

Théorie et gestion des risques

Préparation à l'examen

1- Concepts

1. risque
2. espérance d'utilité
3. prime de risque d'une richesse aléatoire
4. équivalent certain d'une richesse aléatoire
5. aversion absolue au risque
6. aversion relative au risque
7. dominance stochastique d'ordre 1
8. dominance stochastique d'ordre 2
9. paradoxe de Saint Petersburg
10. paradoxe d'Allais
11. paradoxe d'Ellsberg
12. aversion aux pertes
13. théorie des perspectives de Kahnemann et Tversky
14. contrat de futures
15. contrat forward
16. couverture, assurance, diversification
17. swap
18. position longue
19. position courte
20. taux sans risque implicite d'un contrat à terme
21. parité cours comptant cours à terme
22. call
23. put
24. prix d'exercice
25. option américaine
26. option européenne
27. option asiatique
28. parité put-call
29. delta, gamma, vega, theta, rho d'une option
30. modèle de Black et Scholes
31. modèle de Cox, Ross et Rubinstein
32. actif synthétique

2- Problèmes et exercices

1. Monsieur Philippe possède un haras valant 1 million d'euros, mais pouvant subir un dommage de 10% de sa valeur avec une probabilité de 20%. Il hérite d'un portefeuille d'actions dont la valeur liquidative est, de manière équiprobable et indépendante du dommage subi par le haras, de 100 k€ ou 200 k€. La variance de sa richesse a-t-elle augmenté ? Est-il plus riche qu'avant ? La valeur de son patrimoine est-elle plus risquée ?

2. La fameuse collection de bijoux de la Castafiore vaut 100 M€. La cantatrice a accepté d'en prêter une partie, estimée à 19 M€ pour une exposition dont la recette sera versée à une œuvre caritative. Supposons qu'une catastrophe puisse advenir (incendie, vol...), avec une probabilité de 10%, dont la conséquence serait la destruction totale des bijoux exposés. Supposons en outre que la fonction d'utilité de la Castafiore, rationnelle au sens de VNM, est représentable par la racine carrée de la valeur de sa collection.

Montrez que l'équivalent certain de la valeur de la collection de bijoux, une fois que la Castafiore a accepté de participer à l'exposition, vaut 98,01 M€. Montrez que la prime de risque que la Castafiore lie à la valeur de sa collection de bijoux, une fois qu'elle a accepté de participer à l'exposition, vaut 0,09 M€.

Une compagnie d'assurance propose à la Castafiore le contrat suivant : la Castafiore paye une prime d'un montant X (on suppose que la Castafiore devra vendre une partie de sa collection), en échange du remboursement des bijoux exposés si la catastrophe se produit, la prime X , restant acquise à la compagnie si la catastrophe ne se produit pas. Montrer que la Castafiore est disposée à céder au plus 1,99 M€ de bijoux pour souscrire un tel contrat. Quel est le gain espéré que réalise la compagnie d'assurance dans un contrat par lequel elle s'engage à verser 19 M€ à la Castafiore avec une probabilité de 10%, et 0€ avec une probabilité de 90%, après que la Castafiore lui a payé une prime d'assurance d'un montant X ? En déduire que le gain espéré est nul si X vaut 1,9 M€. Conclure sur les conditions d'acceptabilité du contrat d'assurance.

3. Chaque année, toute maison peut être endommagée et perdre 30% de sa valeur avec une probabilité de 20%, être endommagée et perdre 80% de sa valeur avec une probabilité de 5% ou rester intacte. Une compagnie d'assurance propose d'assurer complètement toute maison, contre le paiement d'une somme égale à une proportion s de la valeur de la maison (le propriétaire d'une maison assurée dispose d'un patrimoine certain de valeur $(1-s)M$ où M est la valeur de la maison intacte non assurée). En utilisant les concepts de dominance stochastique, montrer que tout habitant riscophobe assure sa maison si et seulement si s est inférieur à 10%.

