5- Valorisation de la dette
et structures des taux d'intérêt

Objectif :

Présenter :

1. Évaluation d'obligation
2. Rendement actuariel (rendement à l'échéance)
3. Risque de taux
4. Structure par termes des taux d'intérêt
5. La structure par risque des taux d'intérêt

1- ÉVALUATION D'OBLIGATION

Obligations classiques :

- paiements périodiques (coupon d'intérêt) jusqu'à l'échéance,
- remboursement du principal à l'échéance

- Valeur faciale ou nominale (le pair) = montant de la dette nominale
- Coupon = paiement annuel (en Europe...) = valeur nominale x taux nominal
- Taux nominal, ou taux du coupon = coupon/valeur faciale en %
- Prime de remboursement = montant payé à maturité – valeur faciale
- Prime d'émission = valeur faciale – montant versé à l'émetteur

Cotation :

- en pourcentage de la valeur nominale
- hors coupon couru

prix d'achat/de vente (« *dirty price* ») = prix coté (« *clean price* ») + coupon couru

Le **prix de marché** d'une obligation classique est

$$P = C \times v_1 + C \times v_2 + \ldots + C \times v_N + V \times v_N$$

C = coupon d'intérêt annuel
N = durée jusqu'à échéance
V = valeur de remboursement
v_t = facteur d'actualisation $v_t = 1/(1+r_t)^t$

Si le taux d'actualisation est constant : $P = C \times \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right) + V \times \frac{1}{(1+r)^N}$

2- RENDEMENT ACTUARIEL (RENDEMENT À L'ÉCHÉANCE)

Taux de rendement actuariel = le « taux de rendement interne » de « l'investissement dans l'obligation » (taux d'actualisation annulant la valeur actuelle nette).

Le taux de rendement actuariel (« yield to maturity »), *r*, est tel que :

$$\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{C}{(1+r)^N}+\frac{V}{(1+r)^N}-P=0$$

Pour toute obligation classique :

- Si prix actuel = remboursement final = valeur nominale,
  alors taux actuariel = taux nominal ≡ coupon / valeur nominale
- taux actuariel > taux nominal
  quand prix actuel < valeur faciale (obligation cote en-dessous du pair)
- Prix actuel et taux de rendement actuariel varient en sens inverse

3- RISQUE DE TAUX

Maturité

- Pour une obligation zéro-coupon : un seul cash-flow → maturité = échéance
- Pour toute autre obligation, il existe plusieurs cash-flows à dates différentes
  - Durée de vie moyenne : moyenne arithmétique des dates de remboursement (= échéance finale si remboursement *in fine*)
  - **Duration :** moyenne des dates de paiements pondérée par les cash-flows actualisés $D=\sum_{t=1}^{N} t \frac{CF_t (1+r)^{-t}}{\sum_{t=1}^{N} CF_t (1+r)^{-t}}$

Sensibilité de l'obligation : $S=\frac{-dP/P}{dr}$

- mesure la baisse du prix due à une hausse de 1 point du taux de rendement actuariel.
- appelée aussi « duration modifiée » car $S=\frac{D}{1+r}$

En cas de hausse du taux actuariel

- une obligation peut produire un rendement négatif même si le taux apparent est élevé
  - rendement = revenus versés (coupon) + gain en capital (plus-value)
  - $taux \ \ d'intérêt \ \ apparent = \dfrac{coupon \ \ annuel}{prix}$

- plus la maturité est longue (échéance éloignée) :
  - plus la sensibilité du prix de l'obligation au taux d'intérêt (actuariel) est élevée
  - plus le rendement, sur une période de détention donnée où a lieu une hausse du taux d'intérêt, est faible.

Éviter de *réaliser* les pertes en capital en conservant l'obligation jusqu'à échéance..

Conséquence de ce qui précède : la volatilité des cours des obligations à LT est plus élevée que celle des titres à plus court terme

→ les obligations à LT sont soumises à un *risque de taux d'intérêt* (fortes pertes en capital en cas de hausse des taux d'intérêt)... placements risqués pour des périodes brèves.

