1- JEUX STATIQUES A INFORMATION COMPLETE

Les joueurs choisissent simultanément connaissance commune.

Exemple :

- Les Pays de l'OPEP doivent décider quel volume de pétrole vendre sur les marchés internationaux en décembre 2008…
- Duopole de Cournot
- Duopole de Hotelling

Plan du chapitre :

1- Théorie de base : forme normale et équilibre de Nash
2- Applications
3- Discussion sur le concept d'équilibre de Nash
4- Stratégies mixtes

1- Théorie de base : forme normale et équilibre de Nashleurs actions (→ maximiser le paiement) puis reçoivent leurs gains, qui dépendent des actions jouées.

Information complète : la fonction de paiement de chaque joueur, les actions possibles et l'ordre du jeu sont

1.1- Jeu représenté sous forme « normale » (ou « stratégique ») :

Le jeu est représenté sous la forme d'un « tableau » (matrice des gains) qui indique le gain des joueurs en fonction des stratégies, appelées stratégies pures.

exemple : choix de tarification

jeu n°1 choix de tarification

		Firme 2	
		agressive	pacifique
Firme 1	agressive	10 ; 10	27 ; 0
	pacifique	0 ; 27	18 ; 18

Une stratégie est un plan d'action, qui précise l'action qu'un joueur choisit dans chaque situation possible.

Définition formelle :

La représentation sous forme normale d'un jeu à n joueurs spécifie les ensembles de stratégies des joueurs, $S_1,\dots S_n$ et leurs fonctions de gain, $u_1,\dots u_n$.
On le note $G = \{S_1,\dots S_n\,;\, u_1,\dots u_n\}$

→ tableau dans le cas d'un jeu à deux joueurs et deux (ou plus) stratégies

La forme normale est adaptée pour le cas des jeux à décisions simultanées…

NB :

- Ce n'est pas la seule forme… (forme extensive adaptée aux jeux séquentiels)
- Décider simultanément ne signifie pas agir simultanément… (au moment de décider, le joueur ne sais pas ce que l'autre a choisi → on dit que l'information est imparfaite)

1.2- Résoudre le jeu :

Résoudre = trouver une combinaison de stratégies des joueurs.

Un équilibre est une combinaison de stratégies constituées d'une « meilleure » stratégie pour chacun des joueurs.

Une issue du jeu est une combinaison quelconque de stratégies.

Pour trouver l'équilibre, il faut définir ce qu'on entend par « meilleure stratégie » (définir un « concept d'équilibre »)

Hypothèses sous-jacente : chaque joueur est supposé…

- … être rationnel (cherchant à maximiser son paiement) ;
- … considérer que chaque joueur est rationnel.

1.2.a- La meilleure réponse

Meilleure réponse du joueur *i* aux stratégies des autres : la stratégie qui lui procure le paiement le plus élevé étant données les stratégies des autres

Formellement :

on note

s_{-i} les stratégies adoptées par les adversaires de i

s_i la stratégie adoptée par i

$u_i(s_i \, ; s_{-i})$ le paiement du joueur i

s_i^* est la meilleure réponse de i à s_{-i} si,

pour tout $s_i' \neq s_i^*$:

$$u_i(s_i^* \, ; s_{-i}) \geq u_i(s_i' \, ; s_{-i})$$

1.2.b- L'équilibre en stratégies dominantes

Stratégie dominante du joueur i : une stratégie qui lui procure « toujours » un paiement plus élevé que n'importe quelle autre stratégie.

Formellement :

s_i^* est une stratégie dominante de i si,

pour tout s_{-i}

pour tout $s_i' \neq s_i^*$:

$$u_i(s_i^* \, ; \, s_{-i}) > u_i(s_i' \, ; \, s_{-i})$$

Une stratégie dominante est donc jouée à tous les coups, quelques soient les choix des adversaires (même s'ils sont irrationnels).

S'il n'existe pas de stratégie dominante… il faut « anticiper » les choix des autres.

Exemple : la firme 1 a-t-elle une stratégie dominante dans le jeu n°1 ?

jeu n°1 choix de tarification

Firme 2

		agressive	pacifique
Firme 1	agressive	10 ; 10	27 ; 0
	pacifique	0 ; 27	18 ; 18

Un équilibre en stratégies dominantes est une combinaison de stratégies comprenant la stratégie dominante de chaque joueur.

