4- Volatilité, corrélations et copules

Objectif :

- définir la volatilité
- volatilité implicite / volatilité historique
- présenter des méthodes économétriques d'estimation de la volatilité
- présenter les concepts de corrélation, et les méthodes d'estimation
- discuter de l'évolution de la volatilité des marchés financier (réalité du phénomène, causes possibles)

1- Définition de la volatilité

volatilité (σ) : mesurée par l'écart-type des rentabilités par unité de temps
(écart-type des variations des cours sur une période donnée)

rentabilité $R_T = \ln S_T - \ln S_0$ → rentabilité « logarithmique » sur la période $[0, T]$

→ volatilité : $Volat(R_T) = \sigma\sqrt{T}$

exemple :

- Action cotée 50€, de volatilité annuelle 30%

→ volatilité hebdomadaire $= 30\% \times \sqrt{\frac{1}{52}} \approx 4{,}16\%$

→ volatilité journalière $= 30\% \times \sqrt{\frac{1}{252}} \approx 1{,}89\%$

(négliger les jours de fermeture des marchés → retenir 252 jours/an)

2- Volatilité implicite

volatilité implicite = volatilité déduite du prix des options

« Euronext en lance le 3 septembre 2007 trois nouveaux indices de volatilité : AEX Volatility Index, BEL 20 Volatility Index et CAC 40 Volatility Index.

- mesurent la volatilité implicite du prix des options....
- à partir des prix d'exercice hors de la monnaie des options d'achat et de vente sur indices de Liffe.

Exprimés en points de pourcentage, ces indices reflètent, sur une base annualisée, la variation attendue de l'indice sous-jacent durant les trente prochains jours.
Un niveau élevé traduit des anticipations de fluctuations plus importantes de l'indice sous-jacent, et inversement. »

http://volatility.euronext.com/

3- Volatilité historique

volatilité historique = écart-type des rentabilités logarithmiques sur une période donnée.

Rentabilité logarithmique : $R_i = \ln S_i - \ln S_{i-1}$ sur une « période » (ex : jour)

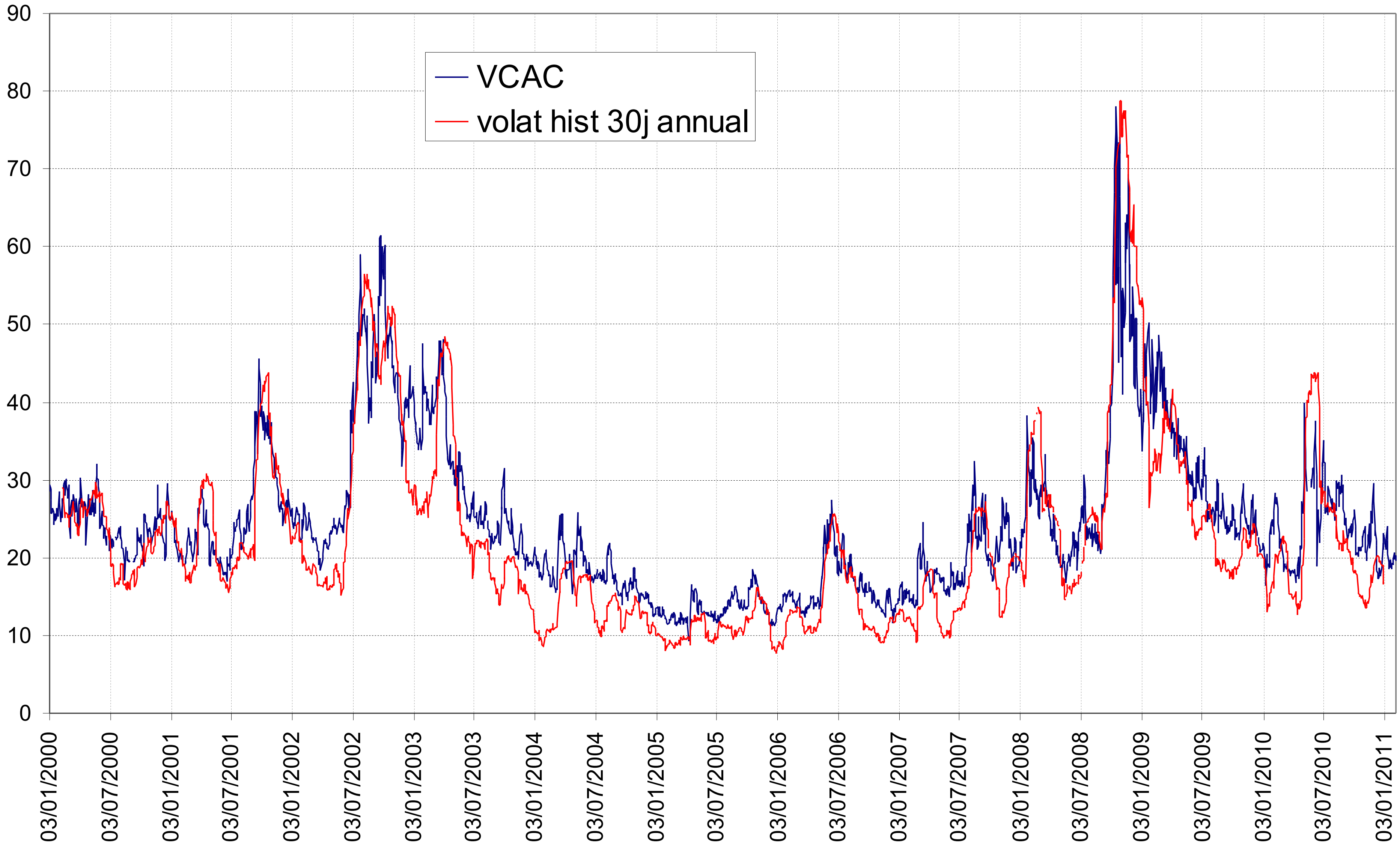
Estimation de l'écart-type sur *n* périodes (fonction « ECARTYPE » d'un tableur) :

