3- VALUE at RISK

Objectif : présenter/discuter des « mesures de risques » nécessaires pour

- allocation optimale des fonds propres
- suivi efficace des risques et leur gestion
- mesure des performances
- conformité aux obligations réglementaires (nationales, internationales)

ex : VaR ou valeur-en-risque ou valeur-à-risque → synthétiser en un seul nombre le risque total d'un portefeuille d'actifs financiers

- Créée par la banque JP Morgan, largement acceptée par les banques depuis 1993. (détail des modèles internes → « secrets »)
- diffusion de RiskMetrics par la banque JP Morgan en 1994 (risque de marché)
- adoption de la VaR par la BRI (Capital Adequacy Directive, accord de Bâle 2) en 1996-1998
- développement de modèles de VaR pour gérer le risque de crédit...

1- Définition de la VaR
2- VaR et « expected shortfall »
3- Les propriétés des mesures du risque
4- Choix des paramètres de la VaR
5- VaR marginale, incrémentale, partielle
6- Estimation de la VaR de marché
7- Back testing
8- Stress testing
9- Applications
10- Critique de la VaR (et mesures du risque 'dérivées' de la VaR)

Bibliographie :

cf. plan de cours
Taleb (1997), *Dynamic hedging*, Wiley
West (2010), « Coherent VaR-type Measures », *The Southern African Treasurer*, http://www.finmod.co.za/research.html

1- Définition de la VaR

« nous sommes certains à **X%**
que nous ne perdrons pas plus que **V**
dans les **T** prochains jours »

X% → seuil de confiance
V → Value at Risk
T → horizon temporel

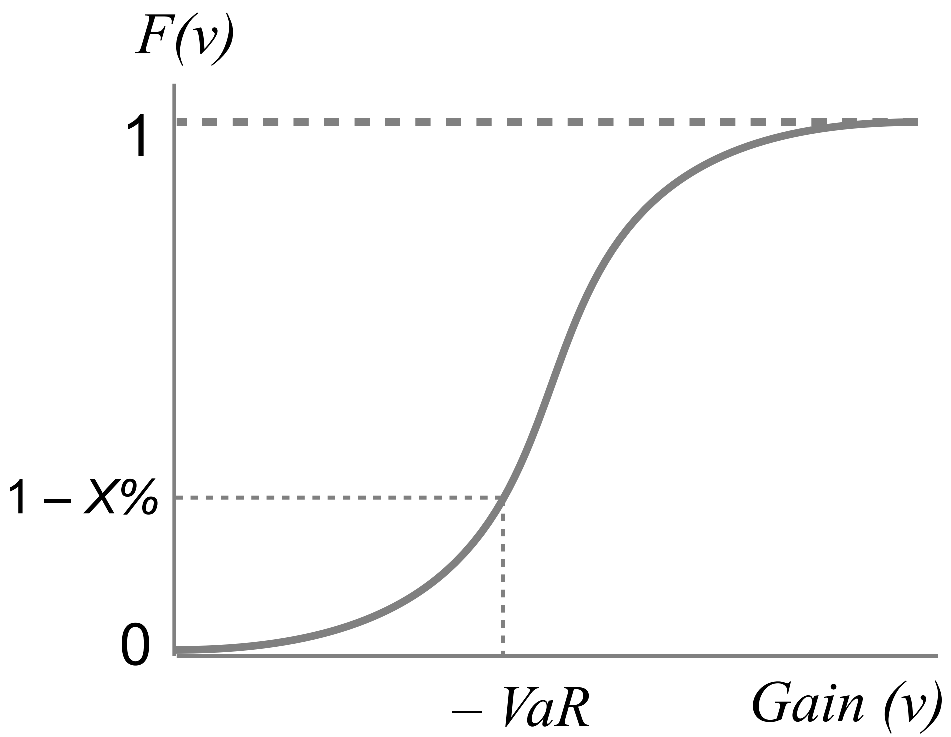
Si la VaR sur le portefeuille de marché est de 10M€ au seuil de 99% sur une période de 10 jours, il y 99% de chances que la perte subie n'excède pas 10 M€ dans les 10 prochains jours.