→ les obligations à CT ont « peu » de risque de taux :

- les obligations zéro-coupon dont la durée de détention est égale à la maturité n'en comportent aucun ;
- les obligations versant un coupon sont soumises à un risque de taux sur le coupon versé)

MAIS il existe un *risque de réinvestissement* si l'épargne est placée en titres à CT (maturité inférieure à la durée du placement) : le taux auquel le placement sera effectué à la période suivante n'est pas encore connu.

Convexité : $\Gamma = \dfrac{d^2 P}{dr^2}$

La relation entre prix et taux de rendement actuariel n'est pas linéaire :

$$\Delta P \approx \frac{dP}{dr} \times \Delta r + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \times (\Delta r)^2 \quad \text{soit} \quad \Delta P \approx -S \quad P \quad \Delta r + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta r)^2$$

Prix de l'obligation et structure des taux d'intérêt

- utiliser la structure réelle des taux d'intérêt plutôt que supposer une structure plate
- prendre en compte la déformation de la structure plutôt que supposer une translation.

4- STRUCTURE PAR TERMES DES TAUX D'INTÉRÊT

Taux d'intérêt de diverses obligations (d'État) en fonction de leur maturité

- courbe des taux « croissante » (habituelle, normale) : taux longs > taux courts
- courbe des taux « plate » : taux longs = taux courts
- courbe des taux « décroissante » (inversée) : taux longs < taux courts.

La théories explique-t-elle le fait observé ?	variation conjointe des taux d'intérêt dans le temps	courbe des taux habituellement croissante	structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
théorie des anticipations	oui	non	oui
théorie de la prime de liquidité	oui	oui	oui

4.1- La théorie des anticipations

<u>Hypothèse :</u> parfaite substituabilité des obligations de maturité différentes

- indifférence de l'acheteur à la maturité
- neutralité au risque de réinvestissement

<u>détermination du taux long :</u> $r_{n,t} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(r_{1,t} + r^{a}_{1,t+1} + \ldots + r^{a}_{1,t+n-1} \right)$

« taux d'intérêt à LT = moyenne des taux courts futurs anticipés »

<u>Explication</u>...

- … des formes de la courbe des taux
- … des changements conjoints des taux de maturités différentes
- … d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
- … pas de la courbe des taux *habituellement* croissante

<u>NB :</u> Les taux longs sont moins volatils que les taux courts : $Var\left(r_{n,t}\right) \approx \frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$

4.2- Les théories de la prime de liquidité et de l'habitat préféré

Hypothèse : obligations de maturités différentes *imparfaitement* substituables

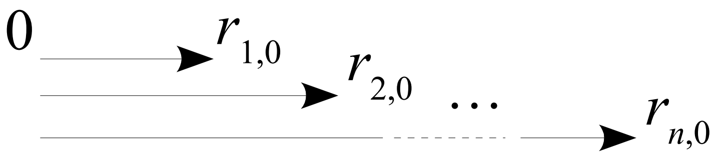
- Théorie de la prime de liquidité : « taux d'intérêt à LT = moyenne des taux courts futurs anticipés + prime de liquidité »
- Théorie de l'habitat préféré : les investisseurs ont une préférence pour pour des obligations d'une certaine maturité (plutôt courte), leur *habitat préféré*

Explication: deux théories voisines qui expliquent

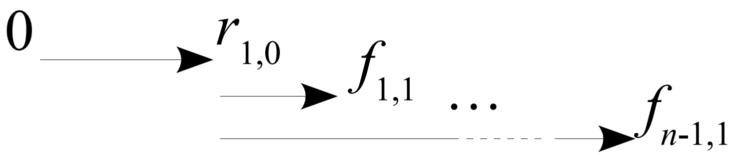
- … des formes de la courbe des taux
- … des changements conjoints des taux de maturités différentes
- … d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
- … de la courbe des taux *habituellement* croissante

4.3- Structure par terme des taux d'intérêt et taux forward

Taux « spots » : taux applicables aujourd'hui sur diverses échéances, « $r_{n,0}$ »