$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (R_i - \bar{R})^2}$ où $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i$ est la moyenne des R_i.

- s est un estimateur de la volatilité « périodique » (ex : journalière) dont l'écart-type vaut $s/\sqrt{2n}$

exemple :

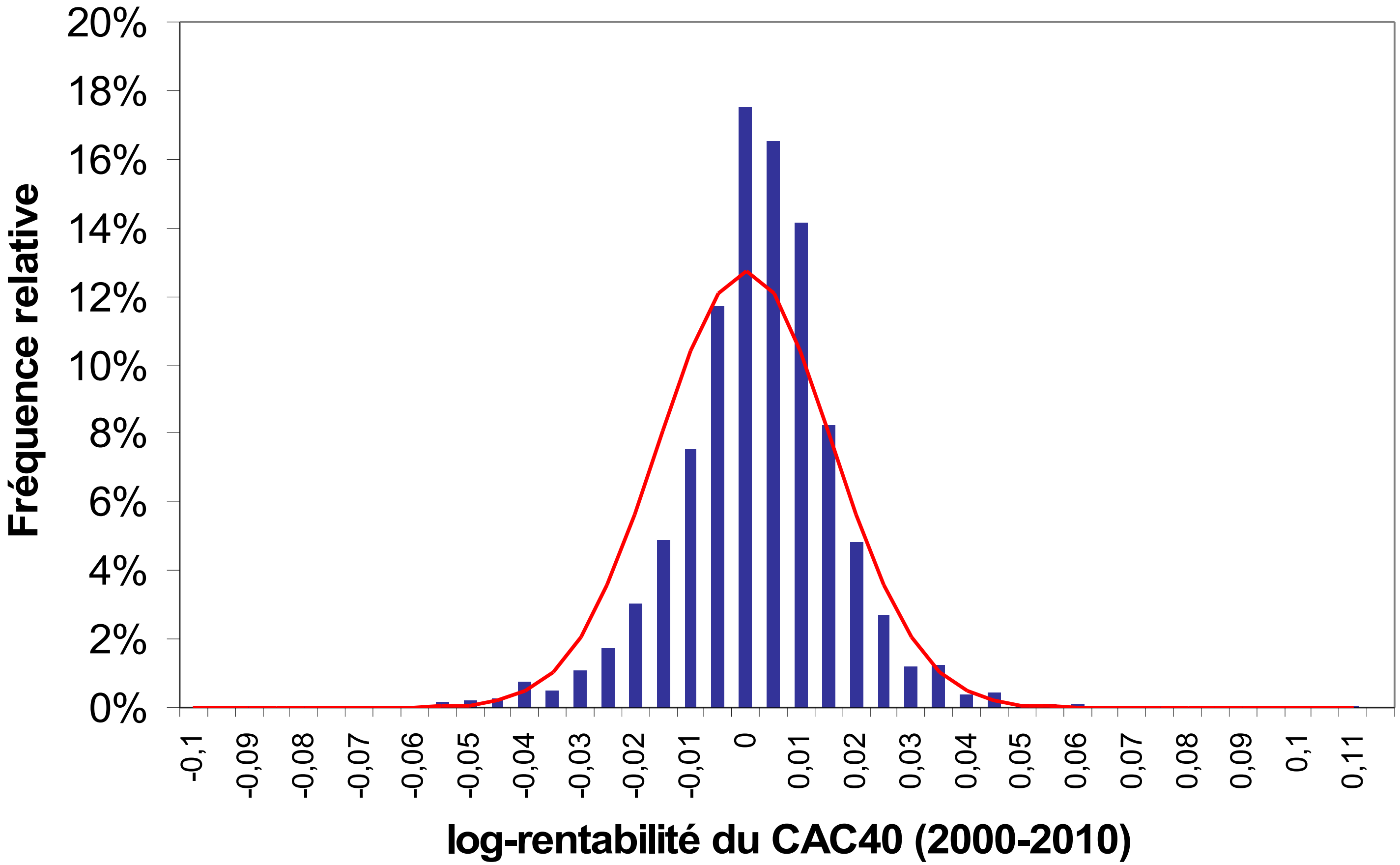
R_i rentabilité journalière → s = estimateur de la volatilité journalière
→ $s\sqrt{252}$ = estimateur de la volatilité annuelle

