2- JEUX DYNAMIQUES A INFORMATION COMPLETE

Les joueurs choisissent séquentiellement leurs actions (→ maximiser le paiement), puis reçoivent leurs gains, qui dépendent des actions jouées.

Problématique centrale des jeux dynamiques → la crédibilité

Résoudre le jeu en éliminant les menaces non crédibles
→ affiner le concept d'équilibre de Nash
→ équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

Plan du chapitre :

1- Représentation sous forme extensive :
2- Résolution du jeu : → équilibre de Nash parfait en sous-jeux
3- Applications
4- Jeu dynamique à information complète mais imparfaite
5- Jeux répétés

1- Représentation sous forme extensive :

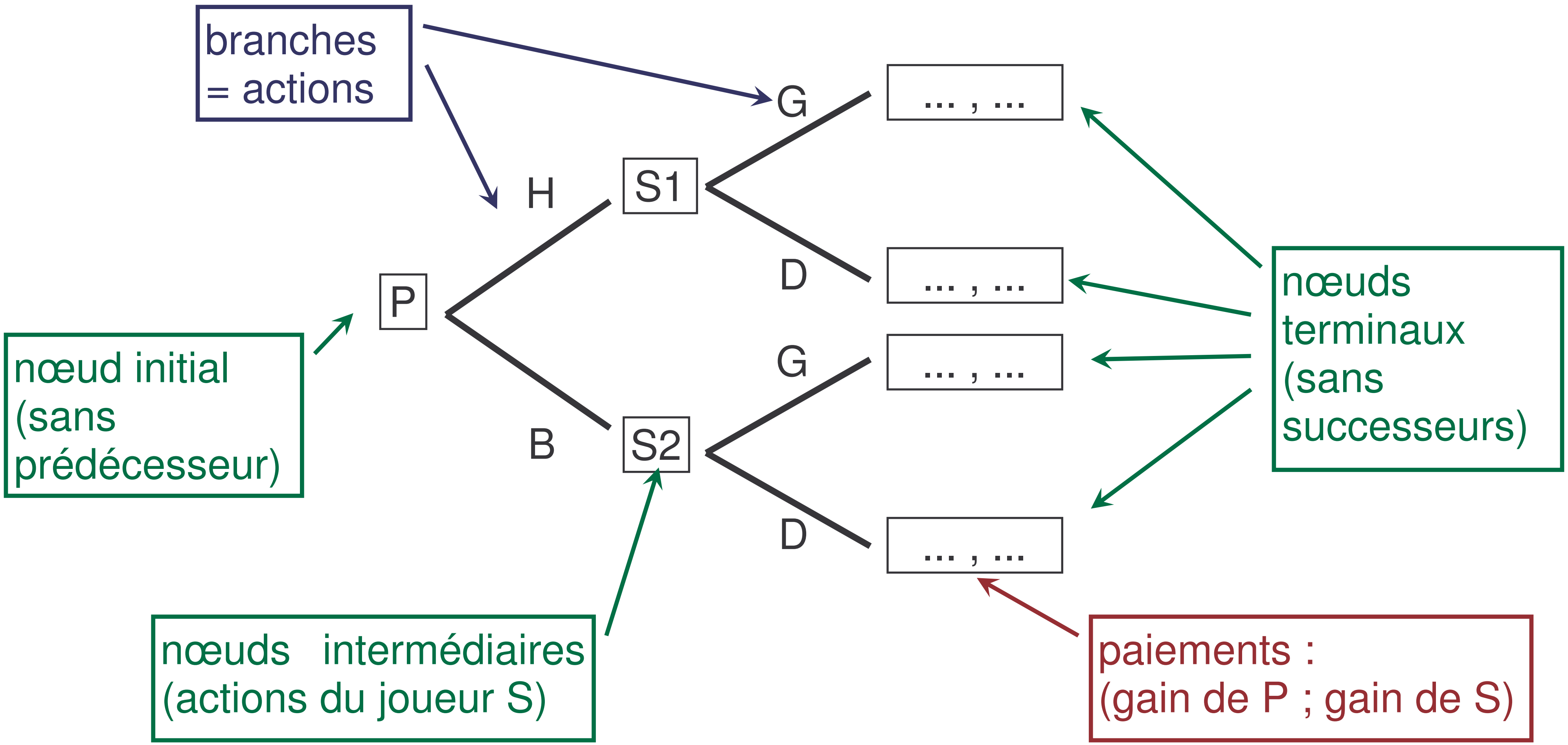
1.1- Définition

La représentation sous forme extensive d'un jeu spécifie :

(1) les joueurs ;
(2) l'ordre des décisions,
(3) l'information dont dispose chaque joueur au moment de jouer ;
(4) les décisions possibles pour chaque joueur,
(5) les paiements reçus par chaque joueur en fonction des combinaisons de décisions possibles

Exemple : P joue en premier, il peut choisir H ou B ; S observe le choix de P et joue, G ou D ; le jeu s'arrêt et les joueurs reçoivent leurs paiements.

→ arbre du jeu :


branches
= actions
G
… , …
H
S1
D
… , …
P
nœuds
terminaux
(sans
successeurs)
nœud initial
(sans
prédécesseur)
G
… , …
B
S2
D
… , …
nœuds intermédiaires
(actions du joueur S)
paiements :
(gain de P ; gain de S)

1.2- La forme extensive permet de préciser les types d'information :

ensemble d'information d'un joueur : en tout point du jeu, c'est l'ensemble des nœuds de l'arbre du jeu où le joueur *sait qu'il peut* se situer.

information parfaite : en tout point du jeu, l'ensemble d'information de chaque ne contient qu'un seul nœud (chaque joueur connait exactement sa position, donc le chemin ou l'histoire du jeu, au moment de prendre toute décision)

information complète : les fonctions de paiements sont connues de tous.

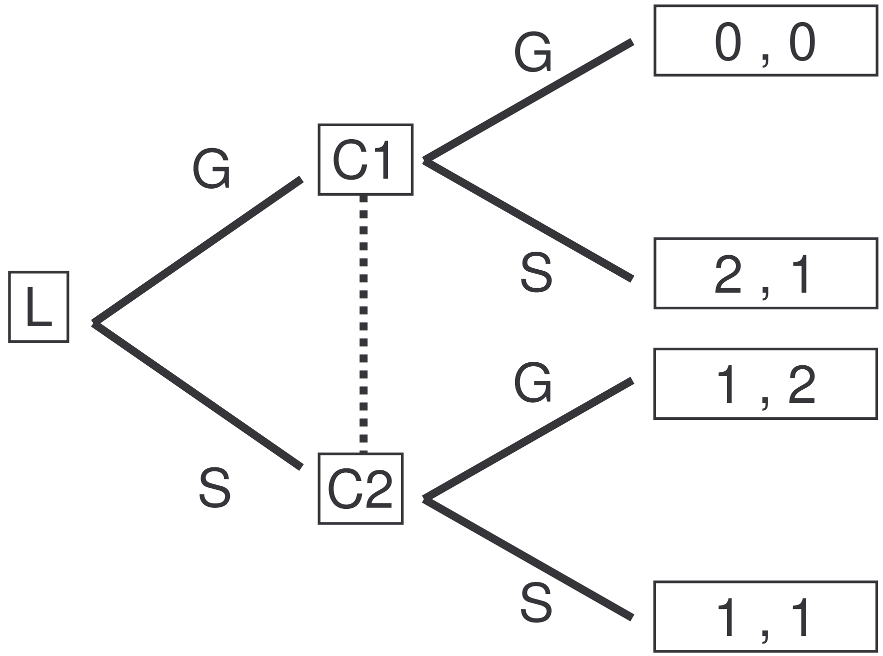
Harsanyi (1967) a montré qu'on peut transformer un jeu à information incomplète en jeu à information complète mais imparfaite :