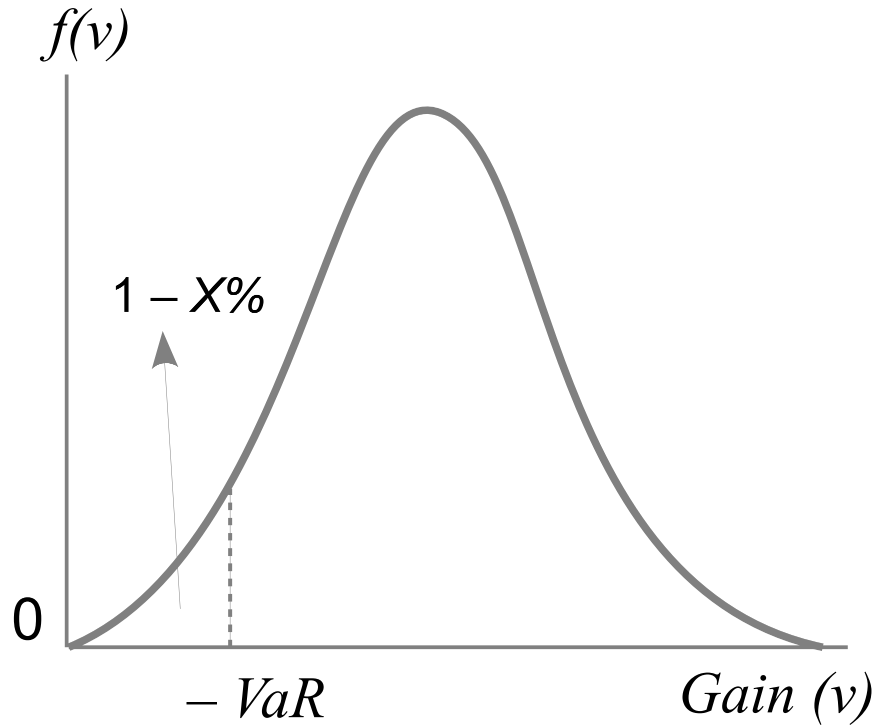
Calcul :

- à partir de la distribution des pertes (sur horizon T) : $Pr(\text{Perte} \leq V) = X\%$
  → VaR = « *X* quantile » de la distribution des pertes

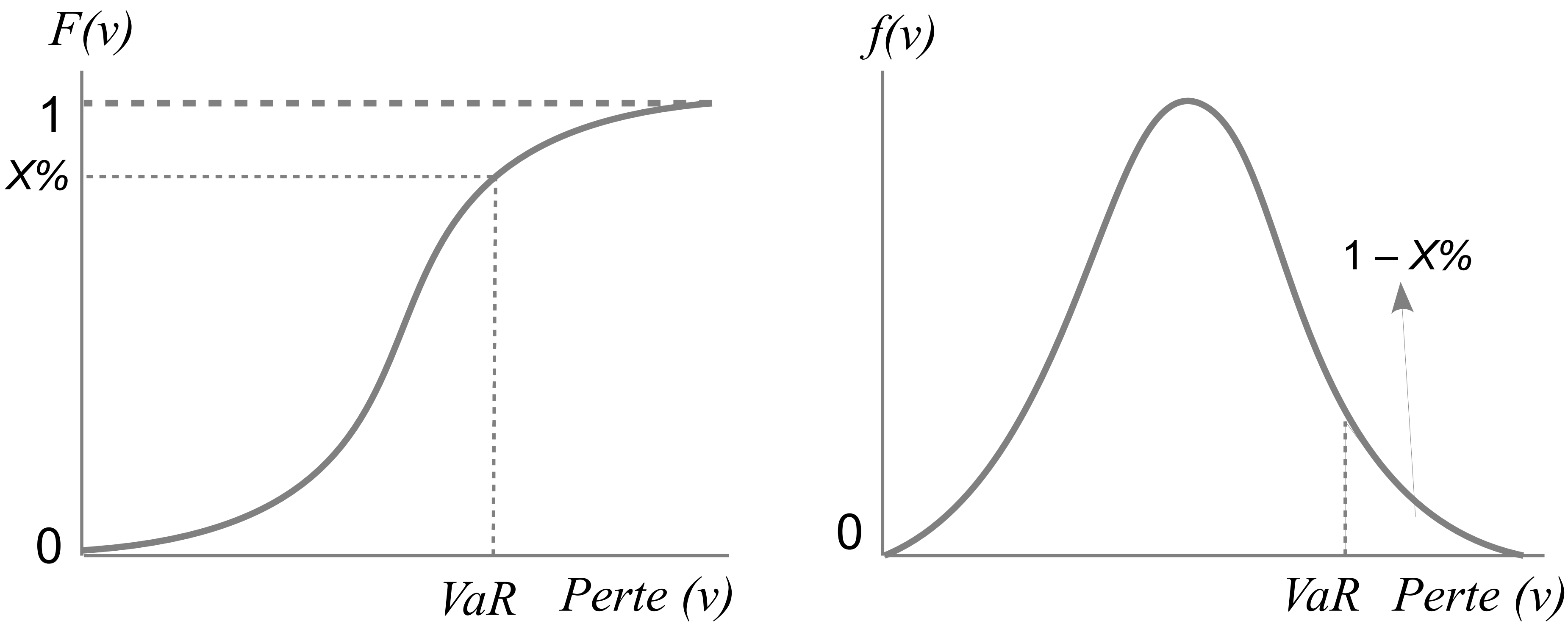
- à partir de la distribution des gains (sur horizon T) : $Pr(\text{Gain} > -V) = X\%$
  soit $Pr(\text{Gain} \leq -V) = 1 - X\%$
  → VaR = « 100 – *X* » quantile de la distribution des gains