4. Soient quatre loteries A, B, C et D : A rapporte 20 millions d'euros à coup sûr ; B rapporte 100 millions d'euros avec une probabilité de 90%, et 0 avec une probabilité de 10% ; C rapporte 100 millions d'euros avec une probabilité de 0,45%, 1 euro avec une probabilité de 95%, et 0 avec une probabilité de 0,05% ; D rapporte 20 millions d'euros avec une probabilité de 5%, et 1 euro avec une probabilité de 95%. Des personnes interrogées sur leur préférence entre A à B d'une part, et C et D d'autre part, ont choisi A et C. En quoi ces réponses sont-elles paradoxales (paradoxe d'Allais) ?

Soit Z une loterie qui rapporte 1 euro à coup sûr. Montrez que C et D peuvent se réécrire comme des loteries composées, C rapportant les loteries A et Z, et D rapportant les loteries B et Z avec des probabilités que vous déterminerez ; déduisez-en que le paradoxe d'Allais remet en question l'axiome d'indépendance de Von Neumann et Morgenstern.

5. M. de la Bath a un patrimoine valant 2 ou 4 de façon équiprobable. Il est prêt à payer 0,103 pour avoir une richesse certaine égale à 2,897. M. Bond a un patrimoine valant 3 ou 5 de façon équiprobable. Il est prêt à payer 0,0847 pour avoir une richesse certaine égale à 3,9153. Qui a l'aversion absolue au risque la plus grande ? Qui a l'aversion relative au risque la plus grande ?
6. Une urne contient 90 boules, dont 30 rouges, les autres étant noires ou jaunes, dans des proportions inconnues. Quatre loteries sont alors construites, rapportant 100 € si une boule rouge est tirée (loterie A), si une boule noire est tirée (loterie B), si une boule rouge ou jaune est tirée (loterie C), si une boule noire ou jaune est tirée (loterie D), et 0 sinon. Des personnes interrogées sur leur préférence entre A à B d'une part, et C et D d'autre part, choisissent en majorité A plutôt que B, et D plutôt que C. En quoi ces choix sont-ils paradoxaux (paradoxe d'Ellsberg) ?
7. Confrontées aux choix suivants, « supposez que vous êtes 300 \$ plus riches qu'aujourd'hui, préférez-vous (A1), un gain certain de 100 \$ ou (B1), 50% de chances de gagner 200 \$ et 50% de ne rien gagner ? » et « supposez que vous êtes 500 \$ plus riches qu'aujourd'hui, préférez-vous (A2), une perte certaine de 100 \$ ou (B2), 50% de chances de perdre 200 \$ et 50% de ne rien perdre ? », un grand nombre de personnes choisissent A1 et B2. En quoi ces choix sont-ils paradoxaux (aversion aux pertes de Kahneman et Tversky) ?
8. Quelles sont les étapes du processus de gestion des risques ? Quelles sont les principales méthodes de transfert des risques ?
9. Quels sont les contrats à termes sur matières premières échangés sur Euronext-Liffe ?
10. Supposons que dans 6 mois, le cours du fioul de chauffage soit de 2,3 ou de 2,7 dollars américains par gallon, avec des probabilités égales. Le prix actuel est de 2,5.
- a- Quels sont les risques qu'encourt un vendeur de fioul qui a beaucoup de réserves en stock ? Quels sont les risques qu'encourt un gros consommateur qui n'a pas de réserves ?
 - b- Comment ces deux parties peuvent-elles utiliser le marché à terme pour réduire leur risques et fixer un prix de 2,5 dollars par gallon (chaque contrat sur le NYMEX porte sur 42000 gallons, soit 1000 barils, et les deux parties raisonnent sur 2000 barils) ?
 - c- Peut-on affirmer que chaque partie a amélioré sa situation ? Pourquoi ?
11. Vous possédez 100 ha de blé (avec un rendement de 80 q/ha) qui seront moissonnés dans deux mois. Vous voulez être assuré de recevoir 220 € par tonne quel que soit le cours comptant dans deux mois.
- a- Quelles seraient les conséquences d'une prise de position courte sur le marché à terme si le cours comptant à la date de livraison est de 210, 220 ou 230 €/t ?
 - b- Que se serait-il passé si vous ne vous étiez pas couvert, en supposant les trois scénarios précédents équiprobables ?
 - c- Quelle sera la variabilité de vos recettes une fois la couverture mise en place ?
12. Vous récolterez 125 tonnes d'oranges dans deux mois. Vous voulez vous garantir un prix de 2 €/kg. Dans deux mois, le cours comptant est 1,5, 2 ou 2,5 €/kg, de façon équiprobable.
- a- Quelles seraient les conséquences d'une prise de position courte sur le marché à terme ?
 - b- Quelles seraient les conséquences de l'achat de *puts* de prix d'exercice 2 €/kg pour un montant total de 25000 € ? Dans quel(s) cas exerceriez-vous l'option ?
 - c- Comparez les deux alternatives.