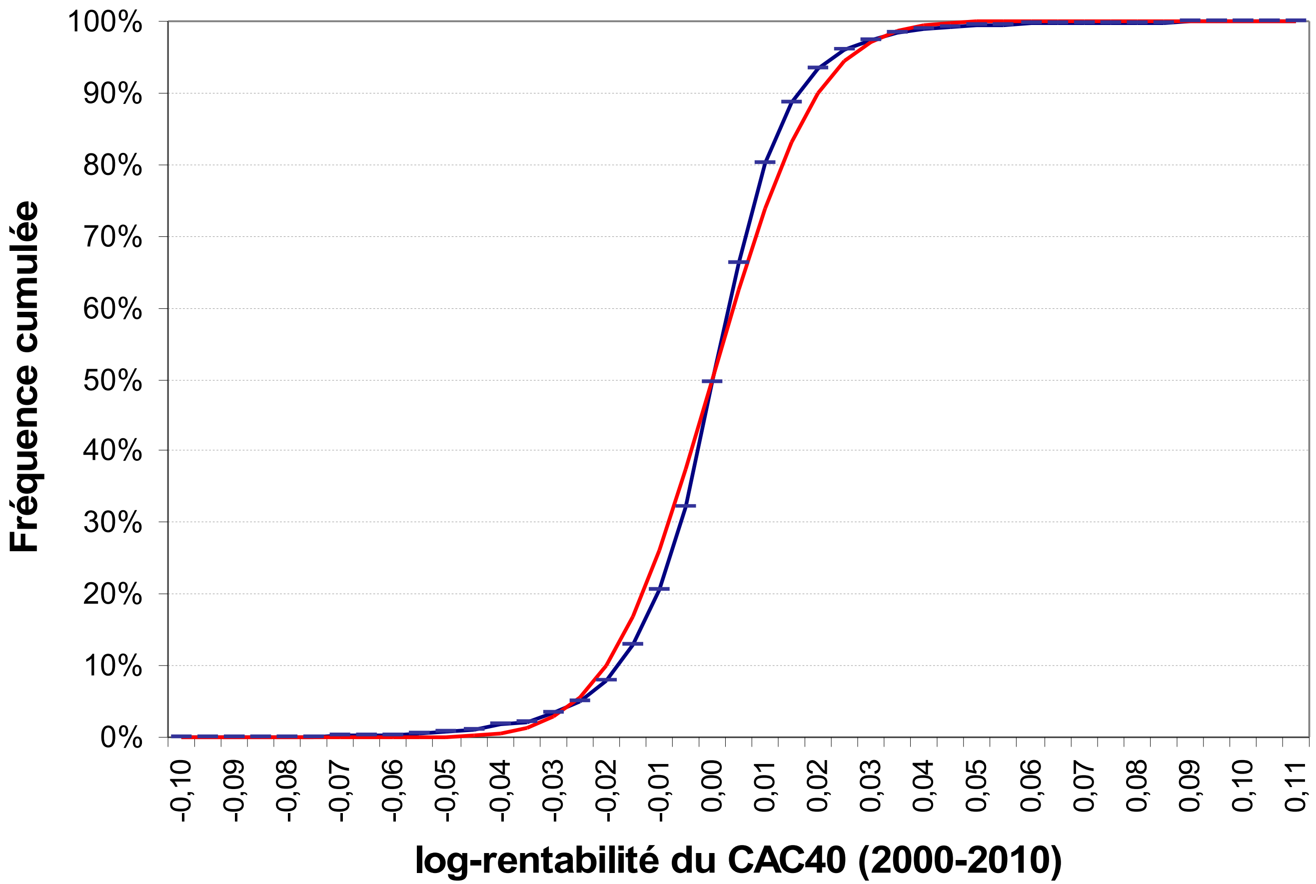


VCAC
volat hist 30j annual
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
03/01/2000
03/07/2000
03/01/2001
03/07/2001
03/01/2002
03/07/2002
03/01/2003
03/07/2003
03/01/2004
03/07/2004
03/01/2005
03/07/2005
03/01/2006
03/07/2006
03/01/2007
03/07/2007
03/01/2008
03/07/2008
03/01/2009
03/07/2009
03/01/2010
03/07/2010
03/01/2011

