THEORIE DES JEUX
Préparation à l'examen

N.B. : Il faut toujours *justifier* sa réponse.

1- Définissez :
- (1) jeu sous forme normale ;
- (2) stratégie strictement dominée dans qu'un jeu sous forme normale ;
- (3) équilibre de dominance itérée
- (4) équilibre de Nash en stratégies pures dans jeu sous forme normale ;
- (5) issue pareto-optimale dans un jeu sous forme normale ;
- (6) jeu du type « dilemme des prisonniers » ;
- (7) point focal
- (8) stratégie mixte dans un jeu sous forme normale ;
- (9) équilibre de Nash en stratégies mixtes dans jeu sous forme normale.
- (10) jeu à information parfaite ;
- (11) jeu à information complète ;
- (12) sous-jeu ;
- (13) équilibre de Nash parfait en sous-jeux ;
- (14) algorithme de Kuhn
- (15) théorème « populaire » (*Folk theorem*)
- (16) règle de Bayes
- (17) jeu bayésien statique
- (18) équilibre de Nash Bayésien
- (19) croyances des joueurs dans un jeu bayésien statique
- (20) transformation d'Harsanyi
- (21) enchères au premier prix sous pli cacheté
- (22) enchères au deuxième prix sous pli cacheté
- (23) équilibre bayésien parfait
- (24) jeu de signaux
- (25) équilibre bayésien parfait d'un jeu de signaux

2- Pour chaque jeu-type suivant, expliquez quel scénario conduit à la matrice des gains. Déterminez les équilibres de Nash (en stratégies pures et en stratégies mixtes).

Jeu de la poule mouillée

		C	
		G	D
L	H	-3 ; -3	2 ; 0
	B	0 ; 2	1 ; 1

Dilemme du samaritain

		C	
		G	D
L	H	3 ; 2	-1 ; 3
	B	-1 ; 1	0 ; 0

Jeu du devoir civique

		C	
		G	D
L	H	0 ; 0	10 ; 7
	B	7 ; 10	7 ; 7

Jeu de la chasse au cerf

		C	
		G	D
L	H	4 ; 4	0 ; 1
	B	1 ; 0	1 ; 1

Jeu de la bataille des sexes

		C	
		G	D
L	H	2 ; 1	0 ; 0
	B	0 ; 0	1 ; 2

3- Dans le jeu suivant (dilemme du samaritain), l'étudiant typique peut se prendre en charge (« étudier », trouver un travail...) ou réclamer l'assistance du gouvernement (« bloquer » la fac, et exiger de l'Etat un diplôme, un emploi, une retraite...). Le gouvernement peut aider l'étudiant ou refuser toute assistance. Les gains sont indiqués dans le tableau suivant :

		étudiant	
		étudier	bloquer
gouvernement	aider	2 ; 2	-2 ; 3
	refuser	-1 ; 1	1 ; 0

Montrez que le jeu n'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Déterminez l'équilibre de Nash en stratégies mixtes. Représentez graphiquement les meilleures réponses des joueurs. Commentez les résultats.

4- Dans le jeu sous forme normale suivant, quelles stratégies survivent au processus d'élimination itérée des stratégies strictement dominées ? Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures ? Quels sont les équilibres de Nash en stratégies mixtes ?

		Joueur 2		
		G	C	D
Joueur 1	H	2 ; 0	1 ; 1	4 ; 2
	M	3 ; 4	1 ; 2	2 ; 3
	B	1 ; 3	0 ; 2	3 ; 0

5- Dans le jeu sous forme normale suivant (jeu de Kreps), quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures et en stratégies mixtes ?

		C			
		G	CG	CD	D
L	H	200 ; 6	3 ; 5	4 ; 3	0 ; -1
	B	0 ; -10000	5 ; -1000	6 ; 3	3 ; 20

6- Dans quelle mesure la problématique de l'entente entre les firmes dans un duopole s'apparente-t-elle à un dilemme des prisonniers ?

7- Déterminez l'équilibre de Nash d'un duopole dans lequel les coûts unitaires de production des firmes sont constants et égaux à c, les firmes 1 et 2 choisissent *simultanément* les quantités produites et vendues, q_1 et q_2, de façon à maximiser leur profit, et le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1 + q_2$ (on supposera $a > c$). Montrez que les entreprises auraient collectivement intérêt à s'entendre sur des quotas de production égaux à (a–c)/4, mais qu'individuellement, elles n'ont pas intérêt à respecter ces quotas.

