La rentabilité des actifs financiers

Définitions :

taux de rentabilité (actuariel) = taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle nette.

« TRA » → pour un investissement « financier »
« TRI » → pour un investissement « industriel »

INVESTISSEMENT SUR UNE PÉRIODE :
INVESTISSEMENT SUR PLUSIEURS PÉRIODES :
LES MOYENNES DES RENTABILITÉS AU COURS DU TEMPS
PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DES RENTABILITÉS.

1- INVESTISSEMENT SUR UNE PÉRIODE :

un titre (action) vaut V_0 en début de période et V_1 en fin de période

$$VAN = \frac{V_1}{1+r} - V_0$$

tenir compte d'éventuels flux (dividendes) perçus au cours de la période, éventuellement réinvestis...

taux de rentabilité « simple » ou « arithmétique » :

$$R_a = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

taux de rentabilité « logarithmique » :

$$R_l = \ln \frac{V_1}{V_0}$$

R_l est une approximation de R_a :

$$R_l = \ln \frac{V_1}{V_0} = \ln \left(1 + \frac{V_1 - V_0}{V_0} \right) = \ln(1 + R_a) \approx R_a$$

mais comme $x \geq \ln(1+x)$, $R_l \leq R_a$.

2- INVESTISSEMENT SUR PLUSIEURS PÉRIODES :

Le cours de l'action vaut V_0 en début de période, V_1 en fin de période 1, … V_T en fin de période T.

Rentabilité arithmétique
Rentabilité composée
Rentabilité logarithmique

Rentabilité arithmétique sur la période entière [0, T] :

$$R_a(0,T)=\frac{V_T-V_0}{V_0}$$

Rentabilité composée sur la période entière [0, T] :

on a : $V_T=(1+R_T)V_{T-1}=(1+R_T)(1+R_{T-1})V_{T-2}=...=V_0\prod_{t=1}^{T}(1+R_t)$

on peut écrire : $V_T=(1+R_g(0,T))^T V_0$

où $R_g(0,T)$ est le taux de rentabilité actuariel de l'action.

soit : $1+R_g(0,T)=\left(\prod_{t=1}^{T}(1+R_t)\right)^{(1/T)}$

moyenne géométrique des rentabilités simples

Rentabilité logarithmique :

$$R_l(0,T)=\ln\frac{V_T}{V_0}=\ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\frac{V_{T-1}}{V_{T-2}}\dots\frac{V_1}{V_0}\right)=\ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\right)+\ln\left(\frac{V_{T-1}}{V_{T-2}}\right)+\dots+\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

$$R_l(0,T)=\sum_{t=1}^{T}R_{l\,t}$$

La rentabilité logarithmique sur la période entière est la somme des rentabilités logarithmiques des sous-périodes (ce n'est pas vrai de la rentabilité arithmétique).

La rentabilité logarithmique, une rentabilité en temps continu :

On note dt la durée (infinitésimale) de la période
et dV la variation du cours de l'action pendant ce temps

Soit R la rentabilité proportionnelle au temps.

On a : $R\,dt = \frac{dV}{V}$

et $\int_{T-1}^{T} R\,dt = \int_{T-1}^{T} \frac{dV}{V}$ soit $R = \ln V_T - \ln V_{T-1} = \ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\right)$

Autre approche :

On divise la période en N sous-périodes.
Le taux de rentabilité apparent R est généré sur chacune des sous-périodes.
R/N désigne le taux proportionnel.
En le capitalisant N fois, on obtient le taux actuariel équivalent, de sorte que :

$$V_T = \left(1 + \frac{R}{N}\right)^N V_{T-1}$$

Quand N tend vers $+\infty$ (le temps devient continu), R est la rentabilité générée en continu par le placement et :

$$\lim_{N \to +\infty} \left(1 + \frac{R}{N}\right)^N = \mathrm{e}^R \text{ de sorte que : } R = \ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\right)$$

Récapitulation :

Si le temps est mesuré en années, entre 0 et T, on définit :

– la rentabilité non annualisée $R_a(0,T)=\frac{V_T-V_0}{V_0}$ (rentabilité arithmétique)

– la rentabilité annualisée $R_g(0,T)=\left(V_T/V_0\right)^{1/T}-1$ (rentabilité composée)

– la rentabilité continue $R_l(0,T)=\ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right)$ (rentabilité logarithmique)

– la rentabilité continue annualisée $R_c=R_l(0,T)/T$

On a donc :

$$V_T = \left(1+R_a\right)V_0 = \left(1+R_g\right)^{1/T}V_0 = \mathrm{e}^{R_l}V_0 = \mathrm{e}^{R_cT}V_0$$

3- LES MOYENNES DES RENTABILITÉS AU COURS DU TEMPS

On observe la rentabilité sur plusieurs périodes, $R_1, \ldots R_T$.