4- Problèmes du modèle « normal » et alternatives

4.1- Les variables financières ne suivent pas des distributions gaussiennes



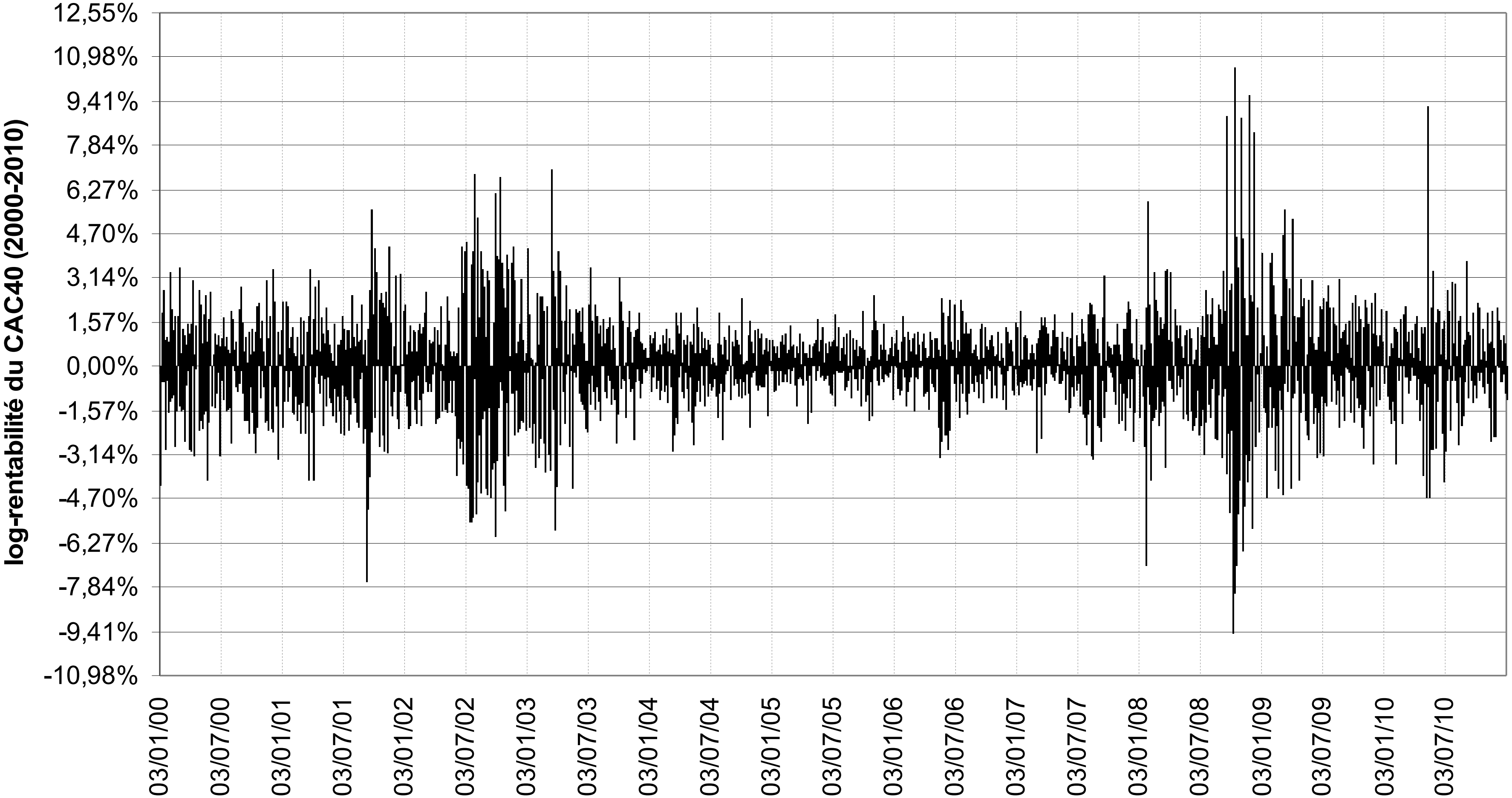


$F_{obs}(R) > N(R)$ si $R < -2{,}71\%$ ou $0 < R < 3{,}07\%$

Probabilité qu'une rentabilité journalière gaussienne centrée-réduite s'écarte de sa moyenne de plus d'un à six écart-types :

Nombre d'écart-types	Probabilité $\Pr(R \leq \mu - n\ \sigma)$ $\Pr(R \geq \mu + n\ \sigma)$	une fois tous les...	soit moins de ...
1	15,86552539%	6 jours	40 fois par an
2	2,27501319%	44 jours	6 fois par an
3	0,13498980%	741 jours	34 fois par siècle
4	0,00316712%	31574 jours	8 fois par millénaire
5	0,00002867%	3488556 jours	1 fois tous les 10 millénaires
6	0,00000010%	1013594635 jours	2 fois tous les 10 millions d'années

De 2000 à 2010, la rentabilité logarithmique journalière du CAC40 a été de moyenne nulle et d'écart-type 1,5682 % ± 0,0209 %



échelle verticale = multiples de l'écart-type de l'échantillon (1,5682 %)

n	Nombre (et %) de jours en 11 ans où la log-rentabilité a été supérieure à *n* écart-types (*)	Nombre de jours (et %) en 11 ans où la log-rentabilité a été inférieure à –*n* écart-types (*)	Rappel cas gaussien
1	299 (10,64 %)	333 (11,85 %)	15,866%
2	0	0	2,275%
3	0	0	0,135%
4	9 (0,32 %)	7 (0,25 %)	0,003%
5	6 (0,21 %)	2 (0,07 %)	0,000%
6	0	0	0,000%

(*) supérieure à n fois 1,5682 % + 0,0209 % ou inférieure à n fois 1,5682 % – 0,0209 %

→ les queues de distribution sont « épaisses »...
des chocs « rares » mais « violents »...

Applatissement (kurtosis) :

Coefficient d'excès de kurtosis : $K = \dfrac{E\left(\tilde{R} - E\,\tilde{R}\right)^4}{\sigma^4} - 3$

Pour une variable gaussienne, $K = 0$ (distribution mésokurtique).