- introduire plusieurs « types » du joueur dont les paiements ne sont pas connus (le paiement de chaque type est connu → l'information est complète) ;
- introduire la « nature » comme pseudo-joueur, qui tire au sort le type du joueur ;
- l'information est imparfaite (le joueur connait son type, mais pas les autres, qui ne savent donc nécessairement pas à quel nœud du jeu ils se situent).

1.3- Représentation sous forme extensive d'un jeu statique :

Exemple : jeu n°5 (jeu du croisement) :

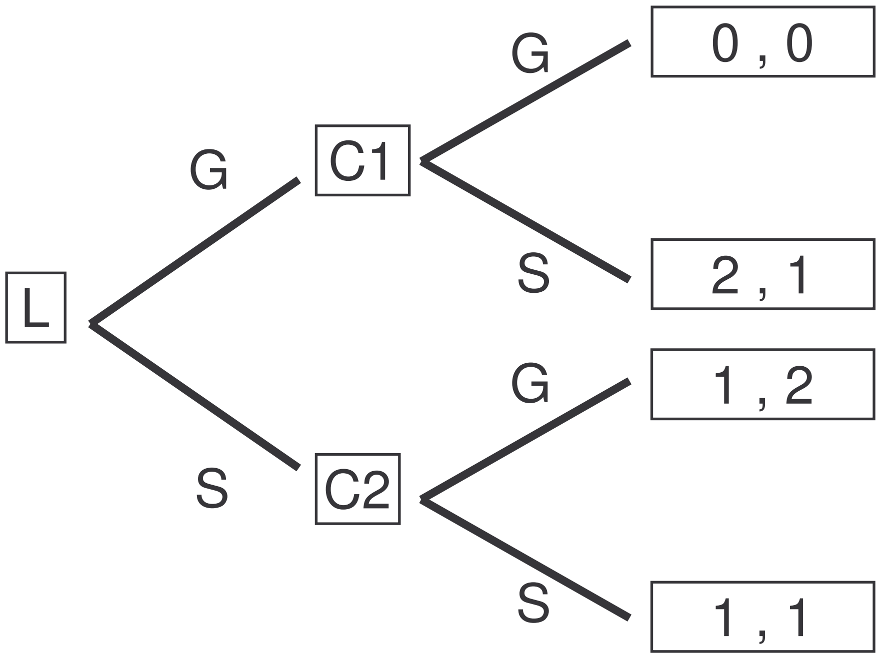
		Car	
		Stop	Go
Lorry	Stop	1 ; 1	1 ; 2
	Go	2 ; 1	0 ; 0



L'ensemble d'information de C contient deux nœuds :
→ l'information est imparfaite.

1.4- Représentation sous forme normale d'un jeu dynamique :

Exemple : jeu du croisement séquentiel :



		Car			
		G si G G si S	G si G S si S	S si G G si S	S si G S si S
Lorry	G	0 ; 0	0 ; 0	2 ; 1	2 ; 1
	S	1 ; 2	1 ; 1	1 ; 2	1 ; 1

NB : Une stratégie est un plan d'action, ou action contingente, qui précise l'action qu'un joueur choisit dans chaque situation possible.

→ ici, deux « situations » sont possibles pour C (deux nœuds) ⇒ une stratégie précise ce que C ferait à chaque nœud.

2- Résolution du jeu :

2.1- Equilibres de Nash du jeu séquentiel et menaces non crédibles

		Car			
		GG	GS	SG	SS
Lorry	G	0 ; 0	0 ; 0	2 ; 1	2 ; 1
	S	1 ; 2	1 ; 1	1 ; 2	1 ; 1

Trois équilibres de Nash : {S, GG}, {G, SG} et {G, SS}

Deux de ces équilibres comportent une « menace » (ou annonce) non crédible (que C n'aurait pas intérêt à mettre en œuvre le cas échéant) :

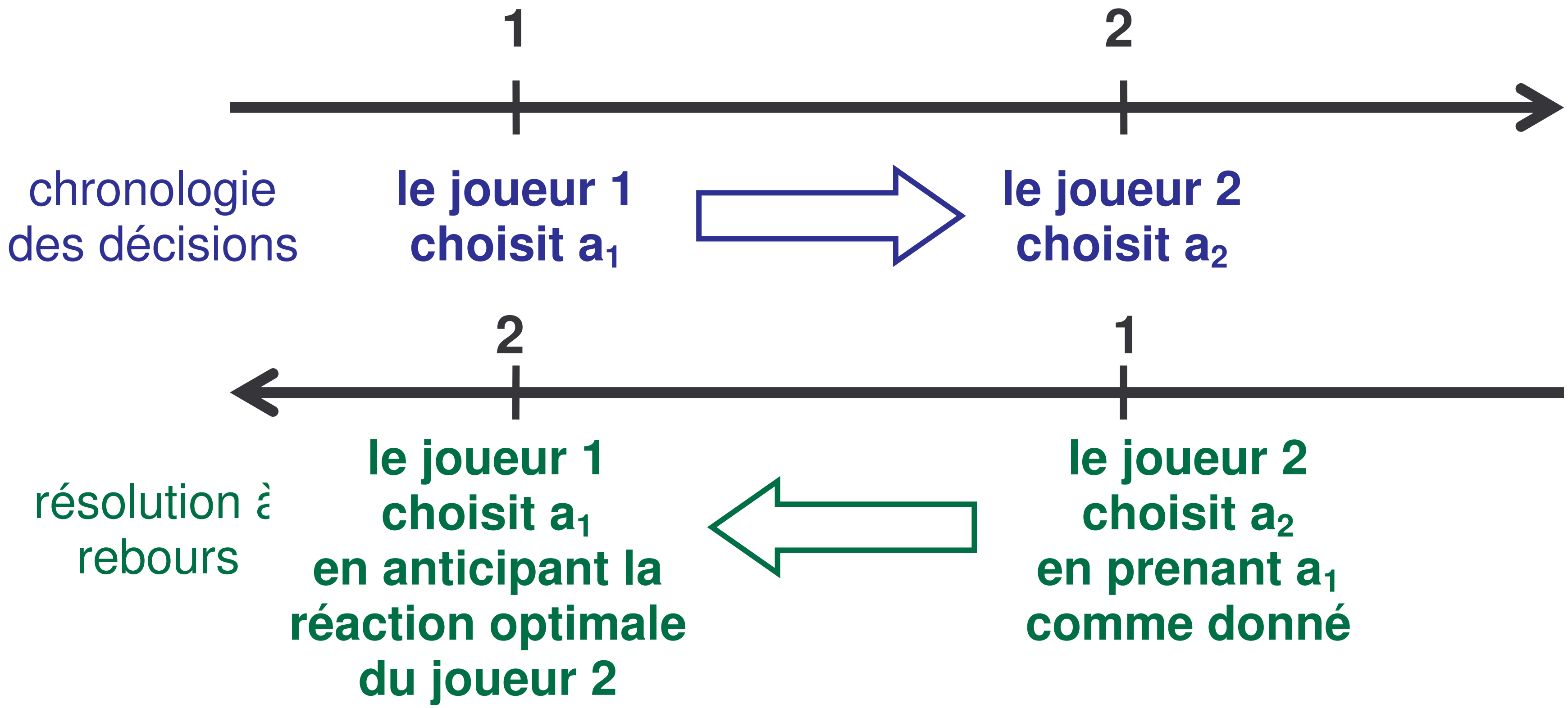
{G, SS} → la stratégie de C revient à annoncer « jouer Stop si L a joué Stop ».
→ or une fois que L a joué Stop, C a intérêt à jouer Go.

