, C_1, \dots, C_T) = C_0 v_0 + C_1 v_1 + \dots + C_T v_T = \sum_{t=0}^{T} C_t v_t \text{ avec } v_t = \frac{1}{(1+r)^t}$$

soit :

$$VA(C_0, C_1, \dots, C_T) = C_0 + \frac{C_1}{(1+r)} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^T} = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

- valeur actualisée au taux r d'une séquence de *cash-flows* futurs égaux entre eux ($C_0 = C_1 = \dots = C_T = C$)

$$VA(C_0 = C, C_1 = C, \dots C_T = C) = C \sum_{t=0}^{T} v_t \text{ avec } v_t = \frac{1}{(1+r)^t} = v^t \text{ et } \sum_{t=0}^{T} v^t = \frac{1 - v^{T+1}}{1 - v}$$

e- Théorème de séparation et « principe de la valeur actuelle nette »

Si le décideur peut choisir le « profil » de revenu Y_0, Y_1, … $Y_{T\text{-}1}$ par ses choix sur différentes opportunités d'investissement,
le profil optimal de revenu est celui qui

- maximise la richesse (la valeur actuelle des revenus)
- indépendamment des choix de consommations

→ théorème de séparation des décisions d'investissement et de consommation (Fischer)

→ « règle de la VAN » : **entreprendre des projets ayant une valeur actuelle nette positive, en commençant par ceux dont la VAN est la plus élevée**

- maximiser la VAN équivaut à maximiser la richesse nette, donc les opportunités de consommation
- critère partagé par tous les actionnaires, quelles que soient leurs préférences individuelles.

f- Formalisation des préférences

préférences représentées par : $U(C_0, C_1, \dots C_{T\text{-}1})$

on peut supposer : $U\left(C_0, C_1, \dots C_{T-1}\right) = \sum_{t=0}^{T-1} u_t\left(c_t\right)$

- la fonction d'utilité est « séparable » ;
- le TMS de C_t à C_{t+i} ne dépend que de C_t et C_{t+i}, *indépendamment* des autres choix de consommations ;
- un phénomène comme des habitudes de consommation n'est pas représenté

on peut aussi supposer : $u_t(C_t) = p_t\, u(C_t)$:

- un niveau de consommation donné génère la même utilité à chaque date
- l'utilité de chaque date est « actualisée » subjectivement au taux p_t
- pour garantir une **cohérence intertemporelle** des préférences,
  le taux d'actualisation subjectif doit être de forme « exponentielle » :

$$p_t = \frac{1}{\left(1+\delta\right)^t}$$

ANNEXE : Valeur acquise / valeur actuelle :

valeur acquise V_n par un capital V_0 placé pendant n périodes au taux r	$V_n = V_0(1+r)^n$
valeur actuelle V_0 d'un capital V_n disponible dans n périodes, au taux r	$V_0 = V_n(1+r)^{-n}$
valeur future d'une suite d'annuités a placées au taux i pendant n périodes	$V_n = a\frac{(1+i)^n-1}{i}$
valeur actuelle (au taux i) d'une suite d'annuités constantes a perçues en fin de période, pendant n périodes	$V_0 = a\left(1-(1+i)^{-n}\right)/i$
valeur actuelle (au taux i) d'une suite d'annuités croissantes au taux g, perçues en fin de période, pendant n périodes	$V_0 = a_0\left(1-\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^{-n}\right)/(i-g)$
valeur actuelle d'une (au taux i) d'une rente perpétuelle constante a perçue en fin de période	$V_0 = \frac{a}{i}$
valeur actuelle d'une (au taux i) d'une rente perpétuelle perçue en fin de période, croissante au taux g	$V_0 = \frac{a_0}{i-g}$

ANNEXE : Équivalences de taux :

Deux taux sont équivalents sur une durée *T* s'ils conduisent à la même valeur future pour le même capital initial.

taux équivalents r et i sur des périodes de compositions resp. m et n	$(1+r)^m=(1+i)^n$
taux annuel r équivalent à un taux mensuel i	$r=(1+i)^{12}-1$
taux actuariel r équivalent à un taux proportionnel i sur une durée n	$(1+r)^n=1+n\times i$
taux continu ρ équivalent au taux actuariel r	$e^{\rho n}=(1+r)^n$

Opérations à moins d'un an :

- taux proportionnel (pas de capitalisation sur des périodes infra-annuelles)
- base de calcul : exact / 365 (opérations bancaires)
exact / 360 (opérations de marché)