3- Valorisation d'options

Valorisation des options classiques :

- options d'achat (call)
- options de vente (put)

Une pierre angulaire de la finance moderne :
- décisions d'investissement (options réelles)
- conditions de financement (approche structurelle du risque de crédit, Merton)

Black et Scholes (1973)
Merton (1973)
Cox, Ross et Rubinstein (1979)

1- DÉFINITION DES OPTIONS CLASSIQUES

Option = droit de réaliser une transaction future à des conditions fixées à l'avance.

call : option d'achat
droit d'acheter un actif (sous-jacent, de valeur S) à ou jusqu'à une date fixée (échéance) à un prix fixé (prix d'exercice X)

put : option de vente
droit de vendre un actif (sous-jacent, de valeur S) à ou jusqu'à une date fixée (échéance) à un prix fixé (prix d'exercice X)

Option *européenne* : peut être exercée uniquement à l'échéance
Option *américaine* : peut être exercée à tout moment jusqu'à l'échéance

→ Options « vanilles »

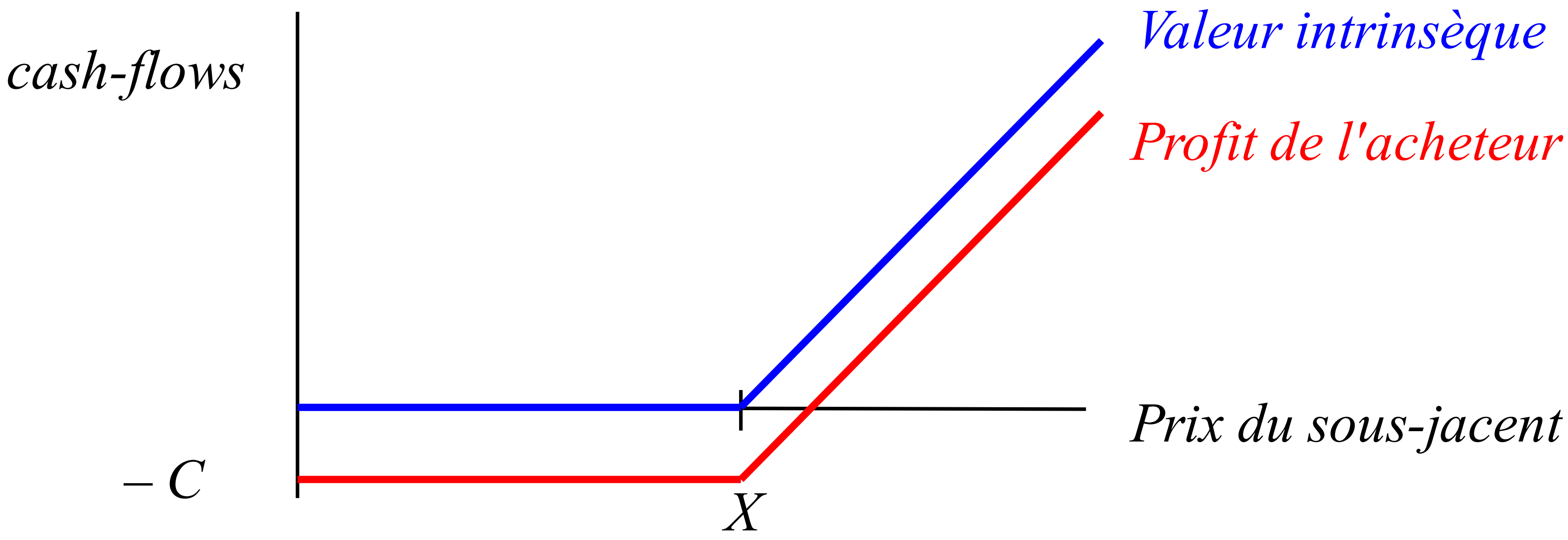
2- CASH-FLOWS ASSOCIÉS À UNE OPTION

À la conclusion du contrat, **l'acquéreur** paye une prime à l'émetteur (C pour un call, P pour un put).