Rentabilité arithmétique moyenne :

$$\bar{R}^A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_a(t) \quad \text{soit} \quad 1+\bar{R}^A = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(1+R_a(t)\right)$$

Si on suppose que les rentabilités observées sont les résultats de tirages aléatoires indépendants dans une même loi, la moyenne arithmétique des rentabilités sur l'échantillon est un estimateur sans biais de l'espérance mathématique.

$$E\left(\bar{R}^A\right) = E\left(\tilde{R}\right)$$

Moyenne géométrique des rentabilités arithmétiques :

$$\bar{R}^G = \left(\prod_{t=1}^{T} \left(1 + R_a(t)\right) \right)^{(1/T)} - 1 = \left(\frac{V_T}{V_0} \right)^{(1/T)} - 1$$

La moyenne géométrique des rentabilités ne dépend que des valeurs initiale et finale de l'actif.

C'est le taux de capitalisation moyen (taux de rentabilité actuariel), une rentabilité constante produisant la même valeur finale que les rentabilités simples observées :

$$V_T = V_0 \left(1 + \bar{R}^G\right)^T$$

Rentabilité logarithmique moyenne :

$$\bar{R}^L = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_l(t) \text{ soit } \bar{R}^L = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) = \ln\left(1+\bar{R}^G\right)$$

La rentabilité logarithmique moyenne ne dépend que des valeurs initiale et finale de l'actif.
C'est une approximation de la rentabilité actuarielle.

On a la relation :

$$\bar{R}^A \geq \bar{R}^G \geq \bar{R}^L$$

car :

- $\ln(1+x)$ est concave donc $\ln\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(1+R_a(t)\right)\right) \geq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(1+R_a(t)\right)$
- $x \geq \ln\left(1+x\right)$

4- PROPRIÉTÉS STATISTIQUES DES RENTABILITÉS.

Le prix futur de l'action (V_1) est « inconnu » en début de période 1
→ une variable aléatoire
De même pour la rentabilité de l'action sur la période qui commence...

Comment caractériser les propriétés statistiques de cette variable aléatoire ?

À l'aide des *moments* de la distribution.

Moment centré d'ordre *i* : $M_i(\tilde{R}) = E\left(\tilde{R} - E(\tilde{R})\right)^i$

Espérance mathématique
Variance et écart-type
Asymétrie (skewness)
Applatissement (kurtosis)

Espérance mathématique : la moyenne (pondérée par les fréquences)

Plusieurs écritures :

pour une variable « discrète » : $E(\tilde{R}) = \sum_{x} x \Pr(\tilde{R} = x)$

pour une variable « continue » : $E(\tilde{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{f}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d\,\mathrm{F}(x)$

avec $\mathrm{F}(x) = \Pr(\tilde{R} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f}(t)\, dt$

Sur un échantillon $R_1, \ldots R_T$
(on suppose que les rentabilités obtenues sont des tirages aléatoires indépendants dans une même loi)...

La moyenne arithmétique des rentabilités sur l'échantillon est un estimateur sans biais de l'espérance mathématique.

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} R_t i \quad \Rightarrow \quad E(\bar{R}^A) = E(\tilde{R})$$

C'est une variable aléatoire de variance $V(\bar{R}) = \sigma^2 / T$.

(D'après le théorème de la limite centrée, c'est une variable gaussienne).

D'autres *indicateurs de position, ou de centre de distribution* :

- la médiane (sépare la distribution en deux classes d'effectifs égaux), et
- le mode (valeur pour laquelle la fréquence est la plus élevée).