{S, GG} → la stratégie de C revient à annoncer « jouer Go si L a joué Go ».
→ or une fois que L a joué Go, C a intérêt à jouer Stop.

2.2- Algorithme de Kuhn : *backward induction*

« rétroduction », induction à rebours

→ résoudre le jeu à rebours, en commençant par la dernière décision.



Formellement :

(1) trouver la réponse optimale du joueur 2 :

$$\max_{s_2 \in S_2} u_2(s_2 \,;\, s_1) \quad \rightarrow \text{ meilleure réponse de 2 à } s_1 : s_2 = MR_2(s_1)$$

s_1 donné

(2) déterminer l'action optimale du joueur 1 :

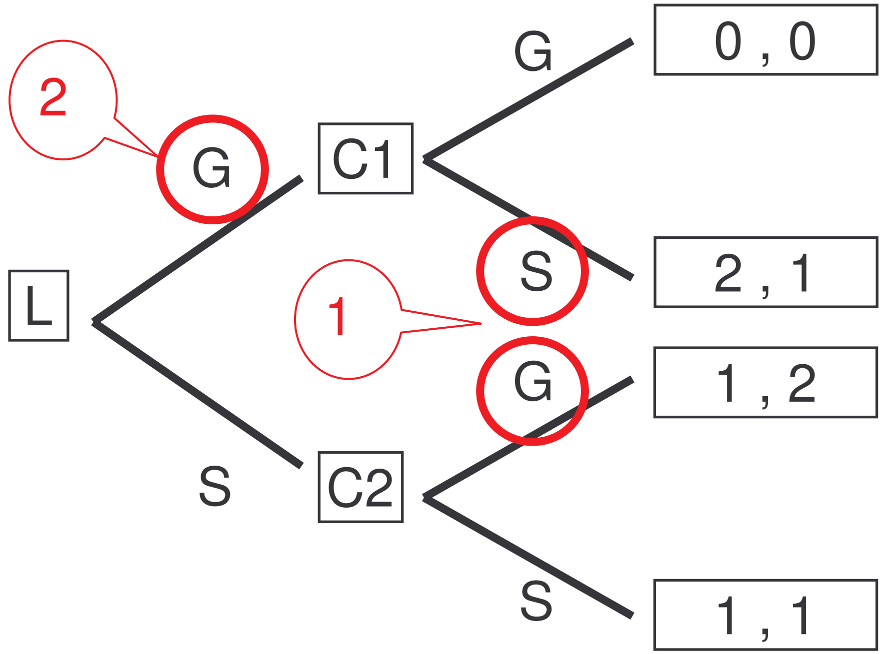
$$\max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1 \,;\, s_2)$$

$s_2 = MR_2(s_1)$

Ainsi :

- le joueur 1 anticipe la réaction optimale du joueur 2
- le joueur 1 élimine les menaces non crédibles
- le joueur suppose que le joueur 2 est rationnel.

Exemple : jeu du croisement séquentiel :



1- L anticipe que C jouera : « S si G » et « G si S ».
2- L joue donc G

→ résultat de l'algorithme : G – S.

2.3- Equilibre de Nash Parfait en sous-jeux :

2.3.1- Sous-jeu

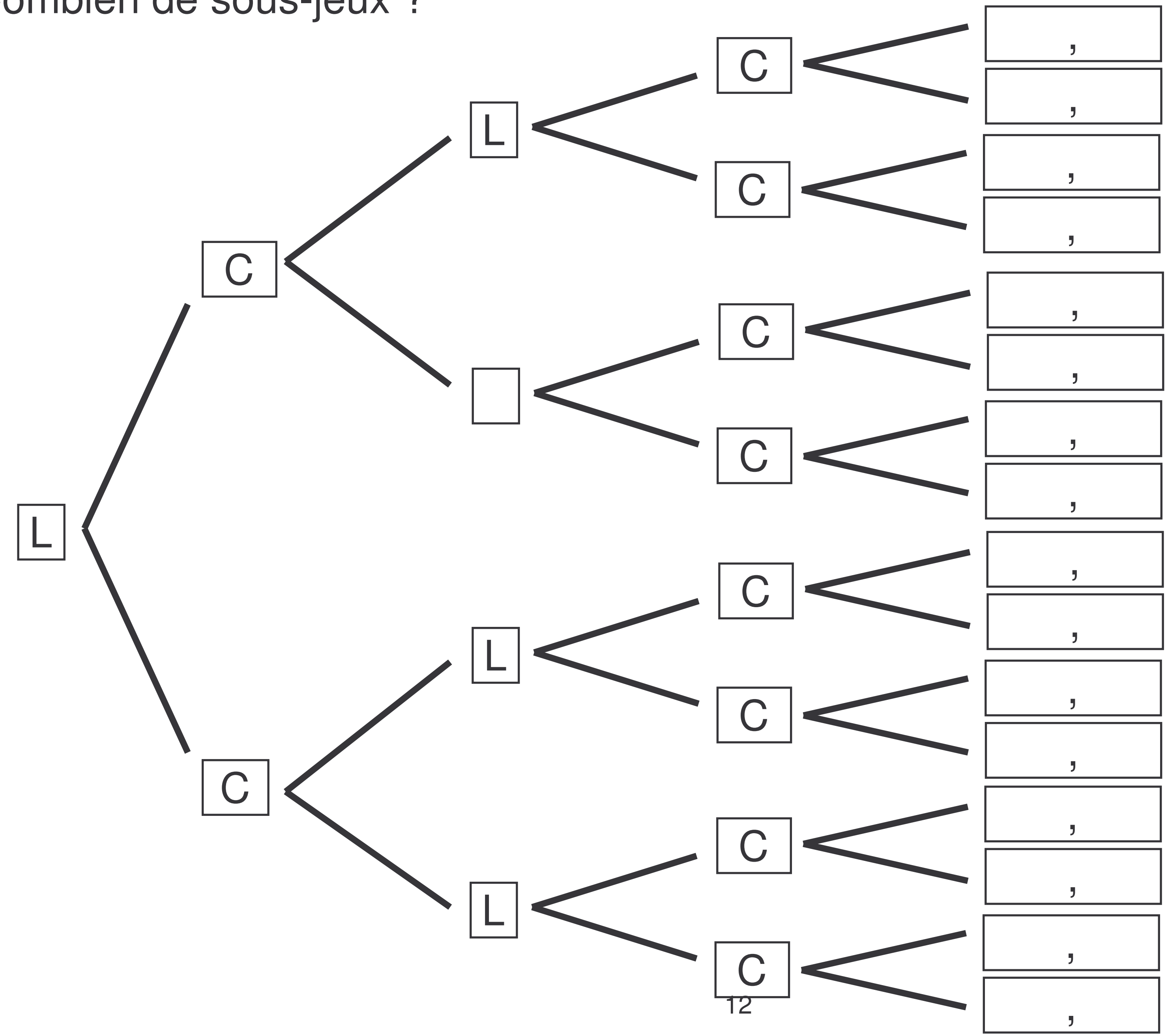
Un <u>sous-jeu</u> d'un jeu sous forme extensive : un jeu issu du jeu original qui