Dans la plupart des jeux… il n'en existe pas !

1.2.c- L'équilibre de dominance itérée

Stratégie dominée du joueur i : une stratégie qui lui procure « toujours » un paiement moins élevé qu'une autre stratégie.

Formellement :

s_i' est strictement dominée par s_i'' si,

pour tout s_{-i}

$$u_i(s_i' \,;\, s_{-i}) < u_i(s_i'' \,;\, s_{-i})$$

s_i' est faiblement dominée par s_i'' si,

pour tout s_{-i} : $u_i(s_i' \,;\, s_{-i}) \leq u_i(s_i'' \,;\, s_{-i})$

pour au moins un s_{-i} : $u_i(s_i' \,;\, s_{-i}) < u_i(s_i'' \,;\, s_{-i})$

Une stratégie dominée n'est jamais adoptée par un joueur rationnel.

Exemple : Louis a-t-il une stratégie dominée dans le jeu n°2 ? Et Charles ?

jeu n°2

		Charles		
		G	C	D
Louis	H	2 ; 0	1 ; 1	4 ; 2
	M	3 ; 4	1 ; 2	2 ; 3
	B	1 ; 3	0 ; 2	3 ; 0

Une stratégie dominée n'est jamais adoptée par un joueur rationnel.
→ éliminer par itérations les stratégies dominées des joueurs

Un équilibre de dominance itérée est une combinaison de stratégies trouvées en éliminant, par itérations successives, les stratégies dominées des joueurs, jusqu'à ce qu'il ne subsiste plus qu'une stratégie pour chaque joueur.

Deux inconvénients au processus d’élimination itérative des stratégies dominées :

1- Il faut supposer que la rationalité des joueurs est connaissance commune à chaque itération

chaque joueur est rationnel,
chaque joueur sait que chaque joueur est rationnel,
chaque joueur sait que chaque joueur sait que chaque joueur est rationnel
etc.

2- Dans la plupart des jeux, le processus n’aboutit pas…

1.2.d- L'équilibre de Nash

L'équilibre de Nash est une combinaison des stratégies des joueurs qui sont toutes une meilleure réponse de chaque joueur aux stratégies choisies par les autres.

Formellement :

$(s_1{}^*, s_2{}^*, \ldots s_n{}^*)$ est un équilibre de Nash du jeu $G = \{S_1, \ldots S_n ; u_1, \ldots u_n\}$, si,

pour chaque joueur i, s_i^* est la meilleure réponse de i à s_{-i}^*

c'est-à-dire si, pour tout $s_i' \neq s_i^*$, $u_i(s_i^* ; s_{-i}^*) \geq u_i(s_i' ; s_{-i}^*)$

ou encore : s_i^* est la solution de $\max\limits_{s_i \in S_i} u_i(s_i ; s_{-i}^*)$

Pratiquement :

1- déterminer les « fonctions de réaction » ou « fonctions de meilleures réponses » des joueurs

$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i ; s_{-i})$ → meilleure réponse de i à s_{-i} : $s_i = MR_i(s_{-i})$

2- trouver « l'intersection » des fonctions de réactions

résoudre le système d'équations :

$$s_1 = MR_1(s_{-1}) = MR_1(s_2, \ldots s_n)$$
$$s_2 = MR_2(s_{-2}) = MR_2(s_1, s_3, \ldots s_n)$$
$$\ldots$$
$$s_n = MR_n(s_{-n}) = MR_n(s_1, \ldots s_{n-1})$$

Laborieux ?
Cas des jeux à deux joueurs… utiliser le tableau des paiements

jeu n°3

		Charles	
		Gauche (G)	Droite (D)
Louis	Haut (H)	1 ; 2	0 ; 1
	Bas (B)	2 ; 1	1 ; 0

en jaune : indication de la fonction de réaction de Louis :

formellement : « B si G ; B si D »

(la fonction de réaction indique des stratégies, pas des gains)

en vert : indication de la fonction de réaction de Charles :

formellement : « G si H ; G si B »

→ l'équilibre en stratégie dominante est un équilibre de Nash !

jeu n°4

		Charles	
		Gauche (G)	Droite (D)
Louis	Haut (H)	0 ; 1	3 ; 0
	Bas (B)	1 ; 2	2 ; 3

→ l'équilibre de Nash n'existe pas toujours (à préciser… cf. § 3)

jeu n°5 (jeu du croisement)