Variance et écart-type :

Variance = moyenne des carrés des écarts à la moyenne (moment centré d'ordre 2)
Écart-type = racine carrée (positive) de la variance

$$V(\tilde{R}) = E\left(\tilde{R} - E(\tilde{R})\right)^2 = E\left(\tilde{R}\right)^2 - \left(E(\tilde{R})\right)^2 \equiv \sigma^2$$

Ce sont des *indicateurs de dispersion*.
Il en existe d'autres (étendue, écart interquartile Q3-Q1, qui, par définition, contient 50% des observations, ...).

L'écart-type est de même échelle que les observations.
Le *coefficient de variation* (écart-type / moyenne) est un nombre pur.

Dans la théorie financière de Markowitz, l'écart-type est la mesure du **risque**.

La variance de l'échantillon est un estimateur biaisé de la variance de la population.

Soit $s_T^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t^2 - \bar{R}^2$ la variance de l'échantillon.

On montre que : $E(s_T^2) = \frac{T-1}{T}\sigma^2$.

En effet : $E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t^2\right) = E(R^2) = \sigma^2 + (E\,R)^2$ et

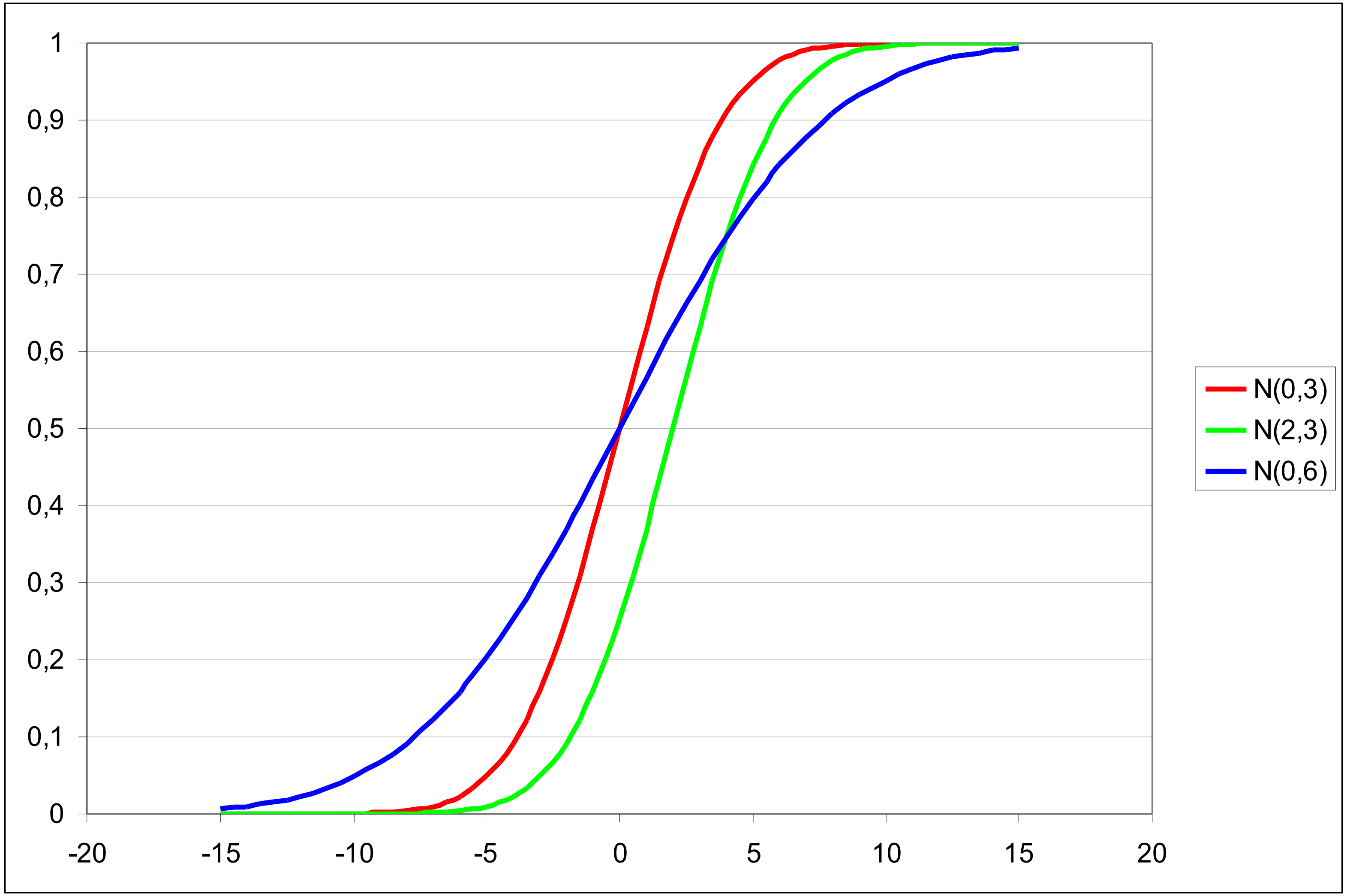
$$E\left(\bar{R}^2\right) = V(\bar{R}) + \left(E\,\bar{R}\right)^2 = \sigma^2/T + (E\,R)^2$$