(1) commence en un nœud *n* qui est un ensemble d'information singleton (mais pas le nœud initial) ;
(2) inclut tous les nœuds successeurs de *n* et les nœuds terminaux (et aucun nœud prédécesseur) ;
(3) ne coupe aucun ensemble d'information

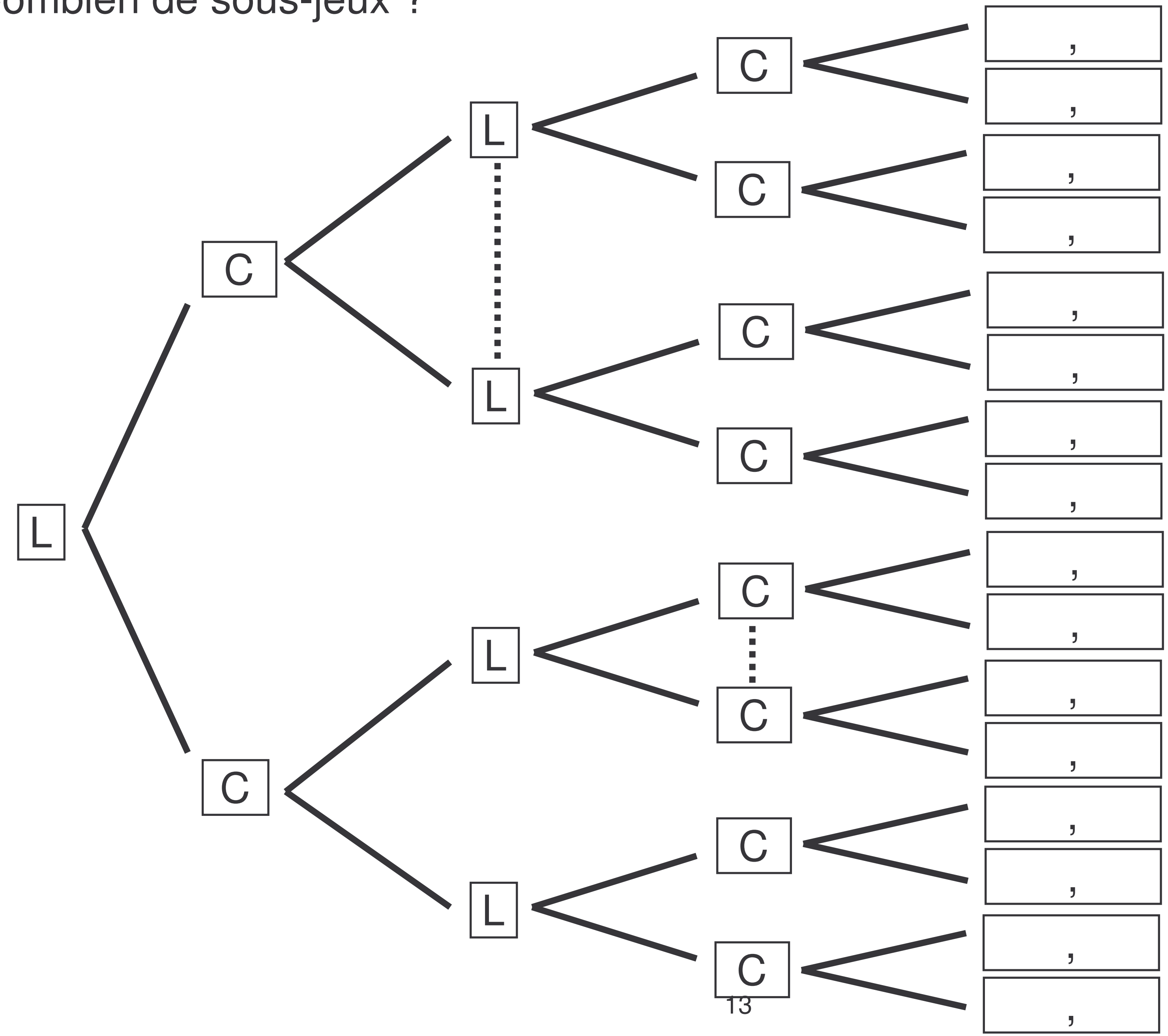
Motivation de (3) :

- pouvoir analyser le sous-jeu de façon autonome
- garantir que l'histoire du jeu est connue de tous jusqu'à *n* (tous les joueurs jouant après *n* savent que le jeu est passé par *n*).