		Car	
		Stop (CS)	Go (CG)
Lorry	Stop (LS)	1 ; 1	1 ; 2
	Go (LG)	2 ; 1	0 ; 0

→ l'équilibre de Nash n'est pas toujours unique

2- Applications

2.1- Applications diverses

Dilemme des prisonniers

C

L		G	D
	H	-8 ; -8	0 ; -10
	B	-10 ; 0	-1 ; -1

Dilemme du samaritain

C

L		G	D
	H	3 ; 2	-1 ; 3
	B	-1 ; 1	0 ; 0

Jeu de la poule mouillée

C

L		G	D
	H	-3 ; -3	2 ; 0
	B	0 ; 2	1 ; 1

Jeu de la bataille des sexes

C

L		G	D
	H	2 ; 1	0 ; 0
	B	0 ; 0	1 ; 2

Jeu de la chasse au cerf

C

L		G	D
	H	4 ; 4	0 ; 1
	B	1 ; 0	1 ; 1

Jeu du devoir civique

C

L		G	D
	H	0 ; 0	10 ; 7
	B	7 ; 10	7 ; 7

2.2- Applications économiques

2.2.1- Oligopole de Cournot :

<u>a- Duopole :</u> 2 entreprises

Déterminez l'équilibre de Nash d'un duopole dans lequel les coûts unitaires de production des firmes sont constants et égaux à c, les firmes 1 et 2 choisissent *simultanément* les quantités produites et vendues, q_1 et q_2, de façon à maximiser leur profit, et le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1 + q_2$ (on supposera $a > c$).

<u>b- Oligopole :</u> n entreprises

Déterminez l'équilibre de Nash d'un oligopole dans lequel les coûts unitaires de production des firmes sont constants et égaux à c, les firmes 1 à n choisissent *simultanément* les quantités produites et vendues, $q_1 \ldots q_n$, de façon à maximiser leur profit, et le prix d'équilibre du marché est $P(Q) = a - Q$ quand la quantité offerte sur le marché est $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ (on supposera $a > c$).

2.2.2- Duopole de Bertrand-Hotelling :

a- Produits différenciés :

Déterminez l'équilibre de Nash d'un duopole dans lequel les firmes 1 et 2 produisent des biens différenciés horizontalement, avec des coûts unitaires de production constants et égaux à c, et choisissent *simultanément* les prix de leurs produits, P_1 et P_2, de façon à maximiser leur profit. Les fonctions de demande sont $q_1(P_1, P_2) = a - P_1 + b\, P_2$ et $q_2(P_2, P_1) = a - P_2 + b\, P_1$ (on supposera $a > c$).

b- Produits homogènes :

On suppose que la demande à la firme 1 est :

$a - P_1$ si $P_1 < P_2$,

0 si $P_1 > P_2$,

$(a - P)/2$ si $P_1 = P_2 = P$.

De même pour la demande à la firme 2.

Les coûts unitaires de production constants et égaux à c, (on supposera $a > c$).

Montrer que l'unique équilibre de Nash est tel que chaque entreprise fixe un prix égal à c.

3- Discussion sur le concept d'équilibre de Nash :

3.1- L'équilibre de Nash correspond à des prévisions auto-exécutoires

Dans les jeux à deux joueurs, par exemple, chaque joueur doit prévoir ce que l'autre va jouer… A l'équilibre de Nash, chacun joue ce que l'autre prévoit, et aucun n'a intérêt à en dévier (c'est la force de l'équilibre de Nash).

3.2- L'équilibre de Nash est un concept de solution plus fort que l'équilibre de dominance itérée

Si les stratégies (s_1*, …, s_n*) sont un équilibre de Nash, alors, elles survivent au processus d'élimination itérative des stratégies dominées.

Mais il peut exister des combinaisons de stratégies survivant au processus d'élimination itérative des stratégies dominées qui ne soient pas dans un équilibre de Nash (cf. jeu n°2 : quatre « survivantes », deux équilibres de Nash).

jeu n°2

		Charles		
		G	C	D
Louis	H	2 ; 0	1 ; 1	4 ; 2
	M	3 ; 4	1 ; 2	2 ; 3
	B	1 ; 3	0 ; 2	3 ; 0

3.3- En cas de multiplicité d'équilibres de Nash se pose un problème de coordination entre les joueurs.