8- Déterminez l'équilibre de Nash d'un duopole dans lequel les firmes 1 et 2 produisent des biens différenciés horizontalement, avec des coûts unitaires de production constants et égaux à c, et choisissent *simultanément* les prix de leurs produits, P_1 et P_2, de façon à maximiser leur profit. Les fonctions de demande sont $q_1(P_1, P_2) = a - P_1 + b\ P_2$ et $q_2(P_2, P_1) = a - P_2 + b\ P_1$ (on supposera $a > c$).

9- On considère un duopole dans lequel les firmes 1 et 2 produisent des biens non différenciés. On suppose que la demande à la firme 1 est : $a - P_1$ si $P_1 < P_2$, 0 si $P_1 > P_2$, $(a - P)/2$ si $P_1 = P_2 = P$. De même pour la demande à la firme 2. Les coûts unitaires de production constants et égaux à c, (on supposera $a > c$). Montrer que l'unique équilibre de Nash est tel que chaque entreprise fixe un prix égal à c. Commentez (paradoxe de Bertrand).

10- On considère une population d'électeurs distribués uniformément le long d'un spectre idéologique de gauche (x=0) à droite (x=1). Les candidats à un unique mandat choisissent simultanément leur plate-forme de campagne (c'est-à-dire un point compris entre x=0 et x=1). Les électeurs observent les choix des candidats, puis chaque électeur vote pour le candidat le plus proche de sa position sur le spectre. S'il y a deux candidats et qu'ils choisissent les plateformes x_1=0,3 et x_2=0,6, par exemple, alors tous les électeurs à gauche de 0,45 (x<0,45) votent pour le candidat 1 et tous les électeurs à droite (x>0,45) votent pour le candidat 2, qui gagne les élections avec 55 % des voix. On suppose que les candidats cherchent seulement à être élus, il ne soucient pas de leur plate-forme en tant que telle. S'il y a deux candidats, quel est l'équilibre de Nash en stratégies pures ? S'il y a trois candidats, exhibez un équilibre de Nash en stratégies pures. (On suppose que plusieurs candidats choisissant la même plate-forme se partagent les voix de façon égale, et que les vainqueurs ex aequo sont départagés par tirage au sort).

11- Un employé travaille pour une entreprise, dont le « patron » est chargé de superviser la qualité du travail accompli. Le matin, l'employé part « sur le terrain » accomplir la mission qui lui est confiée. On suppose qu'il peut fournir un effort important dans ce sens, ou, au contraire « tirer au flanc ». En même temps, le « patron » peut décider de rester à son bureau, ou d'aller inspecter sur le terrain le travail de l'employé. On suppose que :

- fournir un effort coûte G à l'employé, et rapporte V au « patron » ;
- « tirer au flanc » ne coûte rien à l'employé, mais ne rapporte rien au « patron » ;
- si le patron reste au bureau, il suppose que l'employé a fait son travail, et il le paye le salaire convenu, W ;
- si le patron inspecte l'employé, il lui en coûte H, mais il paye le salaire convenu W si, et seulement si, l'employé fournit l'effort suffisant (et ne tire pas au flanc).

Présenter ce scénario comme un jeu statique sous forme normale en donnant la matrice des gains des joueurs. Déterminer les équilibres de Nash en stratégie pure et en stratégie mixte, en supposant que : $W > G > H > 0$.

12- Déterminez l'équilibre de Nash d'un duopole dans lequel les coûts unitaires de production des firmes sont constants et égaux à c, les firmes 1 et 2 choisissent *séquentiellement* les quantités produites et vendues, q_1 et q_2, de façon à maximiser leur profit, et le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1 + q_2$ (on supposera $a > c$).

13- Le syndicat et la direction de l'entreprise négocient les salaires et le niveau d'emploi de la manière suivante (d'après Leontieff, 1946) : (1) le syndicat pose une exigence de salaire, w ; (2) la firme observe (et accepte) w et choisit alors le niveau d'emploi, L ; (3) les gains sont $U(w, L) = (w - w_a)^s L^{1-s}$ pour le syndicat, où w_a est le salaire que les membres du syndicat peuvent obtenir dans un emploi alternatif, et le profit $\pi(w, L) = L^{1/2} - w.L$ pour la firme. Déterminez l'équilibre de Nash parfait du jeu entre le syndicat et la firme. Commentez les décisions prises (salaire et emploi).