Représentation de la VaR à partir de la répartition/densité des gains





Représentation de la VaR à partir de la répartition/densité des pertes



Si la distribution des pertes (sur horizon T) est $F(v)$, la VaR à X% est $F^{-1}(X)$.

Exemples de calculs de la VaR :

(1) Si le gain sur six mois pour un portefeuille a une distribution normale de moyenne 2 M€ et d'écart-type 10 M€, quelle est la VaR au seuil de 99%, à l'horizon de 6 mois ?

(2) Si les réalisations d'un projet sur un an sont uniformes sur un intervalle de –50 M€ à +50 M€, quelle est sa VaR au seuil de 99%, à l'horizon d'un an ?

(3) Un projet sur un an a 98% de chances de générer un gain de 2 M€, 1,5% de chances d'engendrer une perte de 4 M€ et 0,5% de chances de conduire à une perte de 10 M€. Quelle est sa VaR au seuil de 99%, à l'horizon d'un an ? Sa VaR au seuil de 99,5% à l'horizon d'un an ?

2- VaR et « expected shortfall »

Avantages prétendus de le VaR :

- facilement compréhensible : en unité monétaires du portefeuille (≠ *grecques*)
- synthétique : inclut estimation d'événements futurs (≠ *grecques*)
- facile à tester ex-post

Difficultés :

- inclure dans l'analyse *toutes* les variables de risque affectant le portefeuille
- estimer les probabilités des événements futurs
- dangereuse s'il s'agit de limiter les risques (d'un trader)

banque limite la VaR au seuil de 99% à 1 jour du portefeuille d'un trader à 10M€ :

– le trader respecte la limite → la perte est inférieure à 10M€ dans 99% des cas
– et dans 1% des cas ? Perte de 500 M€ ? → inacceptable

- la VaR n'indique rien de la distribution des pertes au-delà du seuil.

→ « expected shortfall » (« VaR conditionnelle », CVaR, « perte de queue »...)

Expected Shortfall : en cas de dégradation de la valeur d'un portefeuille, au seuil de confiance de X%, à horizon T, quelle est la perte attendue ?

ES (Expected Shortfall) =
espérance conditionnelle de la perte sachant perte > VaR
(taille moyenne des pertes au-delà de la VaR)

$$ES = \mathrm{E}[\text{perte} \mid \text{perte} > \text{VaR}]$$

propriétés de l'expected shortfall :

- encourage la diversification (sous-additive, cf. infra)
- plus difficile à tester ex post que la VaR
- plus difficile à comprendre (??)

3- Les propriétés des mesures du risque

VaR utilisée par les régulateurs pour déterminer le capital requis :

- VaR à 99% à 10 jours pour les risques de marché
- VaR à 99,9% à un an pour les risques de crédit et opérationnel

→ capital requis = multiple de la VaR

Plus généralement : considérer une « mesure du risque » comme le montant de liquidités $m(V)$ à ajouter au portefeuille (de valeur V) afin de le rendre *acceptable* pour le régulateur, l'actionnaire...