Notion de « point focal » de Schelling (1960) : une issue à laquelle les joueurs qui *ne peuvent pas communiquer entre eux* auront tendance à se rallier, parce qu'elle leur semble présenter une caractéristique qui la fera choisir aussi par l'autre (psychologie, culture, histoire…)

3.4- L'équilibre de Nash n'est pas toujours une issue Pareto-Optimale du jeu.

Issue Pareto-optimale : issue à partir de laquelle, on ne peut pas améliorer simultanément les gains des deux joueurs, c'est-à-dire si on ne peut pas augmenter le gain d'un joueur sans diminuer celui de l'autre.

Le dilemme des prisonniers : jeu-type où l'équilibre de Nash est un équilibre en stratégies dominantes, inférieur au sens de Pareto à l'issue où chaque joueur joue sa stratégie dominée (formalisé M. Flood et M. Dresher, scénarisé par A. W. Tucker en 1950).

« *Deux prisonniers sont interrogés séparément à propos d'un cambriolage : ils peuvent avouer et impliquer l'autre, ou nier. Si les deux nient, ils sont condamnés à une peine légère pour délit connexe (port d'arme prohibé...). Si les deux avouent, ils sont condamnés à 10 ans de prison. Si l'un nie tandis que l'autre avoue et l'accuse, alors celui qui avoue est relâché (il servira d'indic à la police), et l'autre écope de la peine la plus lourde, 20 ans de prison.* »

		C	
		avouer	nier
L	avouer	-10 ; -10	0 ; -20
	nier	-20 ; 0	-1 ; -1

« Chaque joueur doit choisir entre une stratégie agressive et une stratégie pacifique, où la paix est préférable à la guerre ouverte, mais où l'attaque surprise (adopter la stratégie agressive quand l'autre choisit la stratégie pacifique) est payant. » (H. Moulin, Théorie des Jeux, 1981).

→ le dilemme des prisonniers illustre :

- le conflit entre « rationalité individuelle » et « rationalité collective » ;
- la difficulté à faire coopérer pour leur propre bien des individus égoïstes ;
- le dilemme moral entre comportement égoïste et altruisme socialement désirable…

L'équilibre de Nash de ce jeu est un équilibre en stratégies dominantes (avouer, choix égoïste).
Cet équilibre est inefficace au sens de Pareto : une solution Pareto-optimale et Pareto-supérieure à l'équilibre de Nash (préférable pour le groupe et pour chaque individu) est atteinte quand chaque joueur renonce à sa stratégie dominante pour jouer sa stratégie dominée (altruisme). L'action « individuellement rationnelle » de chacun conduit à un résultat inférieur du point de vue de chacun !

4- Stratégies mixtes

4.1- Stratégies pures, stratégies mixtes

Stratégie« pure » : une règle qui indique quelle <u>action</u> choisir à chaque étape du jeu, étant donné son ensemble d'information.

stratégie pure : information → action

Stratégie« mixte » : une règle qui indique quelles <u>probabilités</u> sur les actions choisir à chaque étape du jeu, étant donné son ensemble d'information.

stratégie mixte : information → distribution de probabilités sur les actions

→ stratégie mixte : « quel dé lancer ? », plutôt que « quelle action choisir ? ».

→ stratégie pure : stratégie mixte « dégénérée » (associe une probabilité 1 à une action, et une probabilité 0 à toutes les autres)

4.2- Équilibre de Nash en stratégies mixtes

4.2.1- Exemple : jeu d'appariement (*matching pennies*)

Charles et Louise doivent placer simultanément une pièce d'un penny sur la table, sur pile ou sur face. Si les deux pièces sont sur le même côté, Louise les prend, si elles ont sur des côtés différents, Charles les prend.

Le jeu sous forme normale :

jeu n°6 : (*matching pennies*)

		Charles	
		Pile	Face
Louise	Pile	1 ; -1	-1 ; 1
	Face	-1 ; 1	1 ; -1

NB : - c'est un « jeu à somme nulle »
- pas d'équilibre de Nash en stratégies pures
- les joueurs sont (ici) neutres au risque…

L pense que C joue « pile » avec une proba q, et « face » avec une proba (1–q), c'est-à-dire la stratégie mixte (q, 1–q) :

→ jouer « pile » rapporte en moyenne à L : $q.(1) + (1-q).(-1) = 2q - 1$
→ jouer « face » rapporte en moyenne à L : $q.(-1) + (1-q).(-1) = 1 - 2q$