14- On suppose qu'un syndicat est l'unique fournisseur de travail à toutes les firmes d'un oligopole, comme le *United Auto Workers* l'est pour General Motors, Ford, Chrysler, etc. La chronologie des coups est la suivante : (1) le syndicat pose une exigence de salaire, w, qui s'applique à toutes les firmes ; (2) les firmes observent (et acceptent) w et choisissent alors simultanément les niveaux d'emploi, L_i pour la firme i ; (3) les gains sont $(w - w_a)L$ pour le syndicat, où w_a est le salaire que les membres du syndicat peuvent obtenir dans un emploi alternatif, et $L=L_1+\ldots+L_n$ est l'emploi total dans les firmes syndicalisées, et le profit $\pi(w, L_i)$ pour la firme i, dont les déterminants sont décrits ci-après. Toutes les firmes ont la fonction de production suivante : la production est égale à la quantité de travail, soit $q_i=L_i$. Le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1+\ldots+q_n$. Pour simplifier, on suppose que les firmes n'ont pas d'autre coût que le coût salarial. Comment (et pourquoi) le nombre de firmes présentes sur la marché affecte-t-il l'utilité du syndicat dans le résultat parfait en sous-jeux ?

15- Pour chacun des jeux séquentiels suivants, pour lesquels on suppose que Camille "joue" en premier, donner une représentation sous forme extensive. Déterminez les équilibres de Nash et les équilibres de Nash parfaits en sous-jeux. Léon peut-il influencer Camille par une menace appropriée ?

Jeu 1

		C	
		G	D
L	H	3 ; 6	3 ; 0
	B	1 ; 1	8 ; 3

Jeu 2

		C	
		G	D
L	H	0 ; 6	0 ; 0
	B	1 ; 1	8 ; 3

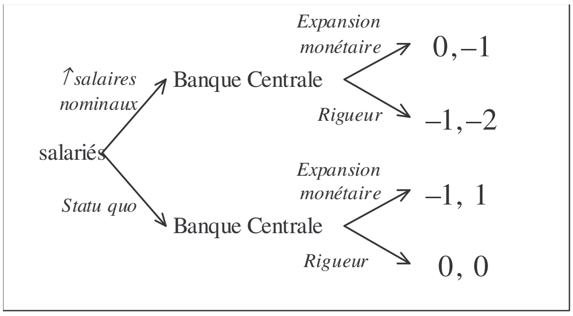
16- CREDIBILITE DE LA POLITIQUE MONETAIRE : Suite à la hausse des prix du pétrole, la banque centrale annonce une politique monétaire rigoureuse afin de contenir les anticipations d'inflation des salariés et d'enrayer la boucle prix–salaires. Les gains des salariés dépendent du pouvoir d'achat et du niveau d'emploi, les gains de la banque centrale dépendent de l'inflation et du chômage. Ils sont résumés sur les schémas suivants. Dans chacun de ces jeux,

(1) donnez la représentation sous forme normale

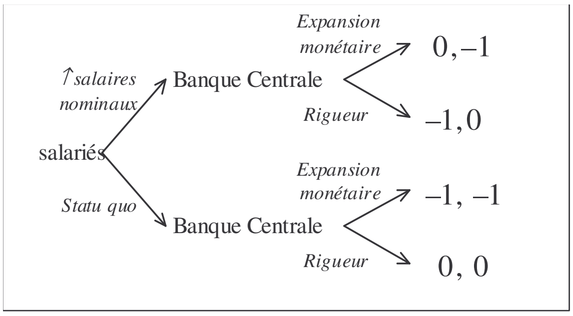
(2) déterminez les équilibres de Nash

(3) déterminez les équilibres de Nash parfaits en sous-jeux. L'annonce de la rigueur monétaire est-elle crédible ?