L'estimateur sans biais de la variance est donc

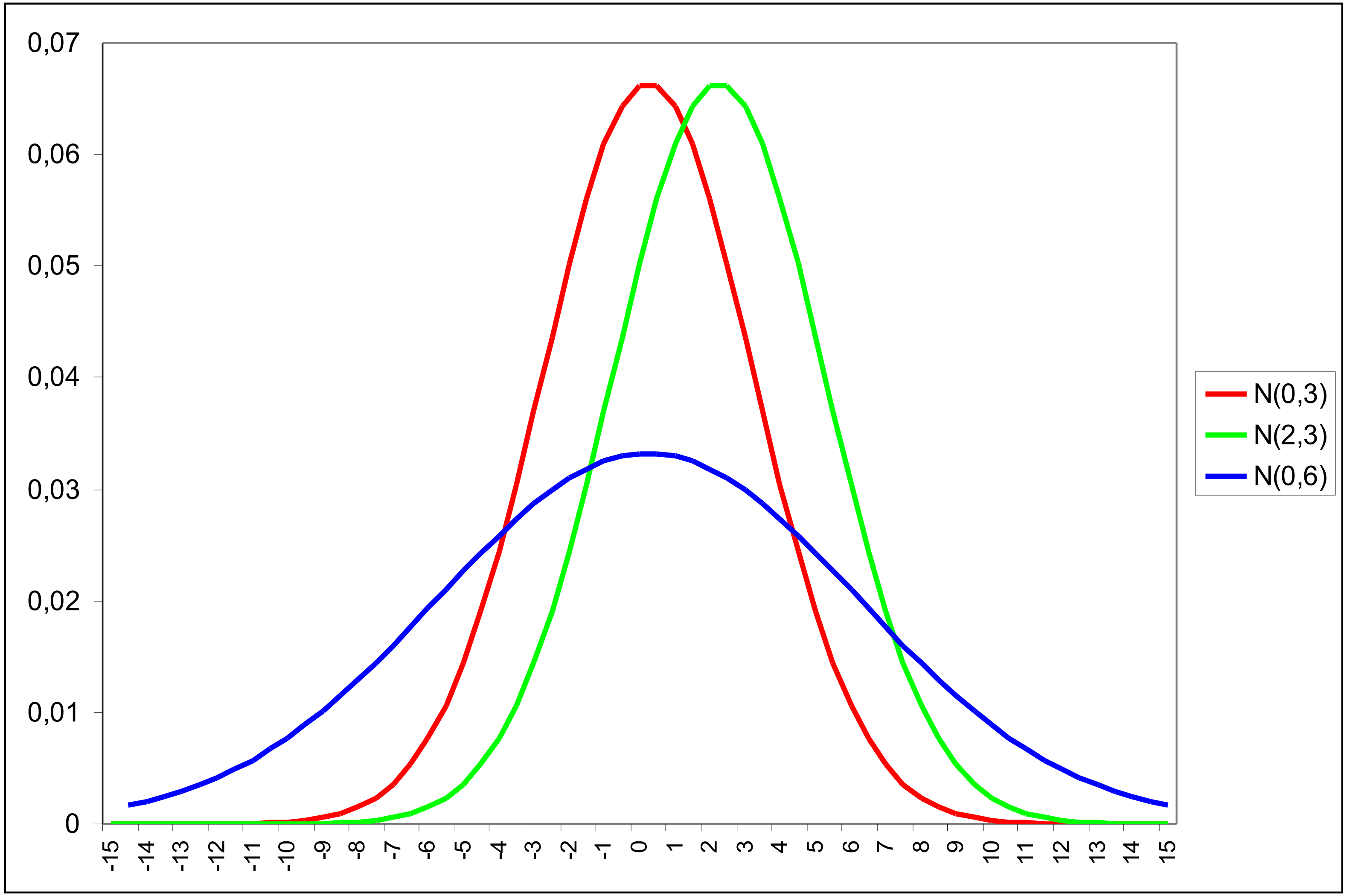
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} R_t^2 - \frac{T}{T-1}\bar{R}^2$$

