3- JEUX STATIQUES A INFORMATION INCOMPLETE

On les appelle aussi **jeux bayésiens statiques**

- Les joueurs choisissent simultanément leurs actions…
- Au moins un joueur ne connaît pas la fonction de paiement d'un autre (information incomplète).

Applications : enchères sous pli cacheté…

La plupart des problématiques à information incomplète renvoient à des contextes dynamiques (communiquer une information privée, répondre à un signal)

Plan du chapitre :

1- Représentation d'un jeu bayésien statique
2- Equilibre de Nash Bayésien
3- Applications

1- Représentation d'un jeu bayésien statique

1.1- Définition

La représentation sous forme normale d'un jeu bayésien spécifie :

(1) les joueurs ;
(2) les espaces d'actions (décisions possibles pour chaque joueur) ;
(3) les espaces de types ;
(4) les croyances des joueurs (probabilités attribuées aux types des autres) ;
(5) les paiements reçus par chaque joueur en fonction des combinaisons d'actions (le paiement d'un joueur dépend de son type)

$G = \{A_1,\ldots A_n ; T_1,\ldots T_n ; p_1,\ldots p_n ; u_1,\ldots u_n\}$

1.2- Transformation d'Harsanyi (1967) :

Le jeu à information incomplète est transformé en jeu à information imparfaite.

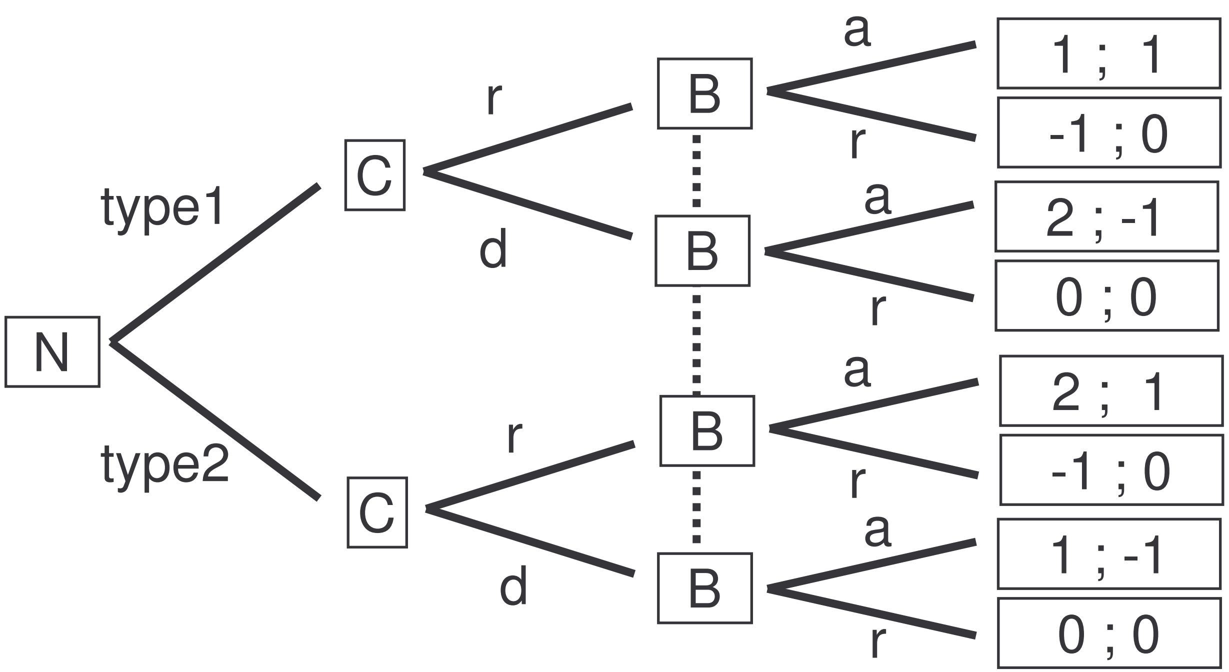
(1) la nature tire un « vecteur » de types $t = (t_1,\dots t_n)$;
(2) la nature révèle son type à chaque joueur, mais pas aux autres ;
(3) les joueurs jouent simultanément une action ai ;
(4) les joueurs reçoivent leur paiement $u_i(a_1, \dots a_n \,;\, t_i)$.