13. Les stratégies suivantes sont-elles des couvertures ou des assurances ? Contre quel risque ?
- a- Fixer le prix d'un billet d'avion pour les vacances prochaines.
 - b- Acheter un put sur une action que vous possédez.
 - c- Accepter d'acheter une maison dans 6 mois pour 200000 €.
 - d- Louer une voiture avec option d'achat dans trois ans.
 - e- Mettre en place un swap de taux fixe contre taux variable car vous possédez des actifs à taux variable.
 - f- En tant que producteur de bétail, vendre à terme votre bétail dans 3 mois à un prix fixé aujourd'hui.
 - g- Payer une prime pour une assurance catastrophes naturelles.
 - h- Payer une garantie sur un crédit que vous avez consenti.
14. Vous détenez des actions qui cotent 65 € chacune et que vous avez achetées chacune 60 €. Vous souhaitez les conserver pour profiter d'une hausse du cours.
- a- Quel type de transaction pouvez-vous mettre en place qui vous permette de vendre 65 € même si le cours baisse ?
 - b- Si cette transaction coûte 5 € par action et que le cours atteint 75 € au moment où vous décidez de vendre, quel est votre profit par action ? Avez-vous exercé l'option ? Pourquoi ?
 - c- Si le cours baisse à 57 €, quel est votre gain ou perte par action ?
15. Le cours de change actuel de la livre, C , est de 1,5 €. Si le taux d'intérêt annuel est de 12% sur la livre, 8% sur l'euro, quel doit être le cours de la livre à un an, F ? Montrez que si le cours à terme est supérieur de 0,10 € à F , il existe une possibilité d'arbitrage.
16. Une action est cotée 100€, le taux sans risque est de 7% par an et le dividende prévisionnel est de 3€ pour l'an prochain. Quel devrait être le cours à terme de l'action dans un an ? Si le cours à terme est en fait supérieur de 1€ à celui que vous venez de calculer, que pouvez-vous en conclure ?
17. Le cours de l'action X est de 54\$ alors que le cours à un an est de 60\$. Si le taux sans risque est de 15% par an, est-il possible de réaliser des gains d'arbitrage ? Si non, expliquez pourquoi. Si oui, proposez une stratégie d'arbitrage.
18. Représentez le profil de gain d'un *put* européen au prix d'exercice E , portant sur une action de cours S si vous êtes en position longue (*long put*), puis dans le cas où vous êtes en position courte (*short put*). Même question avec un *call* européen.
19. Représentez le profil de gain d'un portefeuille constitué d'un *call* et d'un *put* européen de même échéance et de même prix d'exercice E , portant sur la même action de cours S . Quel est l'intérêt d'une telle stratégie (appelée *long straddle*) ? (Voir *LIFFE options, a guide to trading strategies*, <http://www.euronext.com/fic/000/010/729/107297.pdf>).
20. Montrez comment on peut répliquer un actif sans risque à un an à la valeur nominale de 100 euros avec une action, un *put* et un *call*. On a $S = 100$, $P = 10$ et $C = 15$ euros. Quel doit être le niveau du taux sans risque à un an ? Montrez que si le taux sans risque est inférieur à ce niveau, alors il existe une opportunité d'arbitrage;