RAPPELS SUR LA LOI NORMALE

Fonction de répartition de la Loi Normale



Fonction de densité de la Loi Normale

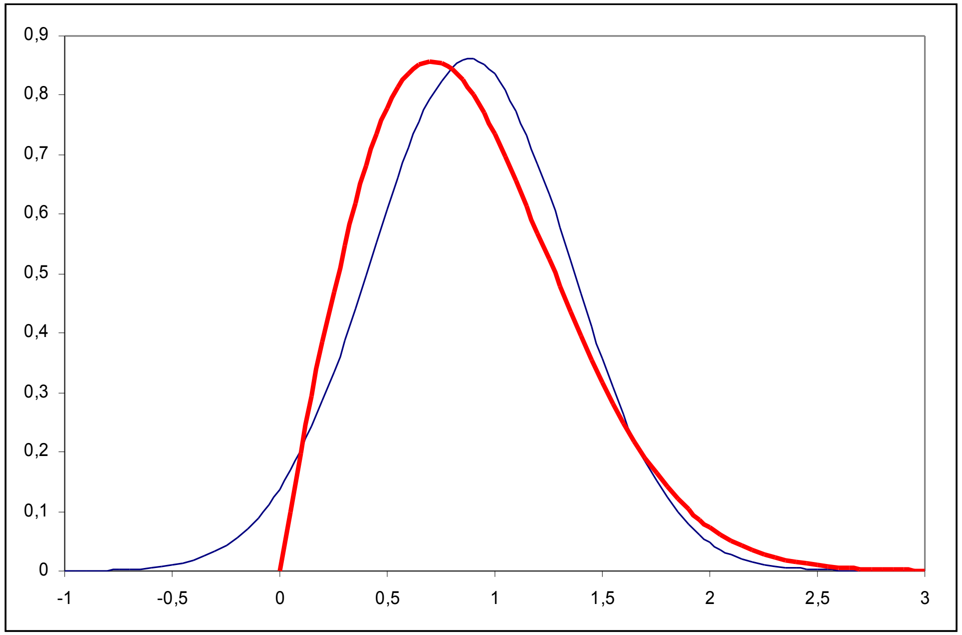


Asymétrie (skewness) :

Coefficient d'asymétrie : $S = \dfrac{E\left(\tilde{R} - E\,\tilde{R}\right)^3}{\sigma^3}$

Pour une variable gaussienne, $S = 0$ (distribution symétrique)

Asymétrie négative ($S < 0$)	Asymétrie positive ($S > 0$)
densité étirée à gauche (par exemple à cause d'une valeur plafond)	densité étirée à droite (par exemple à cause d'une valeur plancher)
Souvent moyenne < médiane mode « trop à droite »	Souvent moyenne > médiane mode « trop à gauche »