→ Information imparfaite : l'histoire du jeu n'est pas parfaitement connue (le coup joué par la nature n'est pas connu de tous)

Exemple : Jeu du crédit bancaire avec 2 types de clients

Client 1	banque : Accorder	banque : Refuser
Rembourser	1 ; 1	-1 ; 0
Faire défaut	2 ; -1	0 ; 0

Client 2	banque : Accorder	banque : Refuser
Rembourser	2 ; 1	-1 ; 0
Faire défaut	1 ; -1	0 ; 0



NB :

- l'information peut être asymétrique (un joueur peut connaître les types des autres, en plus du sien) → $u_i(a_1, \ldots a_n ; t_1, \ldots t_n)$

- la distribution *a priori* des probabilités des types est supposée être connaissance commune ; les croyances sont calculées en utilisant la règle de Bayes :

La règle de Bayes :

A et B étant deux événements aléatoires, la règle de Bayes précise le calcul des probabilités conditionnelles. Elle est obtenue en partant de :
P(A|B) P(B) = P(A & B) = P(B|A) P(A)

$$\boxed{P(A|B) = P(B|A)\ P(A) \,/\, P(B)}$$

P(A) est la probabilité *a priori* de A, aussi appelée la probabilité marginale de A.
P(A|B) est appelée la probabilité *a posteriori* de A sachant B
P(B|A), pour un B connu, est appelée la fonction de vraisemblance de A.
P(B) est appelé la probabilité marginale ou a priori de B.

Si on note A' le complémentaire de A : P(A') = 1 – P(A)
On a : P(B) = P(A & B) + P(A' & B) = P(B|A) P(A) + P(B|A') P(A')
On peut réécrire:

$$\boxed{P(A|B) = P(B|A)\ P(A) \,/\, [P(B|A)\ P(A) + P(B|A')\ P(A')]}$$

→ la règle de Bayes indique comment réviser la probabilité *a priori* de A, après observation de l'événement B.

Exemple : 2 types possibles :

A = « Léon est de type 1 » ; A' = « Léon est de type 2 »
B = « Charles est de type 1 » ; B' = « Charles est de type 2 »

Avant le jeu Charles connaît la probabilité a priori P(A).
Après que la nature lui a révélé sont type, Charles révise la probabilité que Léon est de type 1 :

$$P(A|B) = P(B|A)\ P(A) / [P(B|A)\ P(A) + P(B|A')\ P(A')]$$

Exemple :

2 types possibles : A = « Léon est de type 1 » ; A' = « Léon est de type 2 »
2 actions possibles : B = « Léon a joué B » ; B' = « Léon a joué H »

Avant le jeu Charles connaît la probabilité a priori P(A).
A l'issue du jeu, Charles connaît l'action choisie par Léon

La probabilité a posteriori que Léon est de type 1 se révise :

$$P(A|B) = P(B|A)\ P(A) / [P(B|A)\ P(A) + P(B|A')\ P(A')]$$

Exemple :

Le gourou annonce que le CAC40 va monter. Votre banquier dit que le CAC40 va baisser. Le CAC40 a monté dans 60% des cas, baissé dans 40% des cas, par le passé. Le gourou s'est trompé dans 25% des cas, votre banquier dans 30% des cas. Qui croire ?

A = « le gourou dit que le CAC40 va monter » ; B = « le banquier dit… monter »
A' = « le gourou dit que le CAC40 va baisser » ; B' = « le banquier dit… baisser »
C = « le CAC40 a monté » ; C' = « le CAC40 a baissé »

On a donc : $P(C) = 60\%$; $P(A|C) = P(A'|C') = 75\%$; $P(A|C') = P(A'|C) = 25\%$
$P(B|C) = P(B'|C') = 70\%$; $P(B|C') = P(B'|C) = 30\%$

Règle de Bayes : $P(C|A) = P(A|C)P(C)/P(A)$ où $P(A) = P(A|C)P(C) + P(A|C')P(C')$
soit : $P(A) = 55\%$ et $P(C|A) = 81{,}82\%$ et $P(C'|A) = 18{,}18\%$

De même : $P(B') = 46\%$ et $P(C'|B') = 60{,}87\%$ et $P(C|B') = 39{,}13\%$.