21. Monsieur John Steed a constitué un portefeuille de 10 bons du trésor à 90 jours, valeur de remboursement 1000 €, cotés actuellement 990,10 €, et de 200 *calls* européens à 90 jours sur l'action M au prix d'exercice de 50 €, cotés 25 €. L'action M est cotée 215 €. Quelle est la valeur des *calls* dans le portefeuille de Monsieur Steed ? Accepteriez-vous d'échanger ce portefeuille contre 300 actions M ?
22. Madame Emma Peel dispose de 100000 € à placer sur 6 mois. Elle envisage deux stratégies de placement : (S1) tout placer en actions A ou (S2) investir 90% en actions et 10% en *calls*. Le cours actuel de l'action A est 100 €, le prix d'un *call* européen sur une action A, de prix d'exercice 100, à échéance dans 6 mois, est de 10 €. Madame Peel estime que l'action vaudra, dans 6 mois, 150 avec une probabilité de 20%, 110 avec une probabilité de 60% et 70 avec une probabilité de 20%. Montrez que si Madame Peel a de l'aversion au risque, alors elle choisira la stratégie S2 (Utiliser le concept de dominance stochastique d'ordre deux).
23. Vous avez 100000 € à placer sur un trimestre. Le taux sans risque sur le trimestre est de 5%. Deux actifs risqués sont disponibles : un portefeuille d'actions dont le cours actuel est 100 € et pourra valoir, dans trois mois, 150 € avec une probabilité de 20%, 110 € avec une probabilité de 60% ou 70 € avec une probabilité de 20% ; un *call*, de valeur 10 €, sur le portefeuilles d'actions, de prix d'exercice 100 € et d'échéance 3 mois. Représenter sur un schéma le taux de rentabilité des trois stratégies de placement suivantes en fonction du cours du portefeuille dans trois mois (ST) : S1, investir 100% en actions ; S2, investir 100% en *calls* ; S3 : investir 10% en *calls* et 90% en actif sans risque. Pourquoi peut-on qualifier ces stratégies de « haussières » ? Compte tenu de la distribution des cours futurs anticipés, une stratégie domine-t-elle les autres au sens de la dominance stochastique ?
24. Le cours de l'action B est actuellement de 100 € et devrait monter à 150 ou baisser à 50 dans les trois prochains mois. Le taux sans risque à 3 mois est de 1%. Quelle est la valeur d'un *call* européen sur l'action B au prix d'exercice de 85 € à échéance trois mois ?

Indications :

AVERTISSEMENT. Vous trouverez ci-dessous des indications sur la manière de répondre aux questions posées, qui ne sont pas des solutions développées, et ne suffisent pas, en l'état, pour répondre de manière satisfaisante à l'examen. Une grande partie des problèmes provient du manuel de référence (Bodie & Merton, *Finance*, Pearson).