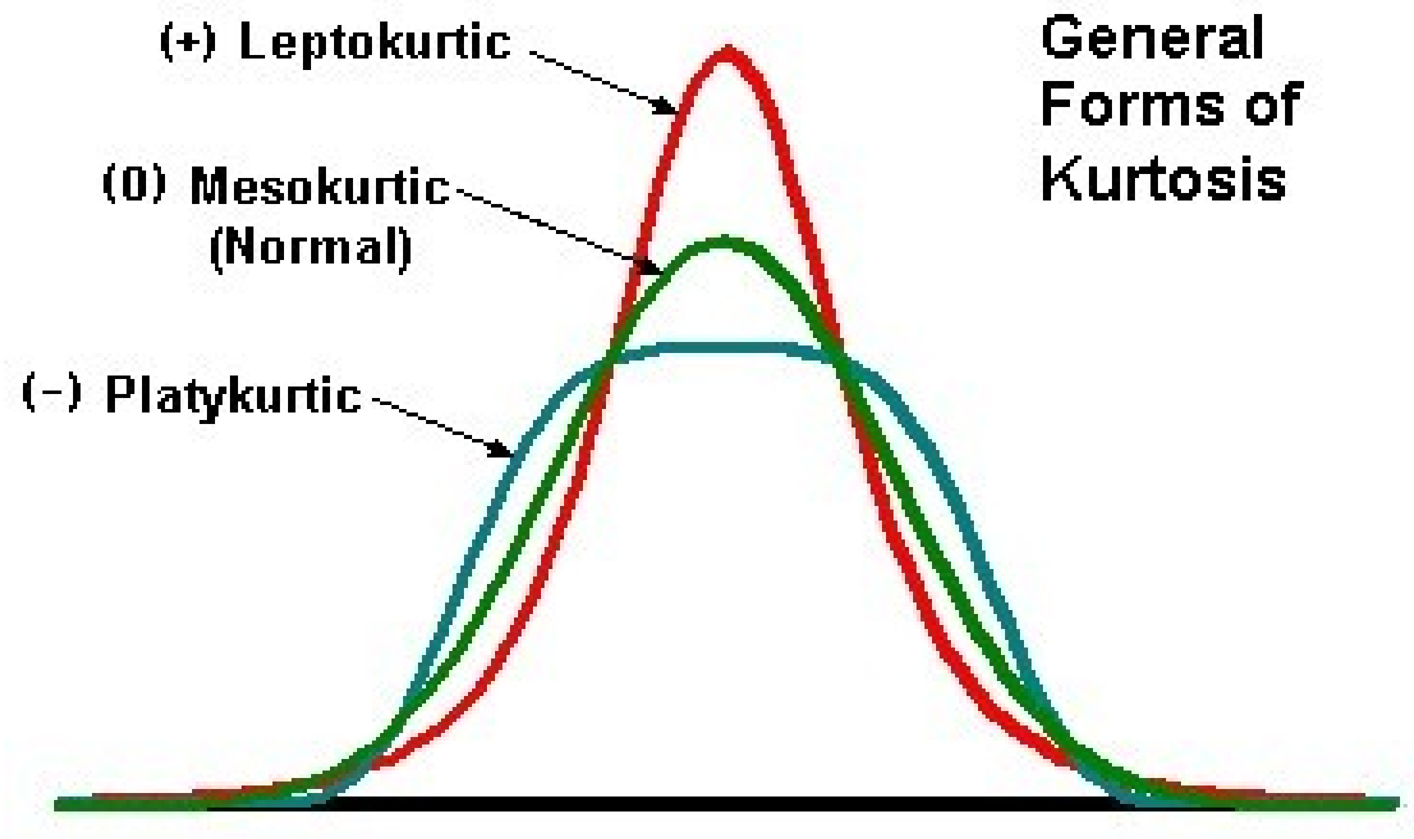
Asymétrie négative ($S < 0$)	Asymétrie positive ($S > 0$)
densité étirée à gauche	densité étirée à droite
	 Normale N(0,8862 ; 0,4633) Weibull Standard de paramètre 2 (définie pour des valeurs positives, moyenne ≈ 0,8862, écart-type ≈ 0,4633, mode ≈ 0,7071, médiane ≈ 0,8326)

Applatissement (kurtosis) :

Coefficient d'excès de kurtosis : $K = \frac{E\left(\tilde{R} - E\,\tilde{R}\right)^4}{\sigma^4} - 3$

Pour une variable gaussienne, $K = 0$ (distribution mésokurtique).

Kurtosis excédentaire négative ($K < 0$) distribution platykurtique	Kurtosis excédentaire positive ($S > 0$) distribution leptokurtique
Trop de valeurs moyennes par rapport à une gaussienne	Trop de valeurs extrêmes par rapport à une gaussienne (*queues épaisses*)


(+) Leptokurtic
(0) Mesokurtic
(Normal)
(–) Platykurtic
General
Forms of
Kurtosis

Typiquement, les rentabilités des actions :

- sont supposées distribuées selon une loi normale dans de nombreux modèles théoriques ;
- ne sont pas distribuées empiriquement selon une loi normale.