Conclusion : mieux vaut croire le… gourou !

2- Equilibre de Nash Bayésien :

2.1- Stratégie dans un jeu bayésien statique

Dans le jeu bayésien statique $G = \{A_1, \ldots A_n ; T_1, \ldots T_n ; p_1, \ldots p_n ; u_1, \ldots u_n\}$, une <u>stratégie</u> du joueur i est une fonction $s_i(t_i)$ qui spécifie une action de A_i que le joueur jouerait si la nature lui donnait le type t_i.

→ stratégie contingente au type

une stratégie est « séparante » ou « discriminante » si elle attribue une action différente à chaque type du joueur.

une stratégie est « mélangeante » ou « agrégeante » si elle attribue la même action à tous le types du joueur.

(distinction utile pour les jeux dynamiques à information incomplète).

2.2- Equilibre de Nash du jeu bayésien statique

Un équilibre de Nash Bayésien est un équilibre de Nash du jeu bayésien, une issue du jeu telle la stratégie (contingente au type) de chaque joueur est une meilleure réponse aux stratégies des autres.

3- Applications :

3.1- Duopole de Cournot avec information asymétrique.

Duopole

- coût unitaire de production firme 1 : c,
- coût unitaire de production firme 2 : c_H, avec proba p et c_B avec proba $1 - p$.

($c_H > c_B$)

Le prix de demande est $P(Q) = a - Q$ où $Q = q_1 + q_2$.

Les firmes 1 et 2 choisissent *simultanément* les quantités, q_1 et q_2, de façon à maximiser leur profit (espéré).

Connaissance commune :

- La firme 1 connaît son coût unitaire, mais pas celui de la firme 2.
- La firme 2 connaît son coût unitaire et celui de la firme 1.

→ stratégie de la firme 1 : une quantité q_1 (un seul « type », c)
→ stratégie de la firme 2 est : quantité en fonction du « type » (c_H ou c_B), q_{2H}, q_{2B}.

La firme 1 a une seule fonction de paiement (un seul type) :

$\Pi(q_1, q_2 ; c) = [(a - q_1 - q_2) - c]\, q_1$

Mais ce profit peut s'écrire :

soit : $\Pi(q_1, q_2 ; c) = [(a - q_1 - q_{2H}) - c]\, q_1$ avec probabilité p

soit : $\Pi(q_1, q_2 ; c) = [(a - q_1 - q_{2B}) - c]\, q_1$ avec probabilité $1 - p$

Le profit espéré vaut donc :

$E\Pi(q_1, q_{2H}, q_{2H} ; c) = p\, [(a - q_1 - q_{2H}) - c]\, q_1 + (1 - p)\, [(a - q_1 - q_{2B}) - c]\, q_1$

La meilleure réponse de la firme 1 est donc :

$q_1 = \frac{1}{2}\, [p\, (a - q_{2H} - c) + (1 - p)\, (a - q_{2B} - c)]$

La firme 2 a deux fonctions de paiement possibles (deux types) :

$\Pi(q_1, q_2 ; c_H) = [(a - q_1 - q_2) - c_H]\, q_2$
$\Pi(q_1, q_2 ; c_B) = [(a - q_1 - q_2) - c_B]\, q_2$

La meilleure réponse de la firme 2 de type *t* est donc :

$q_{2t} = ½\,(a - q_1 - c_t)$

L'équilibre de Nash Bayésien du jeu est trouvé en résolvant les 3 équations :

$q_1 = ½\,[p\,(a - q_{2H} - c) + (1 - p)\,(a - q_{2B} - c)]$
$q_{2H} = ½\,(a - q_1 - c_H)$
$q_{2B} = ½\,(a - q_1 - c_B)$

On obtient :

$q_1^* = \ldots$; $q_{2H}^* = \ldots$; $q_{2B}^* = \ldots$

q_1^* est la stratégie d'équilibre de la firme 1 ;
$\{q_{2H}^* ; q_{2B}^*\}$ est la stratégie d'équilibre de la firme 2.