<u>jeu n°6 :</u> (*matching pennies*)

		Charles		
		Pile (q)	Face (1–q)	
Louise	Pile (p)	1 ; –1	–1 ; 1	→ $2q - 1$
	Face (1–p)	–1 ; 1	1 ; –1	→ $1 - 2q$

→ « pile » rapporte plus que « face » à L si : $2q - 1 > 1 - 2q \Leftrightarrow q > ½$

La meilleure réponse de L à la stratégie mixte (q, 1–q) est donc la stratégie mixte (p, (1-p)) :

$p = 1$ si $q > ½$ → jouer « pile » avec certitude
$p = 0$ si $q < ½$ → jouer « face » avec certitude
p quelconque si $q = ½$

De même,
la meilleure réponse de C à la stratégie mixte (p, 1–p) est la stratégie mixte :

$q = 1$ si $p < ½$ → jouer « pile » avec certitude
$q = 0$ si $p > ½$ → jouer « face » avec certitude
q quelconque si $p = ½$

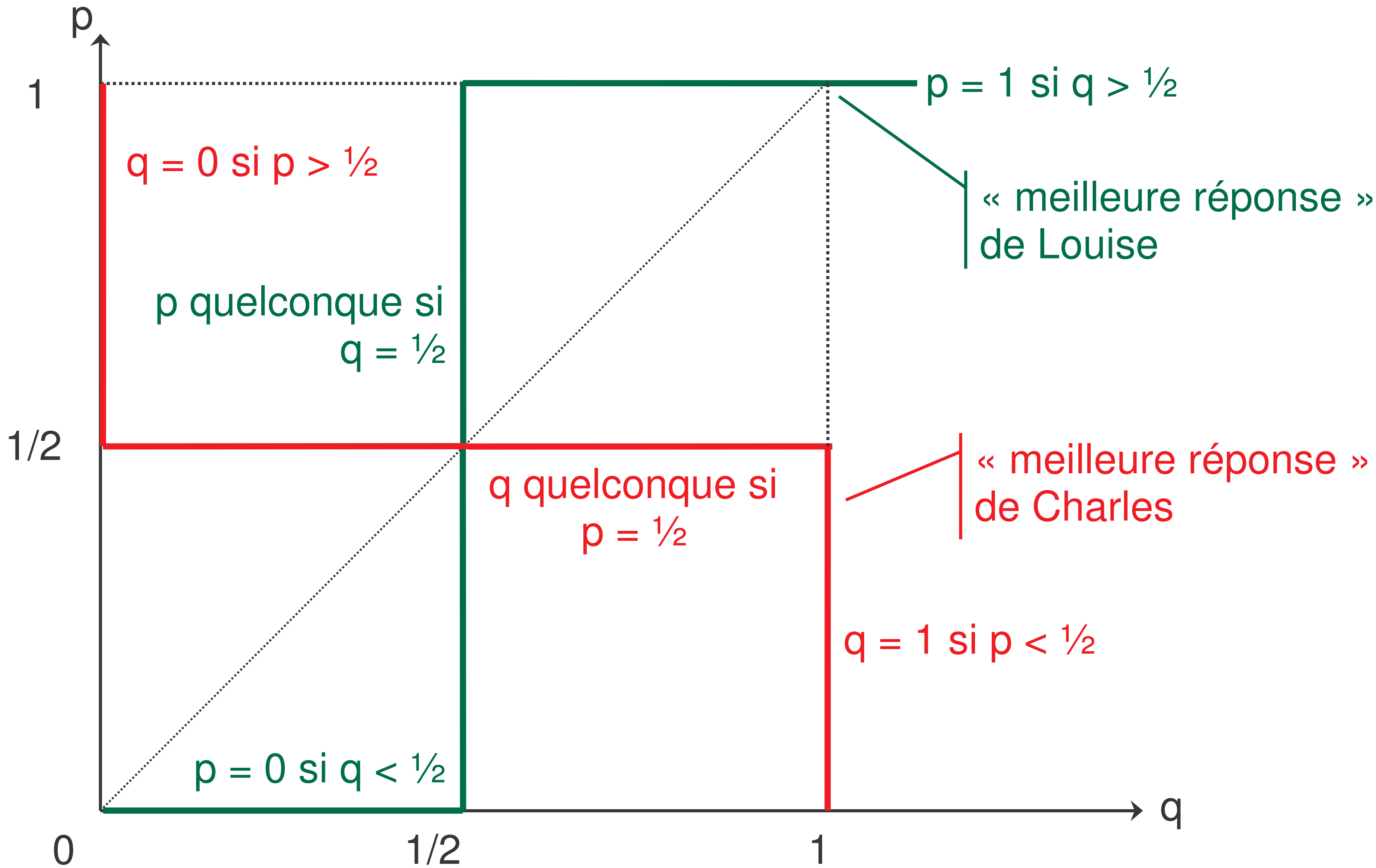
<u>jeu n°6 :</u> (*matching pennies*)