Justification théorique :

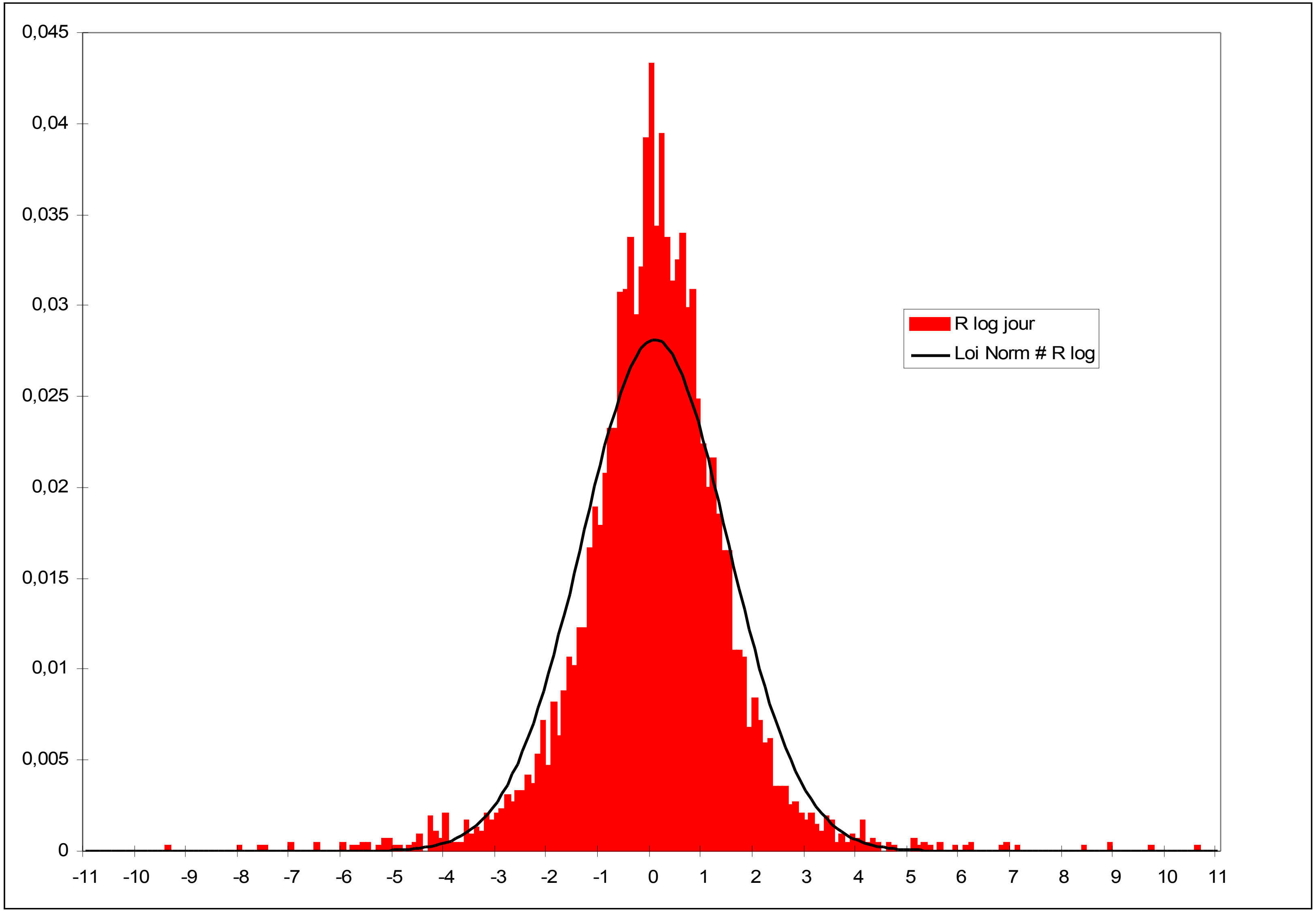
efficience

=> rentabilités indépendantes entre deux périodes

=> la somme des rentabilités (logarithmiques) suit une loi normale (théorème de la limite centrée)

Empiriquement :