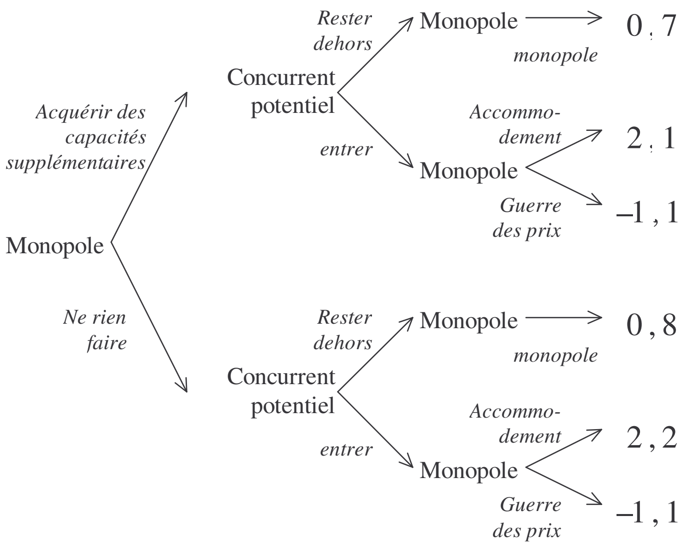
(1) Priorité à la lutte contre le chômage



(2)Priorité à la lutte contre l'inflation



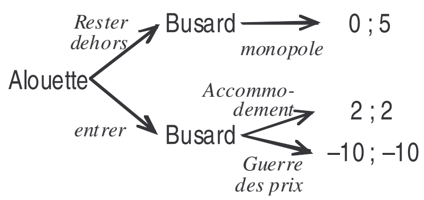
17- Quel sont les équilibres de Nash et les équilibres de Nash parfait en sous-jeux du jeu suivant :



18- Le jeu statique à information complète suivant résume la problématique de l'entente dans le duopole. Déterminez l'unique équilibre de Nash du jeu d'étape. Montrez que le jeu répété indéfiniment admet au moins équilibre dans lequel les firmes choisissent une stratégie conditionnelle (*trigger strategy*) qui les amène à entreprendre l'action « pacifique » à chaque étape (le taux d'actualisation est de 10%).

		Firme 2	
		agressive	pacifique
Firme 1	agressive	10 ; 10	27 ; 0
	pacifique	0 ; 27	18 ; 18

19- On suppose que le jeu d'étape suivant (jeu de dissuasion d'entrée) est répété indéfiniment. Le taux d'intérêt est le même pour les deux joueurs et vaut 2%.



Déterminez l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux du jeu d'étape. En analysant le jeu répété, déterminez si la société Busard, firme en place sur le marché, peut dissuader Alouette d'entrer sur son marché.

20- Considérons la problématique du crédit bancaire sous l'angle de la théorie des jeux. Une banque doit décider d'accorder ou de refuser un crédit, et le client doit décider de le rembourser ou de faire défaut. Les gains des deux joueurs, résumés par le tableau suivant, sont connaissance commune :

		banque	
		Accorder	Refuser
client	Rembourser	1 ; 1	-1 ; 0
	Faire défaut	2 ; -1	0 ; 0

Discutez l'ordre de préférence de chaque joueur sur les issues du jeu qui résulte de ce tableau. Déterminez les équilibres de Nash du jeu statique à information complète, puis les équilibres de Nash parfaits en sous-jeux du jeu dynamique en considérant d'abord que la banque joue en premier, puis que le client joue en premier. Commentez (en particulier, discutez de la crédibilité des annonces ou menaces que les joueurs peuvent faire dans le jeu dynamique).