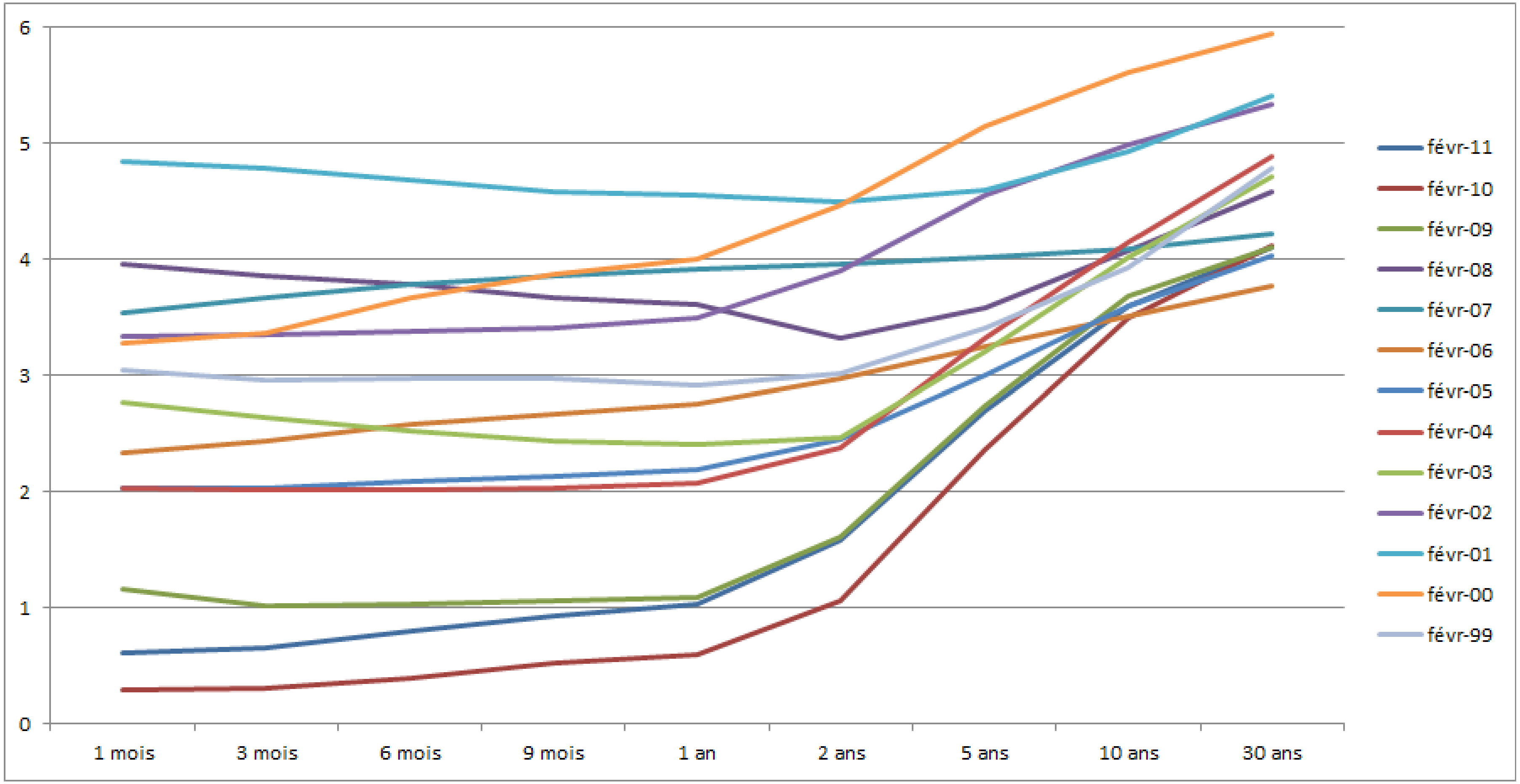
Taux à terme ou taux *forward* : taux applicables à une date ultérieure t sur diverses échéances $n+t$, « $f_{n,t}$ »



Les taux *forward* se déduisent des taux spots par absence d'arbitrage

ex : $(1+r_{2,0})^2=(1+r_{1,0})(1+f_{1,1})$

Taux actuariels des Bons du Trésor et OAT (moyennes mensuelles)



source : Banque de France

http://www.banque-france.fr/fr/statistiques/taux/taux.htm
ttp://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html

5- LA STRUCTURE PAR RISQUE DES TAUX D'INTÉRÊT

Différence entre les taux d'intérêt actuariels des obligations de même maturité émises par des emprunteurs de catégories différentes.