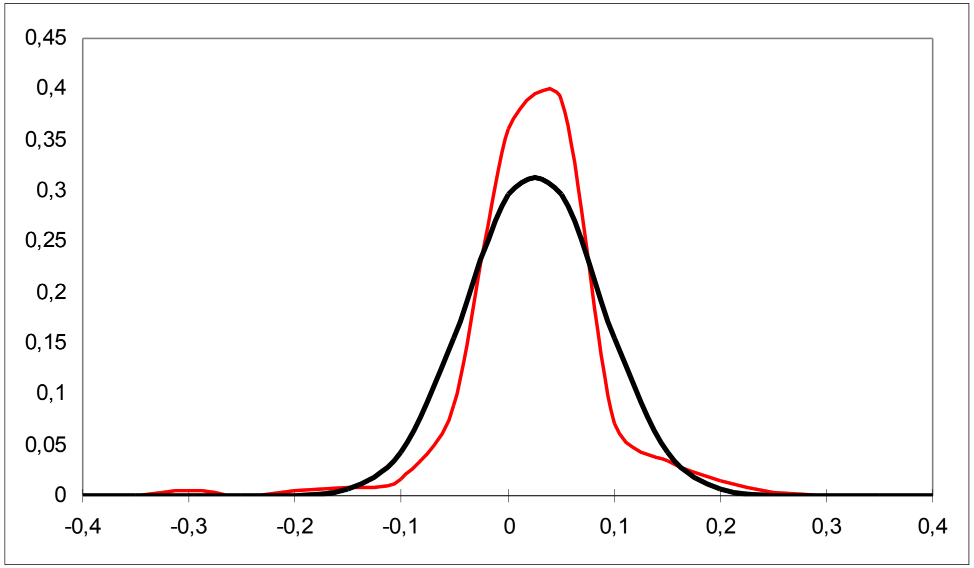
- $S < 0$ (distribution étirée à gauche, sur représentation des valeurs hautes)
- $K > 0$ (distribution leptokurtique, trop de valeurs extrêmes)



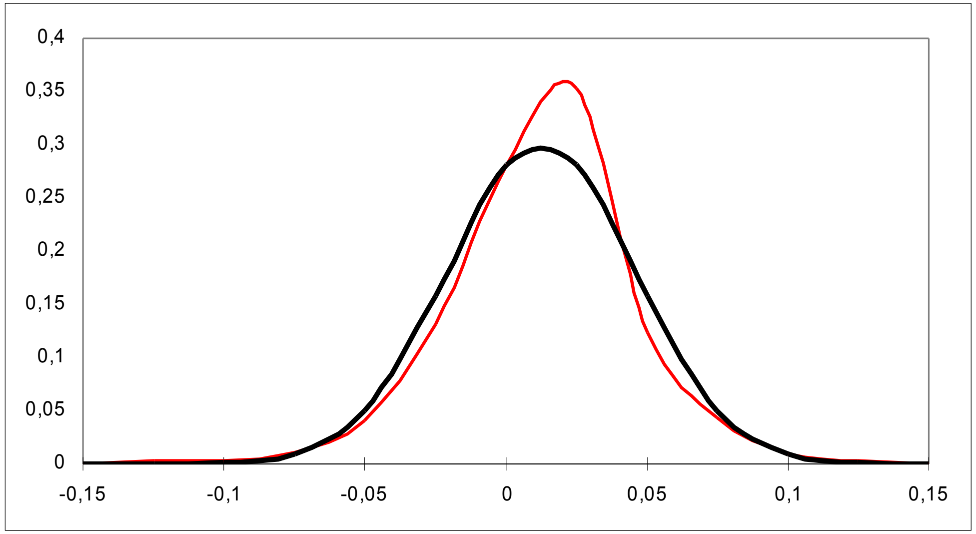
CAC 40 (mars 1990 – septembre 2009)

Distribution des rentabilités hebdomadaires (janvier 2003 – septembre 2009)

Société Générale



L'Oréal



Les autres lois des rentabilités qui s'accommodent de l'excès de kurtosis :

1- Lois de Pareto-Lévy (lois stables)

2- mélanges de distributions

3- conditionnalité des variances des distributions

par exemple, le modèle GARCH (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity) : la variance suit un processus auto-régressif, elle n'est pas constante dans le temps.

Bibliographie :

Aftalion, F. (2003), *La nouvelle finance et la gestion des portefeuilles*, Economica, chapitre 1

Portrait, R. et P. Poncet (2008), *Finance de mauché*, Dalloz, chapitre 8, section 2.

Brealey, Myers & Allen (2006), *Principes de Gestion Financière*, Pearson Education, chapitre 7

cours de bourse :

http://fr.finance.yahoo.com/