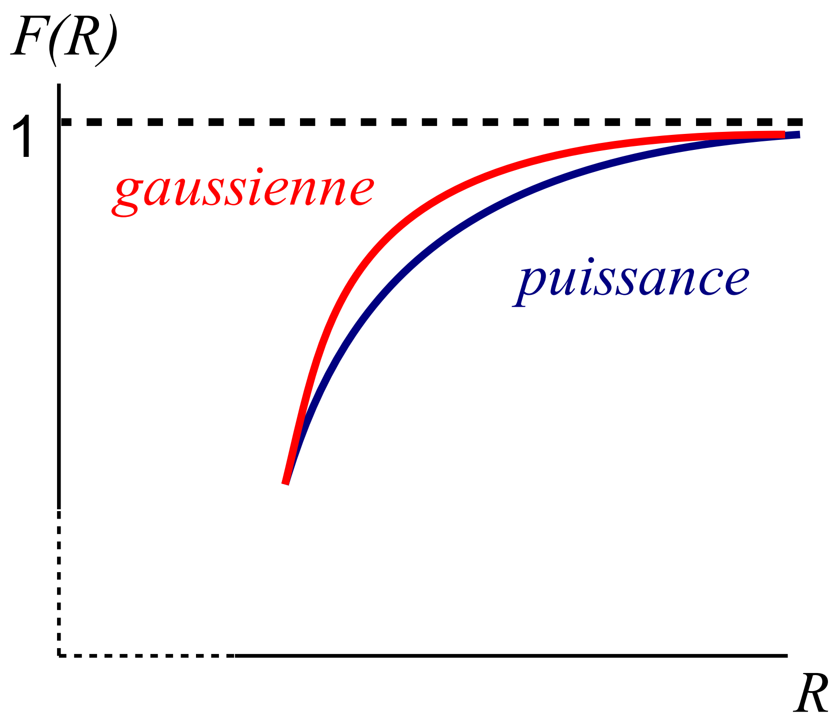
Kurtosis excédentaire négative ($K < 0$) distribution platykurtique	Kurtosis excédentaire positive ($K > 0$) distribution leptokurtique
Trop de valeurs moyennes par rapport à une gaussienne	Trop de valeurs extrêmes par rapport à une gaussienne (*queues épaisses*)

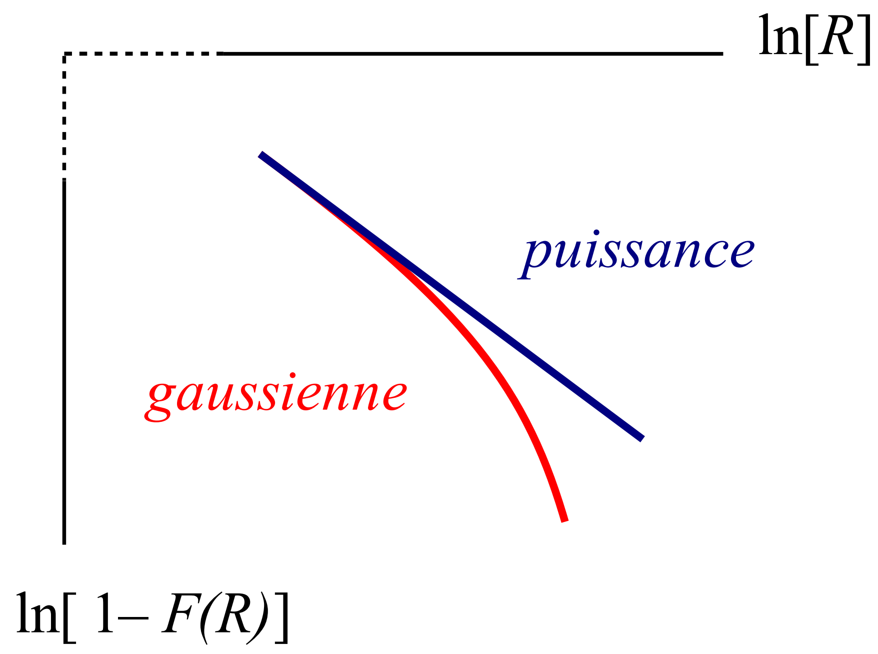
Pour les log-rentabilités du CAC40 entre 2000 et 2010 :
→ excès de Kurstosis observé (fonction KURTOSIS du tableur) = 5,035

4.2- Alternative aux distributions gaussiennes la loi de puissance

Pour les rentabilités élevées, approximer Pr($R > x$) par $K\,x^{-\alpha}$ où K et α sont des constantes.