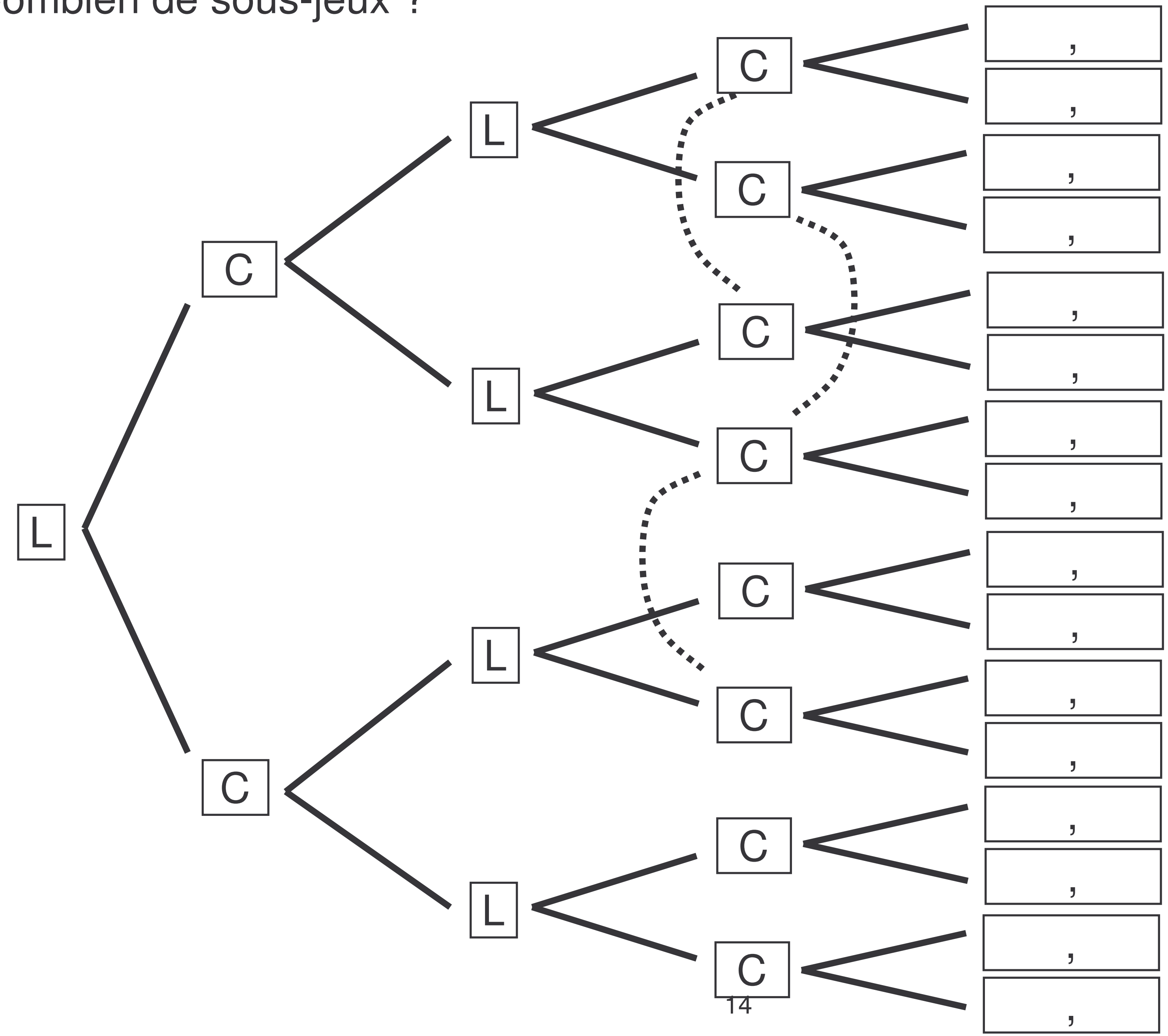
Combien de sous-jeux ?



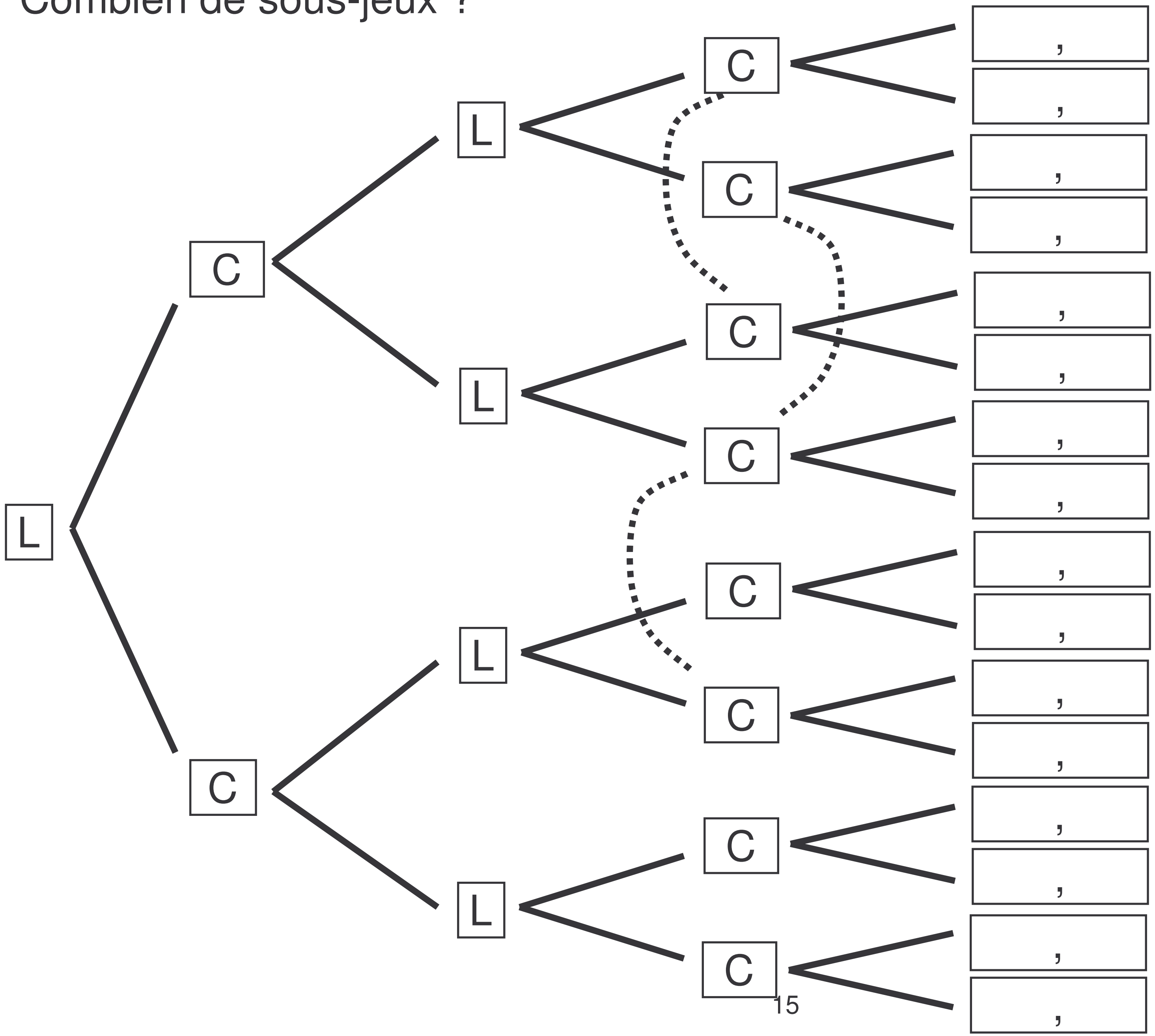
Combien de sous-jeux ?



Combien de sous-jeux ?



Combien de sous-jeux ?