Risque de défaut / de crédit / de contrepartie

- L'emprunteur ne peut pas payer les intérêts et/ou rembourser le principal
- Les obligations d'État sont considérées comme « sans risque de défaut »... car le gouvernement peut toujours payer en créant de la monnaie...
    - risque d'(hyper-)inflation
    - pas dans la zone euro ! (Allemagne vs *PIIGS*)
- Une entreprise peut faire faillite

Risque d'illiquidité

- Difficulté à convertir l'obligation en monnaie rapidement et à faible coût.
- Quantité disponible (obligations d'État + liquides qu'obligations privées)
- Activité du marché (liquidité est organisée par les *market makers*)

Prime de risque = écart entre taux des obligations à risque de défaut et taux des obligations sans risque (*spread* de taux)

<u>Exemple :</u> choix de prêter 1
au gouvernement au taux r_f ou à une entreprise qui « réussit » avec une probabilité $1 - P$ et rembourse le prêt au taux convenu r_e, ou « échoue » avec une probabilité P et rembourse $1 + r_e - l$ ($1 > l > 0$: taux de perte en cas de défaut).

rentabilité exigée (en cas de neutralité au risque) : r_f
rentabilité moyenne du prêt à l'entreprise : $(1 - P)\, r_e - P\,(r_e - l)$

arbitrage $\rightarrow$ $r_e = r_f + P\, l$

- ici : « exposition at default » = 1, souvent notée EAD
- P : « probability of default »
- l : « loss given default » souvent notée LGD
- $P\, l$: « expected loss » souvent notée EL : EL = EAD x LGD x P

Approche structurelle (Merton) :

Bilan (structure financière) en valeur de marché : $S_t = A_t + D_t$

- actions : $A_T = \max(0, S_T - X) \rightarrow$ call sur la valeur des actifs
- dette (zéro coupon à échéance T) : $D_T = \min(X, S_T) = X - \max(0, X - S_T)$
  $\rightarrow$ dette sans risque + put court sur la valeur des actifs

Valeur (actualisée) de la dette risquée : $D_0 = D_T e^{-r_f T} = X e^{-r_f T} - P_0$

où : X est la valeur faciale de la dette (prix d'exercice du put)
S_0 est la valeur des actifs (sous-jacent du put)
P_0 est le prix du put : $P_0 = S_0[N(d_1) - 1] + X e^{-r_f T}[1 - N(d_2)]$

avec :

- $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale. NB : $N(-x) = 1 - N(x)$
- $d_1 = \dfrac{\ln(S_0/X) + (r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

La valeur de la dette risquée s'écrit : $D_0 = X\,\mathrm{e}^{-r_f T} N(d_2) + S_0 N(-d_1)$

soit : $D_0 = X\,\mathrm{e}^{-r_f T} - N(-d_2)\left[X\,\mathrm{e}^{-r_f T} - S_0 \frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}\right]$

Valeur actuelle de la dette sans risque

Probabilité risque-neutre de défaut

Valeur actuelle espérée de la perte en cas de défaut, entre []

Valeur actuelle espérée du recouvrement

Le rendement à l'échéance de la dette risquée est *r* tel que : $D_0 = X\,\mathrm{e}^{-rT}$

Le *spread* de crédit vaut : $r - r_f = -\dfrac{1}{T}\ln\left[1 - N(-d_2)\left(\mathrm{e}^{-r_f T} - \dfrac{S_0}{X}\dfrac{N(-d_1)}{N(-d_2)}\right)\right]$

Rôle des agences de notation (de *rating*) :