3.2- Vente aux enchères :

Enchères au premier prix sous pli cacheté.

Deux enchérisseurs ($i = 1,2$)
Chacun valorise le bien à un niveau v_i.
→ le « paiement » est $v_i - p$ si le bien est acquis au prix p
Les v_i sont distribués uniformément sur [0 ; 1]

Les enchérisseurs sont neutres au risque, ils soumettent simultanément leurs enchères, qui doivent être positives, l'enchère la plus élevée l'emporte, il y a tirage au sort en cas d'égalité. Tout ceci est connaissance commune.

Formulation comme jeu bayésien statique :

(1) joueurs : les enchérisseurs
(2) espaces d'actions : actions ↔ enchères b_i → $A_i = [0 ; +\infty)$
(3) espaces de types : type ↔ valorisations v_i → $T_i = [0 ; 1]$
(4) croyance de i : v_j distribué uniformément sur [0 ; 1] indépendamment de v_i.
(5) les paiements :

$$u_i(b_1, b_2 ; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ (v_i - b_i)/2 & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

→ Espérance mathématique du paiement : $(v_i - b_i).P(b_i > b_j) + ½\,(v_i - b_i).P(b_i = b_j)$

Détermination des stratégies des joueurs : $b_i(v_i)$

Equilibre de Nash bayésien :

Chaque b_i maximise : $(v_i - b_i).P[b_i > b_j(v_j)] + ½\,(v_i - b_i).P[b_i = b_j(v_j)]$

Pour simplifier, on cherche des stratégies d'équilibres linéaires : $b_i(v_i) = a_i + c_i.v_i$

Si l'enchérisseur j adopte la stratégie $b_j(v_j) = a_j + c_j.v_j$ alors, pour v_i donné, la meilleure réponse du joueur maximise :

$(v_i - b_i).P[b_i > a_j + c_j.v_j]$ NB : $P[b_i = a_j + c_j.v_j] = 0$

$$\begin{cases} v_j \sim U[0\ ;\ 1] \\ a_j + c_j \geq b_i \geq a_j \end{cases} \Rightarrow \quad P[b_i > a_j + c_j.v_j] = P[v_j < (b_i - a_j)/ c_j] = (b_i - a_j)/ c_j$$

$$\max_{b_i} (v_i - b_i).(b_i - a_j)/c_j \quad \text{s.c. } b_i \geq a_j \qquad \Rightarrow b_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(v_i + a_j) & \text{si } v_i \geq a_j \text{ (solution intérieure)} \\ v_i & \text{si } v_i < a_j \text{ (solution en coin)} \end{cases}$$

Un équilibre avec des stratégies linéaires impose $a_j = 0$, donc : $b_i = ½ (v_i + a_j)$
soit : $a_i = ½\, a_j = 0$ et $c_i = ½$

Chaque enchérisseur enchérit la moitié de sa valorisation : $b_i^* = ½\, v_i$.

Enchères au deuxième prix sous pli cacheté (enchères de Vickrey, prix Nobel 1996)

Le vainqueur est celui qui propose l'enchère la plus élevée. Il paie le prix offert par le deuxième meilleur enchérisseur.

→ ce mécanisme conduit les enchérisseur à offre un prix égal à leur valorisation.

→ Recherches sur la « conception de mécanismes » (*mechanism design*) :

Comment inciter des individus à révéler (leur information sur) leurs préférences ?

Principe de révélation de Myerson (1979) → tout équilibre de Nash Bayésien de tout jeu bayésien peut être « représenté par » un mécanisme direct (un jeu dans lequel la seule action d'un joueur consiste à annoncer un « type ») dans lequel dire la vérité est un équilibre de Nash Bayésien.

→ utile pour concevoir des mécanismes d'enchères…