1. Après héritage, la richesse de Monsieur Philippe peut prendre les valeurs 1200, 1100 et 1000 avec des probabilités respectives de 40%, 50% et 10%. La variance de sa richesse est passée de 1600 à 4100. Utiliser les concepts de dominance stochastique d'ordre 1 et d'ordre 2 (la nouvelle richesse domine l'ancienne à l'ordre 1).
2. La richesse de la Castafiore (pendant l'exposition, avant assurance) vaut 100 avec une probabilité de 90%, et 81 avec une probabilité de 10%. Utiliser les définitions de l'équivalent certain et de la prime de risque. Après assurance, la richesse de la Castafiore est certaine et vaut $100 - X$. Le gain de la compagnie d'assurance vaut X avec une probabilité de 90%, et $X - 19$ avec une probabilité de 10%.
3. Poser le problème comme celui d'un choix de loteries : N , la valeur de la maison non assurée, peut prendre les valeurs $0,7M$ avec une probabilité de 20%, $0,2M$ avec une probabilité de 5% et M avec une probabilité de 75% ; A , la valeur de la maison assurée, prend la valeur $(1-s)M$ avec une probabilité de 100%. Utiliser les critères des intégrales pour vérifier à quelle condition, sur s , A domine N stochastiquement à l'ordre 2.
4. Les choix sont paradoxaux parce qu'ils ne sont pas conformes à l'axiomatique VNM. Le montrer en comparant que : $E[u(A)] > E[u(B)] \Leftrightarrow E[u(D)] > E[u(C)]$. C (respectivement D) rapporte B (respectivement A) avec une probabilité de 5% et Z avec une probabilité de 95%. L'axiome d'indépendance implique alors que C est préféré à D si et seulement si B est préféré à A .
5. Utiliser les définitions de l'équivalent certain et de la prime de risque : espérance de richesse = équivalent certain + prime de risque. Utiliser l'approximation de la prime de risque pour en déduire une évaluation de l'aversion absolue au risque : $A_A \approx 2 \text{ prime de risque} / \text{Variance}$. Utiliser la relation : l'aversion relative égale le produit de l'aversion absolue par la richesse (l'évaluer pour la richesse moyenne). Les deux richesses ont la même variance.
6. Soit P la proportion de boules noires parmi les noires ou jaunes : l'urne contient $1/3$ de rouges, $(2/3)P$ de noires et $(2/3)(1-P)$ de jaunes. Les choix sont paradoxaux parce qu'ils ne sont pas conformes à l'axiomatique VNM : $E[u(A)] > E[u(B)] \Leftrightarrow (1-2P)u(100) > (1-2P)u(0) \Leftrightarrow E[u(C)] > E[u(D)]$. Le paradoxe d'Ellsberg remet en cause l'hypothèse selon laquelle les individus expriment correctement des jugements probabiliste (à l'aide de probabilités subjectives), et s'interprète comme une attitude d'aversion à l'ambiguïté.
7. Les choix sont paradoxaux parce que non conformes à l'axiomatique VNM, qui postule une évaluation des risques par l'espérance de l'utilité de la richesse totale ($A1$ et $A2$ sont alors équivalents, donnant $w_0 + 400\$$, $B1$ et $B2$ aussi, donnant $w_0 + 500\$$ ou $w_0 + 300\$$ de manière équiprobable). Les individus semblent plutôt mesurer les gains et les pertes à partir d'un point de référence, et avoir de l'aversion aux pertes