21- Deux banques, la « Banque du Nord » (B) et le « Crédit Méridional » (C), proposent des conventions de compte aux déposants. La rémunération du compte de dépôts est un élément déterminant du comportement des déposants. Toutefois, ceux-ci valorisent aussi les autres termes de la convention. Ainsi, les conventions peuvent être considérées comme des produits différenciés. On évalue la « quantité » de conventions vendues par le montant des dépôts qui en résulte. Les fonctions de demande de conventions sont données par :
$D_B(P_B, P_C) = 30 - 3P_B + P_C$ et $D_C(P_B, P_C) = 30 - 3P_C + P_B$
où on note P_B et P_C les prix respectifs des conventions offertes par la « Banque du Nord » (B) et le « Crédit Méridional » (C). On peut considérer que le prix de la convention est inversement proportionnel au taux d'intérêt rémunérant le compte de dépôt : si la « Banque du Nord » propose un prix plus élevé (donc un taux d'intérêt plus bas), $D_B(P_B, P_C)$, la demande de convention qui s'adresse à elle, diminue, tandis que $D_C(P_B, P_C)$, la demande de convention qui s'adresse à son concurrent, augmente. On suppose que dans chaque banque, le coût unitaire des dépôts est, constant, égal à 5. Les profits des banques s'écrit donc : $\pi_B = (P_B - 5).D_B(P_B, P_C)$ pour la « Banque du Nord » et de manière symétrique pour le « Crédit Méridional ».
Déterminez l'équilibre de Nash du jeu statique à information complète, les banques décidant simultanément du prix de leurs conventions de compte, puis l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux du jeu dynamique, en considérant qu'une banque doit fixer le prix de sa convention avant l'autre. Déterminez les profits des banques dans chaque situation. Commentez les résultats obtenus (NB : la question de savoir si les banque « jouent » simultanément ou séquentiellement se pose lorsque les conditions de coût ou de demande changent, par exemple si le coût des dépôts, lié au coût de refinancement des banques, augmente).

22- Soient deux pays identiques, chacun ayant un gouvernement, qui choisit un droit de douane, et une entreprise qui produit et vend sur le marché national et à l'exportation. Dans le pays i, le prix est déterminé par $P_i = a - Q_i$ avec $Q_i = y_i + x_k$; y_i est la production de la firme locale vendue en i, x_k l'exportation de la firme étrangère. Le coût de production de la firme du pays i est : $C_i(y_i, x_i) = c.(y_i + x_i)$. La chronologie du jeu est :
(1) le gouvernement choisit le droit de douane qui est prélevé sur les importations ;
(2) les firmes décident simultanément des ventes locales et à l'exportation ;
(3) les paiements sont :
- les profits des entreprises : $\pi_i = P_i y_i + (P_j - t_j)x_i - c(y_i + x_i)$
- le surplus national pour les gouvernements : $½ Q_i^2 + \pi_i + t_i x_j$.

Montrer que le résultat parfait en sous-jeu donne :
$t_1 = t_2 = (a - c)/3$; $y_1 = y_2 = 4(a - c)/9$; $x_1 = x_2 = (a - c)/9$.
Montrer que le surplus total (somme des surplus nationaux) est maximum pour :
$t_1 = t_2 = 0$. Commentez…

23- Deux épargnants déposent chacun D à la banque. La banque prête à une entreprise pour 2 périodes. Si elle est forcée de liquider prématurément (période 1), elle recouvre 2r, avec D > r > D/2. Si elle laisse l'entreprise continuer son projet, elle récupère 2R, avec R>D. Les déposants peuvent retirer à la fin de la première période ou à la fin de la deuxième période (on néglige l'actualisation).

En fin de période 1, si les deux déposants retirent, ils reçoivent chacun r et le jeu s'arrête ; si l'un des deux retire, il reçoit D, et la banque verse 2r – D à l'autre et le jeu s'arrête ; si aucun ne retire, le jeu continue.

En fin de période 2, si les deux déposants retirent, ils reçoivent chacun R ; si l'un des deux retire, il reçoit 2R – D, la banque liquide le projet et verse D à l'autre ; si aucun ne retire, la banque verse d'office R a chacun, et le jeu s'arrête.

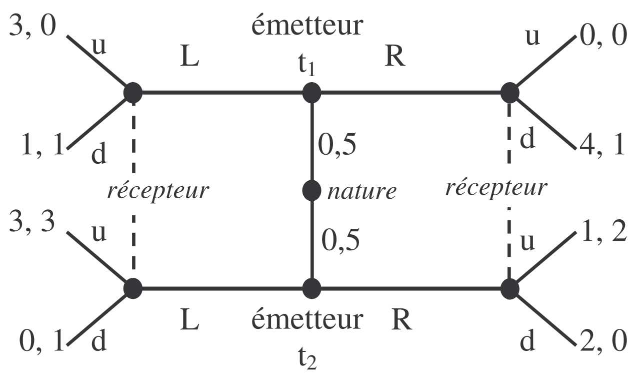
Montrer que le jeu a deux équilibres de Nash parfaits en sous-jeux, qui conduisent les déposants à retirer tous les deux en première période (« ruée ») ou à retirer tous les deux en deuxième période. (cf. Diamond & Dybvig 1983 : les ruées bancaires peuvent être des phénomènes d'équilibre)