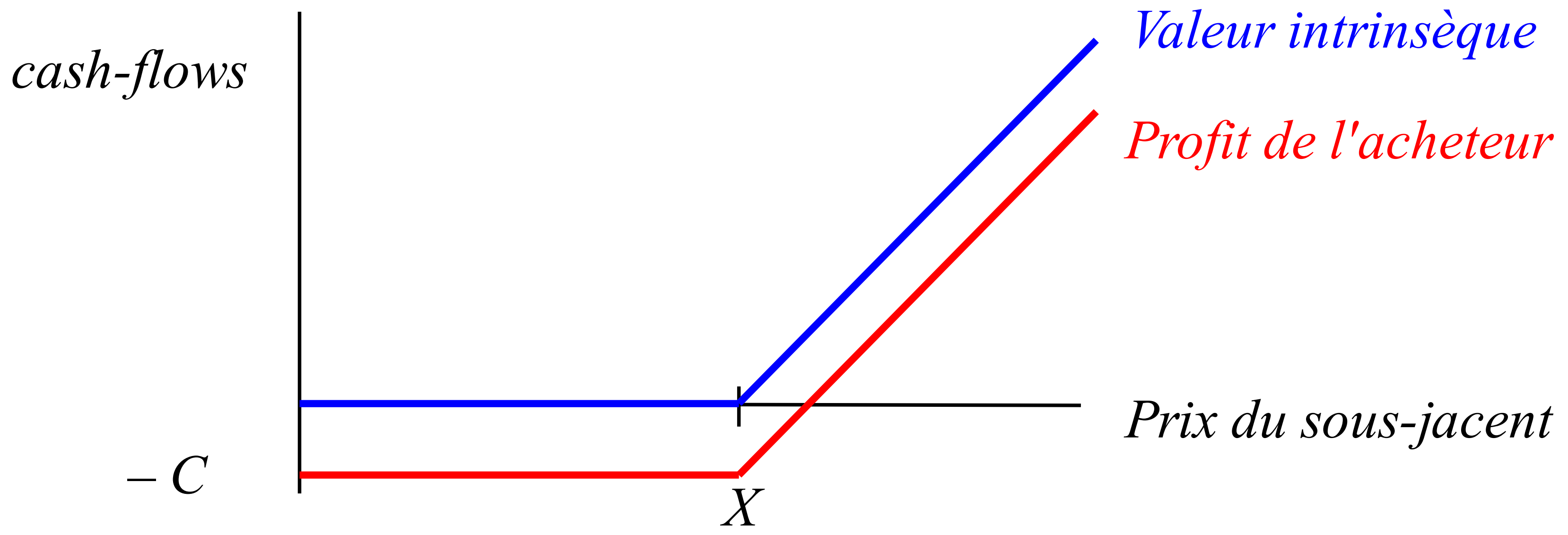
À l'échéance,

- **le détenteur** (acheteur) est libre d'exercer,
- **l'émetteur** (vendeur) de l'option est obligé de se porter contrepartie.

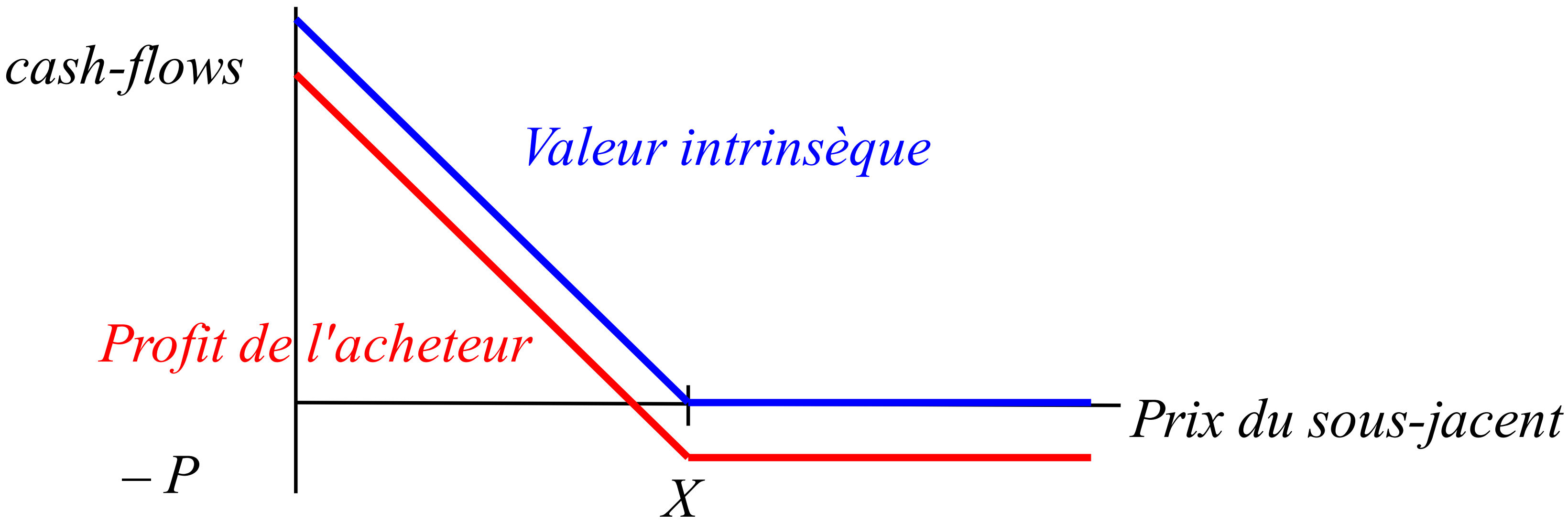
CALL	Acheteur		Vendeur	
À la conclusion	$-C$		$+C$	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
décision	ne pas exercer	exercer	n.a.	n.a.
valeur du call	0	$S_T - X$	0	$-(S_T - X)$
profit	$-C$	$S_T - X - C$	$+C$	$-(S_T - X) + C$