→ pour les queues de distribution, on a une relation linéaire entre le logarithme des log-rentabilités et le logarithme de Pr($R > x$)





5- Procédures d'estimation de la volatilité journalière

La volatilité n'est pas constante dans le temps...
(ce phénomène induit un « risque de modèle » pour évaluer les options).

→ nécessité d'un suivi quotidien

- **modèle EWMA** (exponentially weighted moving average) :

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda) R_{t-1}^2$$

où : λ est une constante (à estimer) comprise entre 0 et 1
R_t est la rentabilité arithmétique (supposée d'espérance nulle) le jour t
σ_t est un estimateur de la volatilité qui surpondère les données plus récentes

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{i=1}^{N} \lambda^{i-1} R_{t-i}^2 + \lambda^N \sigma_{t-N}^2$$

(RiskMetrics, de JP Morgan, 1994 → modèle EWMA avec $\lambda = 0,94$)

• **modèle GARCH(1,1)** (generallized autoregressive conditional heteroscedasticity)

$$\sigma_t^2 = \gamma V_L + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

où : α, β et γ sont des paramètres (pondérations) tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$
V_L est la variance moyenne de long terme

→ modèle EWMA : cas particulier de GARCH(1,1) avec $\alpha = 1 - \lambda$; $\beta = \lambda$ et $\gamma = 0$

→ modèle GARCH accorde un poids à la volatilité de long terme, et prend en compte la tendance de « retour à la moyenne » de la variance (*mean-reverting* – constaté empiriquement)

→ l'estimation se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.

6- Prévision

le modèle GARCH(1,1) se réécrit : $\sigma_t^2 = (1-\alpha-\beta) V_L + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

comme $E[R_{t-1}^2] = \sigma_{t-1}^2$, il donne, pour $n > 0$:

$$E[\sigma_{t+n}^2] = V_L + (\alpha+\beta)^n (\sigma_t^2 - V_L)$$

→ prévision à *n* jours (anticipation rationnelle) de la volatilité.

On peut en déduire une « structure par termes » des volatilités (particulièrement utile pour l'évaluation des options d'échéances différentes, et les effets d'un changement du niveau de volatilité courante)

7- Corrélations et copules

Au même titre que la volatilité des variables de marché, leurs corrélations doivent être prises en compte dans la gestion des risques.

- Covariance : Cov(S_1, S_2) = E(S_1 S_2) – E(S_1)E(S_2) = σ_{12}.= σ_{21}.
- Coefficient de corrélation : $\rho = \sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$ compris entre –1 et +1.

Les modèles d'estimation de la volatilité peuvent être étendus à l'estimation des covariances de rentabilités d'actifs, notées X et Y :

EWMA : $$cov_t = \lambda\, cov_{t-1}^2 + (1-\lambda)\, X_{t-1}\, Y_{t-1}$$

GARCH(1,1) : $$cov_t = (1-\alpha-\beta)\, cov_L + \alpha\, X_{t-1}\, Y_{t-1} + \beta\, cov_{t-1}$$

(condition de cohérence des estimations : la matrice des variances-covariances estimée doit être définie-positive).

Copules :

Une approche simplificatrice de la distribution jointe de variables aléatoires, dont les distributions marginales et la corrélation seraient connues...

exemple : copule gaussienne
à partir des échantillons de valeurs de deux variables V_1 et V_2

- transformation en deux variables normales U_1 et U_2 : $u_i = N^{-1}\left(F_i(v_i)\right)$ de sorte que les distributions de U_i et V_i ont les mêmes quantiles $N(u_i) = F_i(v_i)$
- hypothèse : U_1 et U_2 suivent une loi normale multivariée, de coefficient de corrélation égal au coefficient estimé de V_1 et V_2.

→ intérêt de l'approche : on sait manipuler les lois jointes des copules...

D'autres copules : Student, Grumbel, Galambos, Hüsler-Reiss, Marshall-Olkin...

Extension aux copules multivariées...