Bizarrerie :
un jeu sans
« mémoire parfaite »
(*perfect recall*)
A son 2ème coup,
C observe
si L a joué H ou B,
mais ne souvient pas
de son propre coup
précédent…

2.3.2- Equilibre de Nash parfait en sous-jeux :

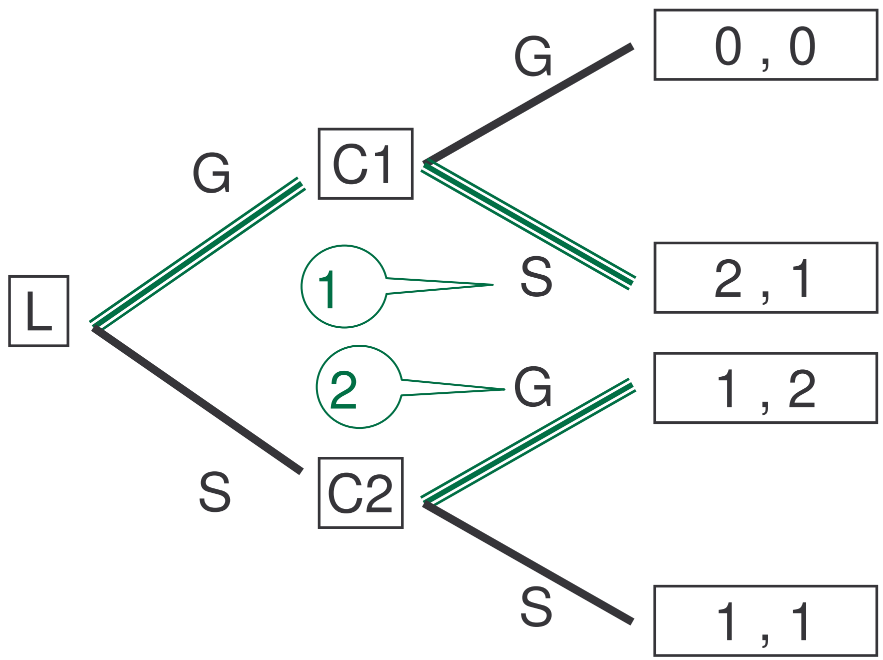
Un équilibre de Nash est parfait en sous-jeux si les stratégies des joueurs constituent un équilibre de Nash de chaque sous-jeu (Selten 1965).

→ les menaces non crédibles sont éliminées

→ l'issue obtenue par induction à rebours coïncide avec l'équilibre de Nash parfait en sous jeux, mais :

- l'issue obtenue par induction à rebours décrit les actions entreprises par les joueurs dans les circonstances qui sont susceptibles de survenir ;
- l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux décrit les actions entreprises par les joueurs dans *toutes* les circonstances

Exemple : jeu du croisement séquentiel :



1- Equilibre de Nash du sous-jeu commençant en C1 : {S}.
2- Equilibre de Nash du sous-jeu commençant en C2 : {G}

→ Equilibre de Nash Parfait en sous-jeu : {G, (S si G ; G si S)}
→ (Rappel) Résultat de l'algorithme d'induction à rebours : G – S.

3- Applications :

3.1- Duopole de Stackelberg :

Déterminez l'équilibre de Nash d'un duopole dans lequel les coûts unitaires de production des firmes sont constants et égaux à c, les firmes 1 et 2 choisissent *séquentiellement* les quantités produites et vendues, q_1 et q_2, de façon à maximiser leur profit, et le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1 + q_2$ (on supposera $a > c$).

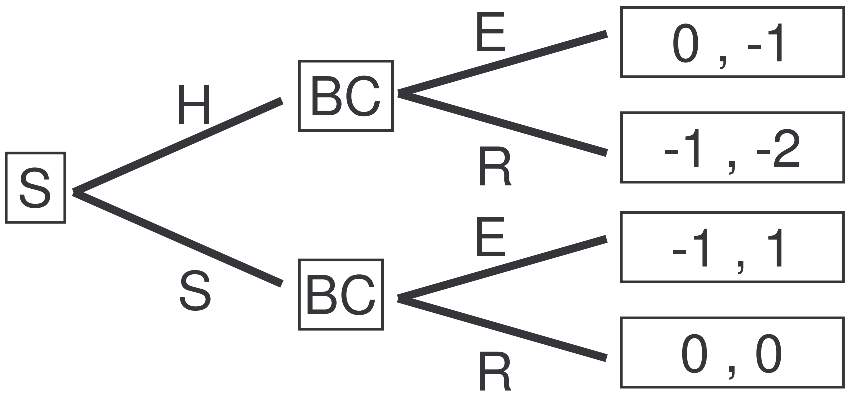
3.2- Négociation salariale

Le syndicat et la direction de l'entreprise négocient les salaires et le niveau d'emploi de la manière suivante (d'après Leontieff, 1946) : (1) le syndicat pose une exigence de salaire, w ; (2) la firme observe (et accepte) w et choisit alors le niveau d'emploi, L ; (3) les gains sont $U(w, L) = (w - a)^s L^{1-s}$ pour le syndicat, où a est le salaire que les membres du syndicat peuvent obtenir dans un emploi alternatif, et le profit $\pi(w, L) = L^{1/2} - w.L$ pour la firme. Déterminez l'équilibre de Nash parfait du jeu entre le syndicat et la firme. Commentez les décisions prises (salaire et emploi).

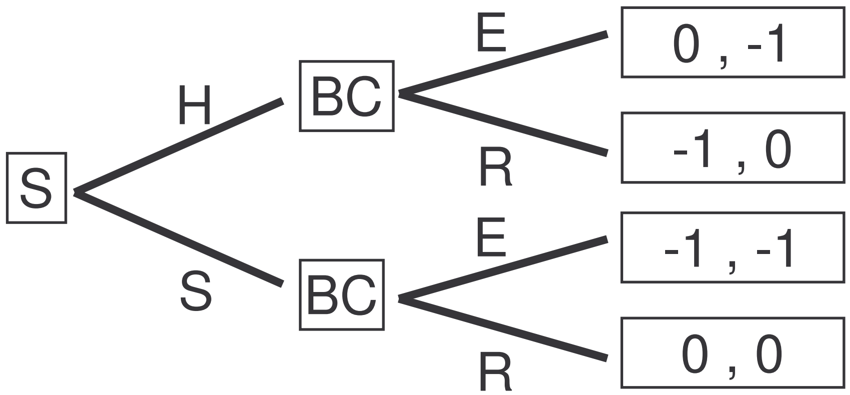
3.3- Crédibilité de la politique monétaire :

Suite à la hausse des prix du pétrole, les salariés peuvent négocier une hausse des salaires nominaux (H) ou subir une baisse de pouvoir d'achat (S). La banque centrale peut mener une politique monétaire rigoureuse (R) afin de contenir les anticipations d'inflation et enrayer la boucle prix–salaires, ou une politique monétaire expansive (E) pour tenter de maintenir l'activité. Les gains des salariés dépendent du pouvoir d'achat et du niveau d'emploi, les gains de la banque centrale dépendent de l'inflation et du chômage. Ils sont résumés par les arbres suivants. Dans chacun de ces jeux, déterminez l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux. L'annonce d'une rigueur monétaire est-elle crédible ?

Priorité à la lutte contre le chômage



Priorité à la lutte contre l'inflation



3.4- Crédit bancaire

Considérons la problématique du crédit bancaire sous l'angle de la théorie des jeux. Une banque doit décider d'accorder ou de refuser un crédit, et le client doit décider de le rembourser ou de faire défaut. Les gains des deux joueurs, résumés par le tableau suivant, sont connaissance commune :

		banque	
		Accorder	Refuser
client	Rembourser	1 ; 1	-1 ; 0
	Faire défaut	2 ; -1	0 ; 0

Discutez l'ordre de préférence de chaque joueur sur les issues du jeu qui résulte de ce tableau. Déterminez les équilibres de Nash du jeu statique à information complète, puis les équilibres de Nash parfaits en sous-jeux du jeu dynamique en considérant d'abord que la banque joue en premier, puis que le client joue en premier. Commentez (en particulier, discutez de la crédibilité des annonces ou menaces que les joueurs peuvent faire dans le jeu dynamique).