Une mesure du risque doit être **cohérente** (Artzner, Delbaen, Eber et Heath 1999)...

→ la VaR n'est pas « cohérente »

mesure cohérente du risque :

- ***monotone :*** si un portefeuille a une valeur plus grande dans tous les états de marché, sa mesure de risque ne doit pas être plus grande.

$$V \leq W \quad \Rightarrow \quad m(V) \geq m(W)$$

- ***homogène*** : si on multiplie par a la valeur du portefeuille, sa mesure de risque est multipliée par a.

$$m(a \times V) = a \times m(V)$$

- ***invariante par translation*** : si on ajoute un montant de liquidité K au portefeuille, sa mesure de risque diminue de K.

$$m(V + [1+r]K) = m(V) - K$$

Une fois le capital requis ajouté à la position, et investi au taux sans risque, la mesure du risque devient nulle $m(V + [1+r]m(V)) = 0$

- ***sous-additive*** : la mesure du risque de la somme de deux portefeuilles ne doit pas être supérieure à la somme des mesures de risque des portefeuilles.

$$m(V + W) \leq m(V) + m(W)$$

La diversification n'accroit pas le risque.

La *VaR* n'est pas « sous-additive ». La *CVaR* est « sous-additive ».

Exemple :
Soient deux prêts à un an de 10 M€ et de probabilité de défaut de 1,25% chacun. Le taux de recouvrement en cas de défaut est incertain (uniforme sur [0; 1]), le profit sur un prêt est 0,2 M€. Si un prêt est en défaut, l'autre ne l'est pas.

- *VaR* à 99% à un an sur un prêt : 2 M€.
- *VaR* à 99% sur le portefeuille : 5,8 M€.

(prouve par l'absurde que la VaR n'est pas sous-additive pour toute distribution des pertes
(NB : la VaR est sous-additive si la distribution des pertes est 'elliptique' ≈ 'gaussienne généralisée')

- *ES* à 99% à un an sur un prêt : 6 M€
- *ES* à 99% sur le portefeuille : 7,8 M€.

(illustre, sans la prouver, la sous-additivité de l'ES)

4- Choix des paramètres de la VaR

$VaR = VaR(T, X)$ → Choisir l'horizon temporel T et le seuil de confiance X.

NB : hypothèse largement adoptée = la variation de la valeur du portefeuille suit une loi normale (centrée). Simplification commode (mais dangereuse)...

- $y \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma y + \mu \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Pr(\sigma y + \mu \leq \sigma N^{-1}(X) + \mu) = X$

application :

- $Perte \sim N(\mu_T, \sigma_T) \Rightarrow VaR(T, X) = \sigma_T N^{-1}(X) + \mu_T$
- $Perte \sim N(0, \sigma_T) \Rightarrow VaR(T, X) = \sigma_T N^{-1}(X)$

→ la VaR est proportionnelle à la volatilité (dans le cas « gaussien ») pour un seuil de confiance donné, quelque soit l'horizon.

- $Rentab \;\; Arithm \sim N(\mu_T, \sigma_T) \Rightarrow VaR(T, X) = P_0\left[\sigma_T N^{-1}(X) - \mu_T\right]$
- $Rentab \;\; Logarithm \sim N(\mu_T, \sigma_T) \Rightarrow VaR(T, X) = P_0\left[1 - e^{\mu_T - \sigma_T N^{-1}(X)}\right]$

Exemple :

Soit un portefeuille valant aujourd'hui 100 M€.
Si la rentabilité arithmétique sur les 10 jours ouvrés à venir est distribuée normalement de moyenne 0,4%, et d'écart-type 5%, la VaR à 95% à 10 jours vaut :

Var(10j, 95%) = 7,825 M€.

Si la log-rentabilité sur les 10 jours ouvrés à venir est distribuée normalement de moyenne 0,4%, et d'écart-type 5%, la VaR à 95% à 10 jours vaut :

Var(10j, 95%) = 7,527 M€.

→ en supposant la rentabilité normale plutôt que log-normale, on surestime la VaR de 3,8%.