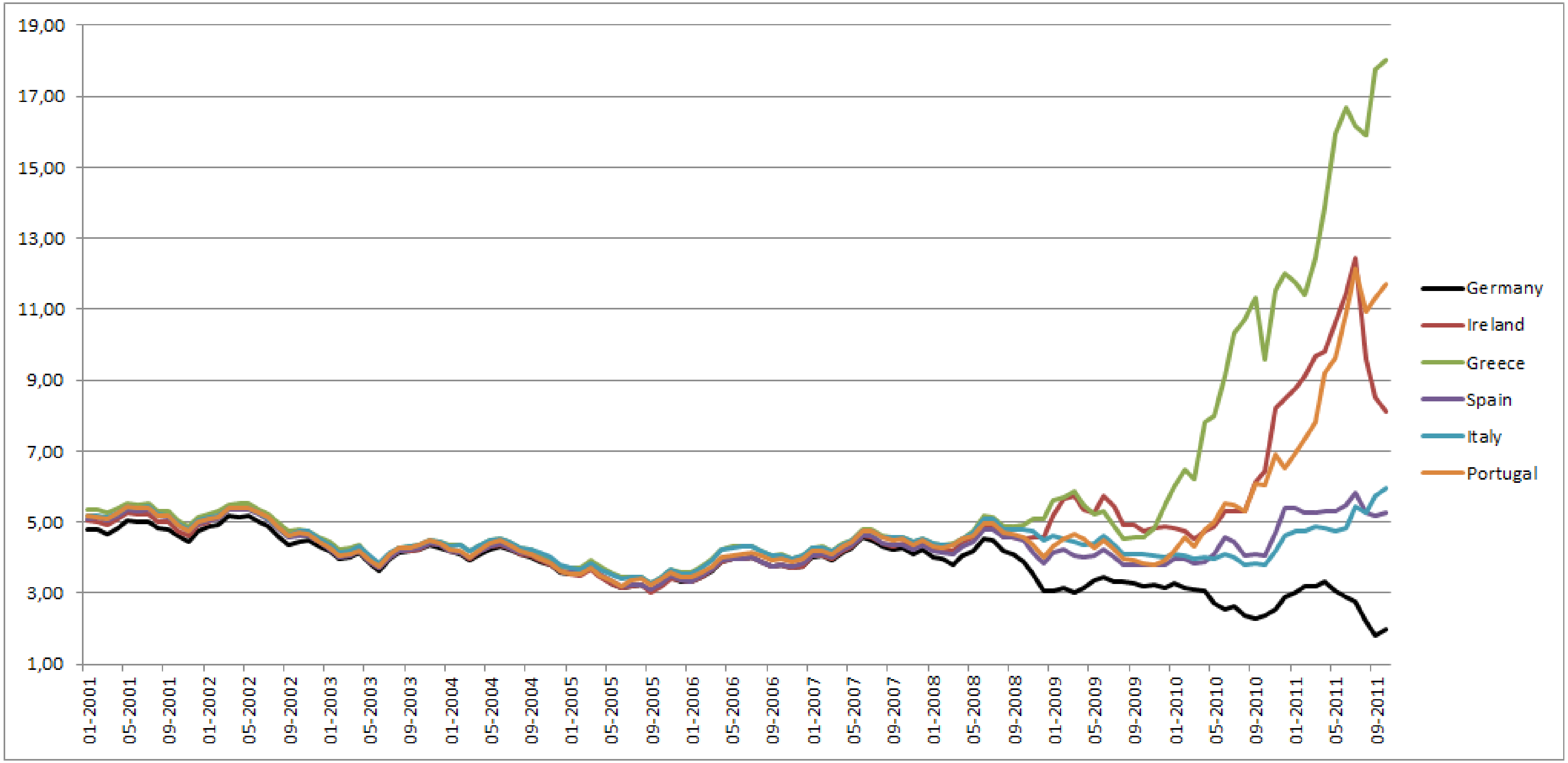
Moody's	→	http://www.moodys.com/
Standard & Poor's	→	http://www.standardandpoors.com/
Fitch	→	http://www.fitchratings.com/
Banque de France	→	http://www.banque-france.fr/fr/instit/services/fiben/cotation/index.htm
COFACE	→	http://www.coface.fr/

Notation → « score » de crédit

méthodes statistiques :

- analyse discriminante multiple (Altman 1968 http://pages.stern.nyu.edu/~ealtman/)
    - fonds de roulement / actifs totaux
    - bénéfices retenus / actifs totaux
    - EBIT / actifs totaux
    - valeur de marché du capital / valeur nominale de la dette
    - chiffre d'affaires / actifs totaux
- méthode économétriques : logit, probit