4- Jeu dynamique à information complète mais imparfaite

4.1- Présentation du jeu

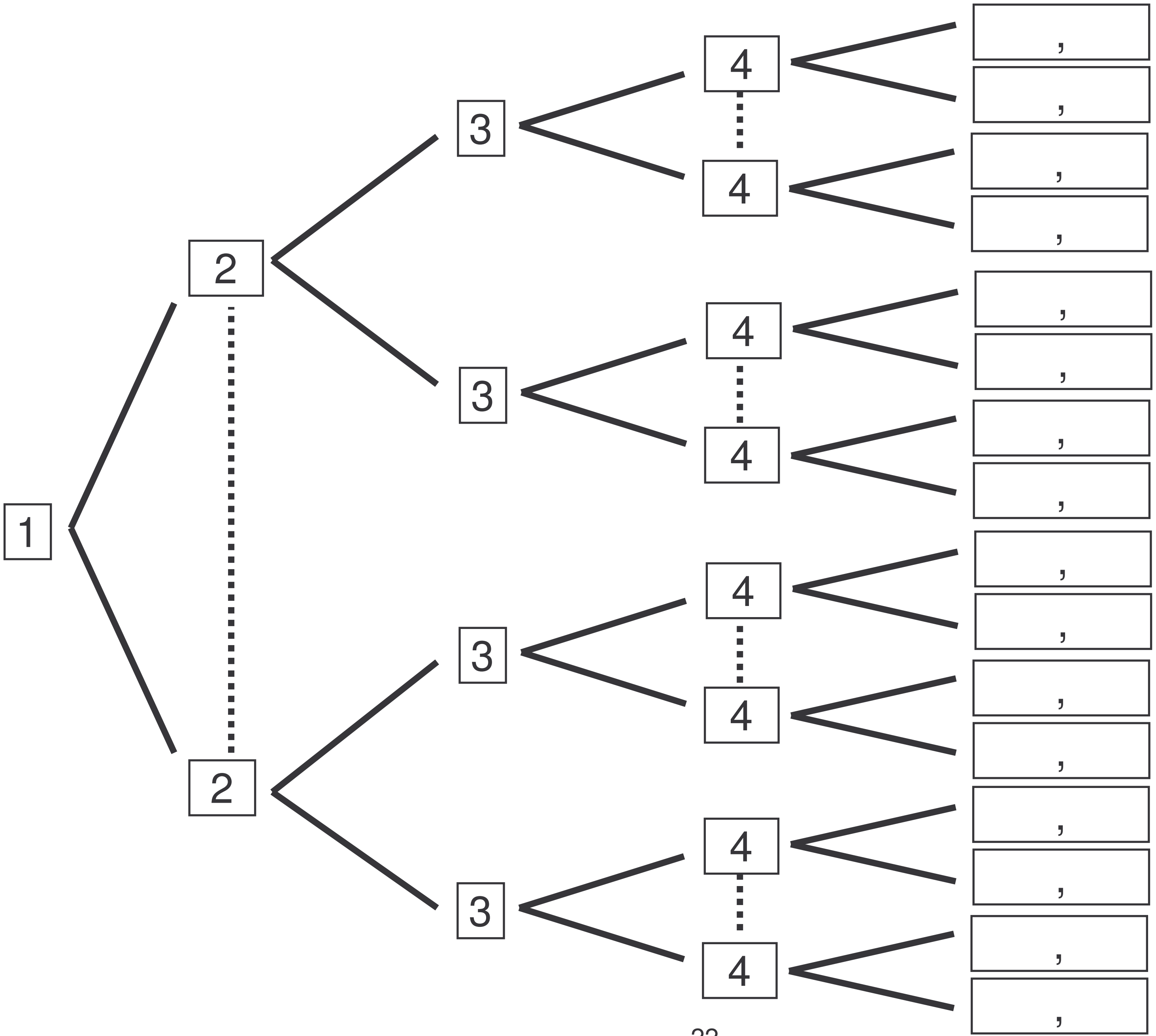
Exemples de jeux à deux étapes dans lesquels :

- des joueurs (1 et 2) prennent simultanément des décisions à l'étape 1 ;
- des joueurs (3 et 4, éventuellement les mêmes que 1 et 2) prennent des décisions simultanément à l'étape 2, après avoir observé les décisions prises à l'étape 1 ;
- les gains des joueurs dépendent des décisions prises aux deux étapes.

→ décisions simultanées à chaque étape $\Rightarrow$ information imparfaite

exemples :

- droits de douane et concurrence internationale : deux entreprises en duopole décident de leurs ventes, les gouvernements des deux pays fixent les droits de douane.
- ruées bancaires : deux épargnants déposent des fonds à la banque, qui les investit dans un projet de long terme, et doivent décider de retirer leur dépôt avant ou après maturité du projet.


1
2
2
3
3
3
3
4
4
4
4
4
4
4
4

4.2- Résolution par un algorithme de type Kuhn

chronologie des décisions

1

les joueurs 1 et 2 choisissent a_1 et a_2

2

les joueurs 3 et 4 choisissent a_3 et a_4

résolution à rebours

2

les joueurs 1 et 2 choisissent a_1 et a_2 en anticipant que $\{a_3(a_1, a_2), a_4(a_1, a_2)\}$ est un équilibre de Nash

1

les joueurs 3 et 4 choisissent a_3 et a_4 en prenant a_1 et a_2 comme donnés

4.3- Applications :

4.3.1- Ruées bancaires :

Deux épargnants déposent chacun D à la banque. La banque prête à une entreprise pour 2 périodes. Si elle est forcée de liquider prématurément (période 1), elle recouvre 2r, avec $D > r > D/2$. Si elle laisse l'entreprise continuer son projet, elle récupère 2R, avec $R>D$.
Les déposants peuvent retirer à la fin de la première période ou à la fin de la deuxième période (on néglige l'actualisation).
En fin de période 1, si les deux déposants retirent, ils reçoivent chacun r et le jeu s'arrête ; si l'un des deux retire, il reçoit D, et la banque verse $2r – D$ à l'autre et le jeu s'arrête ; si aucun ne retire, le jeu continue.
En fin de période 2, si les deux déposants retirent, ils reçoivent chacun R ; si l'un des deux retire, il reçoit $2R – D$, la banque liquide le projet et verse D à l'autre ; si aucun ne retire, la banque verse d'office R a chacun, et le jeu s'arrête.
Montrer que le jeu a deux équilibres de Nash parfaits en sous-jeux, qui conduisent les déposants à retirer tous les deux en première période (« ruée ») ou à retirer tous les deux en deuxième période. (cf. Diamond & Dybvig 1983 : les ruées bancaires peuvent être des phénomènes d'équilibre)

4.3.2- Droits de douane et concurrence internationale :

Soient deux pays identiques, chacun ayant un gouvernement, qui choisit un droit de douane, et une entreprise qui produit et vend sur le marché national et à l'exportation.
Dans le pays i, le prix est déterminé par $P_i = a - Q_i$ avec $Q_i = y_i + x_k$; y_i est la production de la firme locale vendue en i, x_k l'exportation de la firme étrangère.
Le coût de production de la firme du pays i est : $C_i(y_i, x_i) = c.(y_i + x_i)$
La chronologie du jeu est :

(1) le gouvernement choisit le droit de douane qui est prélevé sur les importations ;
(2) les firmes décident simultanément des ventes locales et à l'exportation ;
(3) les paiements sont :
    - les profits des entreprises : $\pi_i = P_i y_i + (P_j - t_j)x_i - c(y_i + x_i)$
    - le surplus national pour les gouvernements : $½\, Q_i^2 + \pi_i + t_i x_j$.