8- L'augmentation de la volatilité du marché des actions

Question posée à chaque « crise »

- krach d'octobre 1987
- bulle des valeurs technologiques 2002
- crise des subprimes 2008

Volatilité d'origine « fondamentale »: réaction immédiate aux informations

- structure financière, effet de levier
- détérioration de la conjoncture économique
- risque géopolitique

Volatilité due aux techniques financières...

Volatilité due aux techniques financières des entreprises :

- recours excessif au levier d'endettement (augmente mécaniquement la volatilité du cours des actions, à volatilité donnée de la valeur des actifs)

- protection des créanciers par des clauses contingentes, pas toujours divulguées → ajustements plus brutaux le cas échéant

- financement par obligations convertibles
  - souscrites par hedge funds ou arbitragistes → couvertes par CDS émis par une banque qui se couvre en vendant des actions
  - comportent une option de conversion → position longue gérée en delta-neutre par le souscripteur, contracyclique
  - vendues par gestionnaires de fonds obligataires en cas de conversion

- rachats d'actions
  - hausse levier → hausse volatilité
  - vente de puts (encaisser la prime) → obligation de racheter les actions en cas de baisse du cours → détériore situation financière

- actions vendues aux salariés, achetées par des fonds communs de placement d'entreprise
  - le FCPE se couvre (vente à terme + achat de call)
  - la banque qui a repris le risque se couvre (vente au comptant + couverture en delta-neutre sur position courte en call, procyclique

- stock-options
  - incite les dirigeants à prendre des risques
  - les dirigeants se couvrent en achetant des puts, financés par ventes de calls
  - la banque qui a vendu les puts se couvre en delta-neutre sur position longue en call, contracyclique, et courte en put, procyclique

Volatilité due aux techniques financières des investisseurs

- exigence de ROE → prise de risque

- mode de gestion des portefeuilles
  - gestion indicielle → suivre l'indice n'accroît pas la volatilité
  - gestion « tiltée » alimente des mouvements procycliques
  - entrées/sorties d'indice en cas de liquidité insuffisante
  - ETF (trackers) pouvant être vendus à découvert

- fonds garantis : performance garantie par des banques qui vendent des puts, et se couvrent (en delta-neutre, pro-cyclique,...)
  - développement des fonds garantis → hausse du prix des protections → hausse volatilité implicite → hausse volatilité historique

- certaines stratégie de gestion alternative contribuent à la volatilité (arbitrage d'obligations convertibles, stratégies « event-driven », « trend follower », « global/macro »)

Volatilité due aux techniques financières des intermédiaires

- gestion du risque de crédit --> développement du marché des CDS, en interaction avec les marchés d'actions

- gestion par les banques des positions optionnelles

- ventes à découvert (motivées par des anticipations ou des arbitrages)
  - emprunteurs de titres = banques, hedge funds
  - prêteurs de titres = assurances, fonds de pensions (encaissent un loyer, récupèrent titres)
  - opacité des volumes réels, source d'incertitude

source : Conseil des Marchés Financiers, 2002, *L'augmentation de la volatilité du marché des actions*, http://www.amf-france.org/documents/general/5033_1.pdf

9- Applications :

1- L'indice SP500 a clôturé hier à 1040, sa volatilité quotidienne est estimée, à ce moment, à 1%. Les paramètres du modèle GARCH(1,1) sont : $\alpha = 0{,}06$; $\beta = 0{,}92$ et $\gamma V_L = 0{,}000002$. Si l'indice clôture aujourd'hui à 1060, quelle est la nouvelle estimation de sa volatilité ?

2- L'observation la plus récente de la volatilité quotidienne du taux de change USD/GBP est de 0,6%, et le taux de change valait 1,5000 hier à 16h. Le paramètre λ du modèle EWMA est estimé à 0,9. En supposant que le taux de change vaut 1,4950 aujourd'hui à 16h, comment évolue l'estimation de sa volatilité ?

3- Les paramètres d'un modèle GARCH(1,1) sont estimés à : $\alpha = 0{,}05$; $\beta = 0{,}92$ et $\gamma V_L = 0{,}000004$. Quel est le niveau moyen de volatilité de long terme ? Comment l'équation du modèle décrit-elle le caractère « *mean-reverting* » du processus ? Si le niveau actuel de volatilité annuelle est de 20%, quel est le niveau attendu de volatilité dans 20 jours ?