		Charles	
		Pile (q)	Face (1–q)
Louise	Pile (p)	1 ; –1	–1 ; 1
	Face (1–p)	–1 ; 1	1 ; –1
		↓ 1 – 2p	↓ 2p – 1

L'équilibre de Nash est la combinaison de stratégies mixtes {(½,½), (½,½)} :

→ si $q = ½$ alors L n'a pas de meilleure stratégie que $p = ½$ (à démontrer…)
→ si $p = ½$ alors C n'a pas de meilleure stratégie que $q = ½$ (…)

Représentation graphique :



4.2.2- Théorème de Nash :

Un équilibre de Nash en stratégie mixte est une combinaison de distributions de probabilités sur les actions des joueurs (stratégies mixtes) qui sont chacune la meilleure réponse du joueur aux stratégies mixtes des autres.

Théorème de Nash (1950) :
Tout jeu fini (jeu entre un nombre fini de joueurs ayant un nombre fini de stratégies) admet au moins un équilibre de Nash (éventuellement en stratégies mixtes.

Remarque…
… mathématique : la preuve de ce théorème repose sur le « théorème du point fixe de Brouwer » (si f(x) est continue de [0, 1] dans [0, 1], alors il existe au moins point fixe, c'est-à-dire un x tel que f(x) = x).
… économique (théorique) : Arrow et Debreu (1954) démontrent l'existence d'un équilibre général dans une économie de marchés concurrentiels en la représentant sous la forme d'un jeu entre les agents, l'équilibre général étant l'équilibre de Nash du jeu…

4.2.3- Interprétation des stratégies mixtes :

Action aléatoire… dans la réalité ?

→ Interprétation « naïve » (Nash 1950) : lancer un dé…
(cf. sélection aléatoire de documents comptables à vérifier par auditeurs externes, feuilles de déclaration de revenus par l'administration fiscale, conversations téléphoniques par le contrôle-qualité de services d'assistance…)

→ Interprétation « de l'action de masse » (Nash 1950) : une représentation des comportements observés globalement dans grand nombre de cas : 50% des gens à la place de Louise joueraient « pile »…

→ Interprétation en termes d'incertitude sur le « type » d'adversaire (Harsanyi 1973) : la stratégie mixte de Charles est une évaluation de Louise quant à l'incertitude du choix de Charles, une « croyance » de Louise quant à la décision possible de Charles… (cf. jeu à information incomplète).

4.3- Applications

4.3.1- Dilemme des prisonniers, jeu de la poule mouillée, jeu de la chasse au cerf, dilemme du samaritain, jeu de la bataille des sexes, jeu du devoir civique (cf. 2.1)

4.3.2- Jeu de l'inspection

Le matin, l'employé part sur le terrain accomplir la mission que son patron lui confiée. Il peut fournir un effort dans ce sens, ou, au contraire se défiler. En même temps, le patron peut décider de rester à son bureau, ou d'aller inspecter sur le terrain le travail de l'employé. On suppose que : fournir un effort coûte G à l'employé, et rapporte V au patron ; se défiler ne coûte rien à l'employé, mais ne rapporte rien au patron ; si le patron reste au bureau, il suppose que l'employé a fait son travail, et il le paye le salaire convenu, W ; si le patron inspecte l'employé, il lui en coûte H, mais il paye le salaire convenu W si, et seulement si, l'employé fournit l'effort suffisant (et n'est pas tire-au-flanc).
Présenter ce scénario comme un jeu statique sous forme normale en donnant la matrice des gains des joueurs. Déterminer les équilibres de Nash en stratégie pure et en stratégie mixte, en supposant que : $W > G > H > 0$. Commenter.
(Application numérique : G=5, W=10, H=2, V=15).