Montrer que le résultat parfait en sous-jeu donne :

$t_1 = t_2 = (a - c)/3$; $y_1 = y_2 = 4(a - c)/9$; $x_1 = x_2 = (a - c)/9$.

Montrer que le surplus total (somme des surplus nationaux) est maximum pour :

$t_1 = t_2 = 0$. Commentez…

5- Jeux répétés :

Les menaces ou promesses sur les comportements futurs peuvent-ils influencer les décisions présentes ?

5.1- Définition

Un jeu consistant en la répétition d'un même jeu (appelé jeu de base, ou jeu d'étape, ou jeu constituant) est appelé jeu répété.

- tous les joueurs observent les résultats du jeu d'étape avant de rejouer ;
- les gains obtenus à une étape ne dépendent pas des issues des étapes précédentes (le *même* jeu est répété) ;
- le jeu peut être répété un nombre fini ou infini (ou indéterminé) de fois ;
- le gain d'un joueur est la somme (éventuellement actualisée) des gains obtenus à chaque étape.

Exemples…

5.2- Equilibre de Nash parfait en sous jeu d'un jeu à horizon fini

Théorème :

Si le jeu d'étape a un unique équilibre de Nash, alors le jeu répété T fois a un unique équilibre de Nash parfait en sous jeu : la répétition de l'équilibre de Nash du jeu d'étape.

Exemple : dilemme du prisonnier répété T fois.

		C	
		avouer	nier
L	avouer	-10 ; -10	0 ; -20
	nier	-20 ; 0	-1 ; -1

équilibre de Nash du jeu d'étape : {a, a}
équilibre de Nash parfait en sous jeux : {{a, a}, …, {a, a}}.

→ Comme le jeu est répété, chaque joueur peut chercher à établir une réputation de comportement « pacifique » (nier), et peut encourager l'autre à faire de même, en punissant tout comportement « agressif » (avouer).

→ adopter la stratégie conditionnelle (« trigger strategy ») suivante :

- être *a priori* pacifique (nier au premier tour) ;
- aux tours suivants : si l'autre a été pacifique auparavant, continuer à l'être aussi ; si l'autre a été agressif, le « punir » en étant agressif pendant N tours.

→ dans le jeu à horizon fini :

- au dernier tour, les joueurs sont dans une situation de jeu instantané non répété : leur décision rationnelle est d'avouer (équilibre de Nash) ;
- à l'avant dernier tour, ils savent qu'ils avoueront au tour d'après, la menace d'une « punition » future est alors inopérante : ils choisissent encore leur stratégie dominante (avouer).
- par « rétroduction », on montre ainsi qu'à chaque tour, les joueurs choisiront leur stratégie dominante.

5.3- Equilibre de Nash parfait en sous jeu d'un jeu à horizon infini

5.3.1- Théorème « populaire » (*Folk theorem*) :

Dans un jeu répété indéfiniment, si les joueurs sont suffisamment patients (si le taux d'actualisation n'est pas trop élevé), alors il existe un équilibre de Nash parfait en sous jeux qui permet aux joueurs d'obtenir tout paiement possible du jeu d'étape qui serait supérieur au paiement d'équilibre de Nash du jeu d'étape.

5.3.2- Exemple : dilemme des prisonniers répété

Paiement possible supérieur au paiement d'équilibre de Nash → issue (nier, nier).

La décision de « coopérer » (nier) est assimilable à une décision d'investissement : les joueurs doivent payer un coût initial (en renonçant à la stratégie dominante du jeu instantané) contre un gain futur (une situation Pareto-supérieure à l'équilibre de Nash du jeu instantané)
→ La préférence pour le présent doit être relativement faible (sinon, l'investissement n'est pas rentable)

5.3.3- Interprétation :

Le « théorème populaire » dit qu'il existe un grand nombre d'équilibres de Nash parfaits en sous-jeux, tous aussi vraisemblables.

→ indétermination : aucune prédiction possible sur l'issue du jeu.

Dans un jeu du type dilemme du prisonnier répété indéfiniment, la « non-coopération » n'est pas la seule issue possible → la coopération est *possible*.

5.3.4- Applications :

- collusion entre deux firmes en duopole (Friedman 1971)
- cohérence temporelle de la politique monétaire (Barro & Gordon 1983).

Collusion entre deux firmes en duopole

		Firme 2	
		Dépasser quota (C)	Respecter quota (E)
Firme 1	Dépasser quota (C)	Π_1^C ; Π_2^C	Π_1^{T1} ; Π_2^{T1}
	Respecter quota (E)	Π_1^{T2} ; Π_2^{T2}	Π_1^E ; Π_2^E

Avec (pour la firme 1) : $\Pi_1^{T1} > \Pi_1^E > \Pi_1^C > \Pi_1^{T2}$

La décision de « coopérer » (respecter le quota) est assimilable à une décision d'investissement : les joueurs doivent payer un coût initial (en renonçant à la stratégie dominante du jeu instantané) contre un gain futur (une situation Pareto–supérieure à l'équilibre de Nash du jeu instantané).

- le coût initial est : $V = \Pi_1^{T1} - \Pi_1^E$ (renoncer à jouer C quand l'autre joue E)
- le gain ultérieur est : $G = \Pi_1^E - \Pi_1^C$ (atteindre l'issue E, plutôt que l'issue C)

Si le joueur a une préférence pour le présent trop forte, il préférera 'trahir' (jouer C plutôt que E) dès le premier tour.

Résolution : on note *N* la durée de « punition » et *r* le taux d'actualisation.

« Coopérer » est optimal si :

$$V < \sum_{t=1}^{N}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t} G \quad \text{Soit :} \quad V < \frac{G}{r}\left(1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^{N}\right)$$

→ Gain à la coopération d'autant plus élevé que *N* est grand, et/ou *r* est faible.

- Si $N \to \infty$: coopérer si $V < G/r$;
- A taux d'actualisation donné, les joueurs acceptent de coopérer si la punition a une durée « suffisante » :

$$N > \frac{-\ln(1-rV/G)}{\ln(1+r)}$$

en supposant $V < G/r$, sinon, même une punition infini n'incite pas à coopérer

→ plusieurs équilibres possibles…