4.1- Choix de l'horizon temporel

En fonction de l'horizon de gestion :

- trader, position liquide,activement gérée → 1 jour
- gérant de fonds de pension, performances évaluées mensuellement → 1 mois.

Pour bénéficier d'un nombre suffisant de données :

(1) estimer la VaR à 1 jour → (2) convertir en VaR à horizon plus long

Les « formules » reliant $VaR(T, X)$ à $VaR(T', X)$ dépendent des hypothèses sur les distributions et les corrélations des pertes...

- si les pertes quotidiennes successives sont $N(\mu_1,\sigma_1)$ **non corrélées** entre elles :

  $$VaR(T,X) = N^{-1}(X)\sigma_1\sqrt{T} + \mu_1 T$$

  soit approximativement (négliger $\mu_1 T$) : $VaR(T,X) \approx N^{-1}(X)\sigma_1\sqrt{T}$

  d'où : $VaR(T',X) \approx \sqrt{\frac{T'}{T}}\,VaR(T,X)$

- si les log-rentabilités quotidiennes successives sont $N(\mu_{R1},\sigma_{R1})$ **non corrélées** :
  $VaR(T,X)=P_0\left(1-\exp\left(\mu_{R1}T-N^{-1}(X)\sigma_{R1}\sqrt{T}\right)\right)$
  soit par approximation linéaire ($T\approx 0$) :
  $VaR(T,X)\approx P_0\left(N^{-1}(X)\sigma_{R1}\sqrt{T}-\mu_{R1}T\right)$ (*)
  d'où encore (négliger $\mu_{R1}T$) : $VaR(T',X)\approx\sqrt{\frac{T'}{T}}VaR(T,X)$

Exemple :
Portefeuille d'actions de 50 M€ assimilable à un indice de volatilité annuelle 20%, et d'espérance de rentabilité annualisée 12% (on considère 250 jours par an)

- (*) → VaR(1 jour, 95%) ≈ 1,022 M€
- (*) → VaR(1 jour, 95%) ≈ 1,046 M€ en négligeant $\mu_1 T$
- (*) → VaR(10 jours, 95%) ≈ 3,068 M€
- (*) → VaR(10 jours, 95%) ≈ 3,308 M€ en négligeant $\mu_1 T$ ('erreur' plus grande)

Remarque : $VaR(10\text{j},X\%)\ \approx\ \sqrt{10}\ \ VaR(1\text{j},X\%)\ \approx\ 3{,}16\,VaR(1\text{j},X\%)$

- si les pertes ou les log-rentabilités quotidiennes sont **autocorrélées** :
  - l'autocorrélation accroît la variance de la perte à T jours (par rapport au cas d'absence d'autocorrélation)
  - la VaR calculée à horizon de plusieurs jours est aussi plus élevée

Pour un coefficient d'autocorrélation des pertes de 10%, la variance de la perte à 10 jours (donc le carré de la VaR) est majoré d'environ 10%

4.2- Choix du seuil de confiance

- Maintenir notation de crédit : AA → probabilité de défaut à un an de 0,03%, → choisir seuil de confiance = 99,97% (et horizon 1 an)
- l'estimation de la VaR avec un seuil de confiance élevé est difficile

Sous l'hypothèse de pertes gaussiennes non autocorrélées, on peut relier *VaR*(*T*, *X*) à *VaR*(*T*, *X'*)

on a vu : $VaR(T, X) \approx N^{-1}(X)\sigma_1\sqrt{T}$ (page 13)

d'où : $VaR(T, X') \approx \dfrac{N^{-1}(X')}{N^{-1}(X)} VaR(T, X)$

MAIS : « formule » très sensible à la forme des queues de distribution des pertes.

→ Si les queues sont épaisses, la « formule » biaise fortement les estimations (remède = théorie des valeurs extrêmes).