24- Déterminez l'équilibre de Nash bayésien d'un duopole dans lequel les coûts unitaires de production des firmes sont constants et égaux à : c pour la firme 1, c_H, avec proba p et c_B avec proba $1 - p$ pour la firme 2 ($c_H > c_B$). Les firmes 1 et 2 choisissent *simultanément* les quantités produites et vendues, q_1 et q_2, de façon à maximiser leur profit espéré, et sachant que le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1 + q_2$ (on supposera a suffisamment grand). On suppose qu'il est de connaissance commune que la firme 1 connaît son coût unitaire, mais pas celui de la firme 2, et que la firme 2 connaît son coût unitaire et celui de la firme 1.

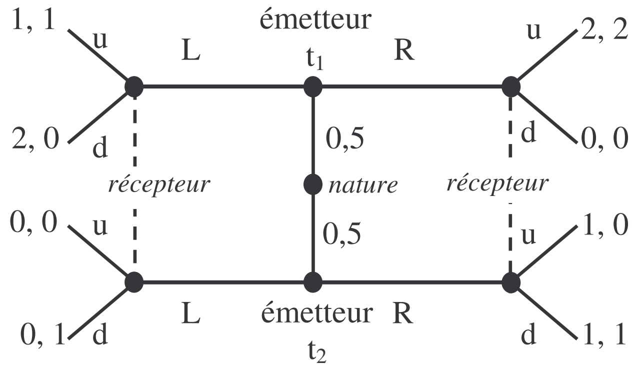
25- On considère une enchère au premier prix sous pli cacheté, dans laquelle les valorisations des deux enchérisseurs sont distribuées indépendamment et uniformément sur [0, 1]. Formulez l'enchère comme un jeu bayésien statique en indiquant les joueurs, espaces d'actions, espaces de types, croyances, et paiements. Montrez que la stratégie consistant, pour chaque acheteur, à enchérir la moitié de sa valorisation constitue une stratégie d'équilibre de Nash bayésien de ce jeu. Montrez que si l'enchère était au deuxième prix sous pli cacheté, la stratégie consistant, pour chaque acheteur, à enchérir sa valorisation constituerait une stratégie d'équilibre de Nash bayésien du jeu.

26- On considère une enchère au premier prix sous pli cacheté, dans laquelle les valorisations des acheteurs sont distribuées indépendamment et uniformément sur [0, 1]. Montrez qu'en présence de n acheteurs, la stratégie consistant, pour chaque acheteur, à enchérir $(n-1)/n$ fois sa valorisation constitue un équilibre de Nash bayésien de cette enchère.

27- Décrire tous les équilibres bayésiens parfaits en stratégies pures mélangeants et séparateurs du jeu de signaux suivant :



28- Décrire tous les équilibres bayésiens parfaits en stratégies pures mélangeants et séparateurs du jeu de signaux suivant :



29- Dans leur article de 1984, qui a donné naissance à la théorie de la « hiérarchie des financements », Myers et Majluf étudient le scénario suivant. Une firme dispose d'une nouvelle opportunité d'investissement, dont la rentabilité dépendra de l'état du marché, bon ou mauvais. Elle doit émettre des actions pour financer ce projet. Un actionnaire potentiel peut acheter les nouvelles actions. L'entreprise a un avantage informationnel : elle connaît l'état du marché (son type) : bon (type 1) ou mauvais (type 2). Les gains des joueurs représentent la valeur de leurs actions (actions existantes pour les anciens actionnaires, c'est-à-dire l'entreprise, nouvelles actions pour le nouvel actionnaire potentiel). Le scénario peut être présenté sous la forme d'un jeu de signaux entre l'entreprise (E) et l'actionnaire potentiel (A).

La nature tire au sort l'état du marché (« bon » ou « mauvais ») de manière équiprobable. L'entreprise (E) peut décider d'émettre des actions et investir (« émet ») ou ne rien faire (« rien »). L'actionnaire potentiel (A) peut décider de souscrire les actions émises (s) ou de refuser (r). Si l'actionnaire refuse, l'entreprise d'investit pas.

Décrire tous les équilibres bayésiens parfaits en stratégies pures mélangeants et séparateurs de ce jeu de signaux :