8. Gestion des risques : identification, évaluation, sélection des techniques de gestion du risque, mise en œuvre, contrôle. Transfert des risques : couverture, assurance, diversification.
9. Voir le site internet d'Euronext.
10. Les risques encourus sont liés à la variation des prix. La réduction des risques s'obtient en prenant des positions sur le marché à terme. Chaque partie améliore sa situation dans la mesure où elle est riscophobe.
11. Une position courte correspond à une vente à terme. Mesurer les pertes et les gains à l'échéance, leur espérance et leur variance.
12. Une position courte sur le marché à terme permet de se couvrir en vendant à 2 €/kg. L'achat de puts permet de s'assurer contre une baisse du prix en payant une prime de 0,20 €/kg. Le put n'est pas exercé si le cours comptant dans deux mois vaut 2,5 €/kg (put en dehors).
13. Couverture = réduction de l'exposition à une perte en même temps qu'abandon d'une possibilité de gain. Assurance = acceptation d'une petite perte certaine (prime) afin d'éviter une perte éventuelle plus grande (dommage).
14. Définir l'horizon du placement et prendre une position longue sur des puts de prix d'exercice 65 €. Exercer le put s'il est en dedans à l'échéance (cours comptant inférieur au prix d'exercice).
15. Placer 1 £ pendant un an rapporte 1,12 £ en cas de placement en livre, ou permet d'obtenir 1,5 € comptant, qui, placés en euros pendant 1 an, rapportent $1,5 \times (1 + 8\%)$ € soit 1,62 €. Le cours de la livre à un an est : $F = 1,62/1,12 \approx 1,45$. Si F vaut 1,55, il est possible de réaliser un gain certain sans apport de fonds : emprunter des euros, acheter et placer des livres, tout en les revendant à terme. A l'échéance, pour chaque euro emprunté, on dispose de $(1/1,5) \times 1,12$ £ revendus 1,55 € l'unité, soit 1,16 €, alors qu'on doit rembourser 1,08 €.
16. $F = C(1+r-d) = 100(1+7\% - 3\%) = 104$. Si le cours à terme est de 105 €, c'est que le dividende implicite n'est pas de 3 €... ou qu'il existe une possibilité d'arbitrage (emprunter au taux sans risque, acheter au comptant et vendre à terme les actions).
17. $F = C(1+r-d)$. Ici : $60 = 54(1 + 15\% - d)$. Soit $54d = 2,1$. Le dividende implicite est de 2,1 \$ soit $d=3,89\%$. Si le montant du dividende prévisionnel n'est pas certain, il n'est pas possible de réaliser des gains d'arbitrage. Si le montant du dividende prévisionnel est certain, et supérieur à 2,1 \$ par action, le cours à terme « théorique » est inférieur à 60 \$: le contrat à terme est sur-évalué. Une stratégie d'arbitrage consistera à emprunter au taux sans risque, acheter une action et la vendre simultanément à un an : par exemple, si $D = 3$, alors $F = 59,1$ et le gain dans 1 an sera $60 - (54(1 + 15\%) - 3) = 60 - 59,1 = 0,9$ par action. Si le montant du dividende prévisionnel est certain, et inférieur à 2,1 \$ par action, le cours à terme « théorique » est inférieur à 60 \$: le contrat à terme est sous-évalué. Une stratégie d'arbitrage consistera à vendre une action et placer au taux sans risque, et acheter simultanément un contrat à terme : par exemple, si $D = 0$, alors $F = 62,1$ et le gain dans 1 an sera $54(1 + 15\%) - 60 = 2,1$ par action.
18. Voir « LIFFE options, a guide to trading strategies ».

19. Voir « LIFFE options, a guide to trading strategies ». La traduction française de « straddle » est « stellage ».
20. Utiliser la parité put-call. Acheter le sous-jacent, un put au prix d'exercice 100 et vendre un call de même prix d'exercice. Le taux sans risque à un an, r , est donné par : $1+r = E/(S + P - C)$. Soit, ici, $r \approx 5,26\%$. Supposons que $r = 5\%$, une stratégie d'arbitrage pourrait être: emprunter au taux sans risque et vendre un call 100 pour acheter un put 100 et une action comptant à 100. L'emprunt nécessaire est de 95, soit 99,75 à rembourser, couvert à hauteur de 100 par la position longue sur le put et l'action, courte sur le call.
21. Le taux sans risque vaut $1000/990,1 - 1 \approx 1\%$. Utiliser la parité put-call pour en déduire la valeur des calls : $C = S + P - E/(1+r) = 215 + 25 - 50/1,01 \approx 190,5$.
22. Voir exercice suivant.
23. Les taux de rentabilités sont : $R_1 = (S_T - 100)/100$; $R_2 = [\max(S_T - 100, 0) - 10]/10$; $R_3 = 0,9 \times 5\% + 0,1 \times R_2$. Les stratégies sont haussières parce qu'elles ne sont pas rentables si le cours n'augmente pas. La richesse finale obtenue grâce à la stratégie 3 domine stochastiquement à l'ordre deux celle qui résulte de la stratégie 1 (assurance), mais pas celle qui résulte de la stratégie 2 (le montrer graphiquement à l'aide du critère sur les intégrales).
24. Utiliser le modèle d'évaluation à deux états. Répliquer le call par un call synthétique (emprunt au taux sans risque et achat de l'action). La capacité d'emprunt est $50/1,01 \approx 49,505$. Le nombre d'actions est le delta du call, ici $(65 - 0)/(150 - 50) = 0,65$. Le gain d'un portefeuille composé de 0,65 actions financées en partie par emprunt (nécessitant donc un apport de $100 - 49,505 = 50,495$) est identique à celui du call. La valeur du call est donc : $0,65 \times 50,495 \approx 32,82$.