5- VaR marginale, incrémentale, partielle

VaR marginale d'un actif en portefeuille = sensibilité de la VaR du portefeuille au montant investi dans un actif *i,* x_i.

$$mVaR_i = \frac{\partial VaR}{\partial x_i}$$

- VaR marginale élevée (resp. basse) pour actif ayant un ***bêta*** élevé (resp. bas)
  En effet, *dans le cadre gaussien* :
  – VaR (approx.) proportionnelle à l'écart-type de rentabilité du portefeuille
  – VaR² (approx.) proportionnelle à la variance de rentabilité du portefeuille
  – or contribution du titre i à cette variance = sa *covariance* avec le portefeuille

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i \sigma_{iP} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_P^2}{dx_i} = \sigma_{iP} = \beta_{iP} \times \sigma_P^2$$

- si $mVaR_i < 0$: ↑ x_i ⇨ ↓ VaR

VaR incrémentale d'un actif en portefeuille = effet sur la VaR d'une nouvelle transaction ou de son dénouement (adjonction ou retrait d'un actif au portefeuille)

$$iVaR_i \approx \frac{\partial VaR}{\partial x_i} \times x_i = mVaR_i \times x_i$$

VaR partielle d'un actif en portefeuille = part de la VaR du portefeuille attribuée à cet actif

$$pVaR_i \approx iVaR_i$$

La somme des VaR partielles est égale à la VaR du portefeuille :

$$\sum_{i=1}^{n} pVaR_i = VaR$$

(les mêmes concepts existent pour la CVaR)

6- Estimation de la VaR de marché

6.1- Estimation de la VaR de marché par simulation historique

Estimer la distribution de probabilité des pertes d'un portefeuille à partir des variations journalières des variables de marché pertinentes sur une période de temps donnée.

Méthode :

- à partir des N variations observées, construire N « scenarii » (N valeurs possibles du portefeuille (par exemple à horizon d'un jour)
  - 1er scénario : les variables de marchés évoluent comme observé le 1er jour
  - 2^{e} scénario : les variables de marchés évoluent comme observé le 2^{e} jour...
- supposer stable dans le temps la distribution jointe des variables de marché
- calculer les N pertes du portefeuille
- en déduire la distribution empirique des pertes du portefeuille
- sur un échantillon de (par exemple) 1000 pertes classées par ordre croissant, la VaR empirique au seuil de 95% sera la 950ème perte.

Variantes :

- Bootstrap : construire des échantillons « artificiels » en tirant avec remise dans l'échantillon des pertes observées
- prendre en compte la structure de la volatilité qui, empiriquement, n'est pas constante dans le temps
- améliorer l'estimation en prenant en compte les queues épaisses de la distribution empirique (théorie des valeurs extrêmes : la distribution des valeurs extrêmes converge vers une loi de Pareto...)

NB : dans cette méthode, on ne calcule pas les paramètres de la distribution jointe des variables de marché (l'approche est « non-paramétrique »).

6.2- Estimation de la VaR de marché par l'approche variance-covariance

Estimer la distribution jointe des variables de marché pertinentes sur une période de temps donnée.

Méthode :

- déterminer les « facteurs de risque » qui influencent la valeur du portefeuille
- estimer les paramètres de leur distribution jointe (supposée gaussienne multivariée) → l'approche est dite aussi « paramétrique »
- **méthode « delta-normale » :** supposer une relation linéaire entre la perte et les variables de marché (approximation linéaire)
  méthode « quadratique » ou « delta-gamma » : supposer une relation quadratique entre la perte et les variables de marché (approximation au deuxième ordre), plus précise...
- **Simulation de Monte-Carlo :** méthode probabiliste pour simuler les trajectoires des facteurs de risques (étant donnés les paramètres de leur distribution jointe)
- en déduire les quantiles de la distribution empirique des pertes du portefeuille

6.3- Avantages et inconvénients de deux approches :

approche	**avantages**	**inconvénients**
simulation historique	• Estimation des distributions jointes des variable de marché	• Nécessite de longs calculs (Monte-Carlo)
variance-covariance	• Rapidité d'obtention des résultats • Mise à jour possible des volatilités et corrélations • Plus adaptée pour les portefeuilles d'investissements	• Hypothèse de normalité des variables de marché (dans l'approche simplifiée) • Inadaptée pour des portefeuilles de marché delta-neutres non linéaires

7- Back testing

Back-testing = Test des performances des estimations de VaR sur données passées.

→ Vérifier le nombre d'***exceptions*** (nombre de jours où la perte a dépassé la VaR).