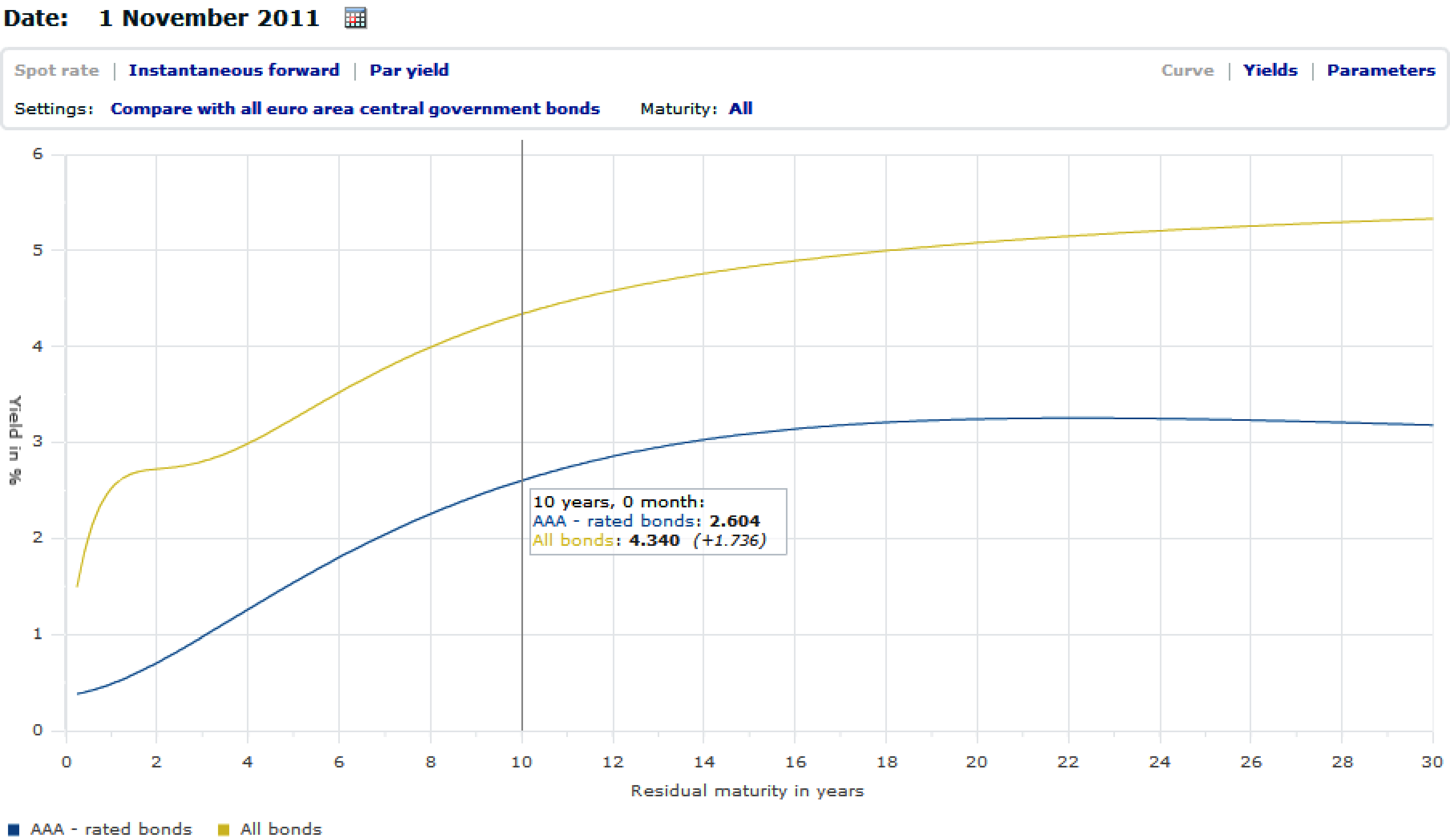
Harmonised long-term interest rates for convergence assessment purposes



source : ECB http://www.ecb.int/stats/money/long/html/index.en.html

Secondary market yields of government bonds with a remaining maturity close to 10 years

Euro area yield curve



source : ECB, http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html