Exceptions = 1% des jours → VaR(1j,99%) considérée comme « fiable »
> 1% des jours → VaR(1j,99%) et capital réglementaire sous-estimés
< 1% des jours → VaR(1j,99%) et capital réglementaire sur-estimés

2 méthodes utilisées en pratiques :

- comparer la VaR avec la variation de la valeur du portefeuille recalculée à composition fixe (logique car la VaR est elle-même calculée à composition fixe)
- comparer la VaR avec la variation de la valeur effective du portefeuille (les variations qui importent en matière de risque)

- Si on suppose que le modèle d'estimation de la VaR(T,X) est fiable, alors la probabilité que la VaR soit dépassée est 1 – X.

Si, sur n observations, on constate que la VaR est dépassée m fois, avec m/n > p (plus fréquemment que la probabilité « théorique »), doit-on rejeter le modèle ?
→ faire un test statistique... (le nombre d'exceptions suit une loi binomiale)

problème : seuil de confiance des tests = 5%...

- si les exceptions sont « concentrées », au lieu d'être répartie de manière homogène sur la période, les pertes risquent d'être autocorrélées : en tenir compte dans les tests (Christofferson 1998)

Règles du Comité de Bâle :

- des procédures de *back-testing* doivent être mises en place...
- le multiplicateur réglementaire de la VaR(1j, 99%) dépend du nombre d'exceptions

8- Stress testing

simulations de crise : estimer la valeur du portefeuille dans des conditions de marché extrêmes.

→ tenir compte des événements « rares », comme une variation de 5 écart-types journaliers :

- une fois tous les7000 ans sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne
- une ou deux fois tous les 10 ans en pratique

9- Applications :

1. La VaR au seuil de 95% à un mois d'un fonds de placement vaut 6% de son portefeuille d'actifs. Vous avez investi 100 k€ dans ce fonds. Comment interprétez-vous la VaR ?

2. L'expected shortfall au seuil de 95% à un mois du fonds placement vaut 6% de son portefeuille d'actifs. Vous avez investi 100 k€ dans ce fonds. Comment interprétez-vous l'expected shortfall ?

3. Supposons que deux portefeuilles indépendants dont les montants et probabilités de perte sont 10 M€ à 0,9% et 1 M€ à 99,1%. La probabilité d'un gain est nulle. Quelle est laVaR au seuil de 99% d'un des portefeuilles ? Celle des deux portefeuilles agrégés ? L'expected shortfall au seuil de 99% d'un des portefeuilles ? Celle des deux portefeuilles agrégés ? Conclusion ?

4. Supposons que les variations de la valeur d'un portefeuille sur un jour ont une distribution normale de moyenne nulle et d'écart-type 2 M€. Estimez la VaR au seuil de 97,5% à 1 jour, la VaR au seuil de 97,5% à 5 jours, la VaR au seuil de 99% à 5 jours. Quel serait l'impact d'une autocorrélation journalière d'ordre 1 de 0,16 ?

5. Considérons un back-testing d'un modèle de VaR à 1 jour en utilisant des données sur 1000 jours. Le seuil de la VaR est 99%, et 17 exceptions sont observées. Doit-on rejeter le modèle au seuil de 5% ?

6. Une banque possède un portefeuille d'options sur le taux de change USD/GBP. Le delta du portefeuille est de56 alors que le taux de change est de 1,5. Donnez une approximation linéaire de la relation entre les variations en pourcentage du taux de change. Si la volatilité journalière du taux de change est de 0,7%, quelle est la VaR au seuil de 99% à 10 jours du portefeuille. ?

10- Critique de la VaR (et mesures du risque 'dérivées' de la VaR)

- hypothèses sur les distributions des variables de marché (gaussiennes, stationnaires)
- le risque de liquidité n'est pas pris en compte
- augmentation des corrélations qui diminue l'effet de la diversification et augmente la VaR → invalide l'approche paramétrique...
- effets cumulatif d'une utilisation généralisée : en cas de baisse des cours, la VaR augmente → réallocations de portefeuille qui risquent d'aggraver la baisse des cours (vendre certaines positions pour maintenir la VaR)
- problèmes calculatoires : besoin de beaucoup de données, existence de délais dans la constitution des bases de données, difficultés à estimer des matrices de variances-covariances sur des centaines d'instruments