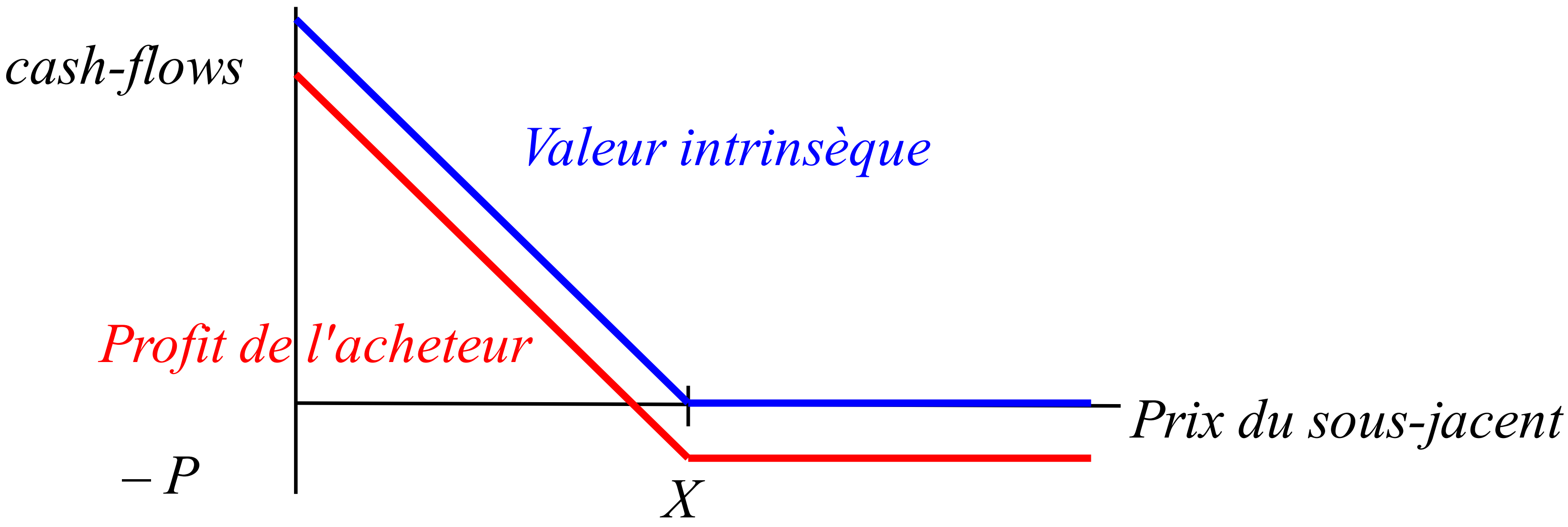
Valeur intrinsèque du call à l'échéance : $C_T = max(0, S_T - X)$



PUT	**Acheteur**		**Vendeur**	
À la conclusion	$-P$		$+P$	
À l'échéance	$S_T < X$	$S_T > X$	$S_T < X$	$S_T > X$
décision	exercer	ne pas exercer	n.a.	n.a.
valeur du put	$X - S_T$	0	$-(X - S_T)$	0
profit	$X - S_T - P$	$-P$	$-(X - S_T) + P$	$+P$

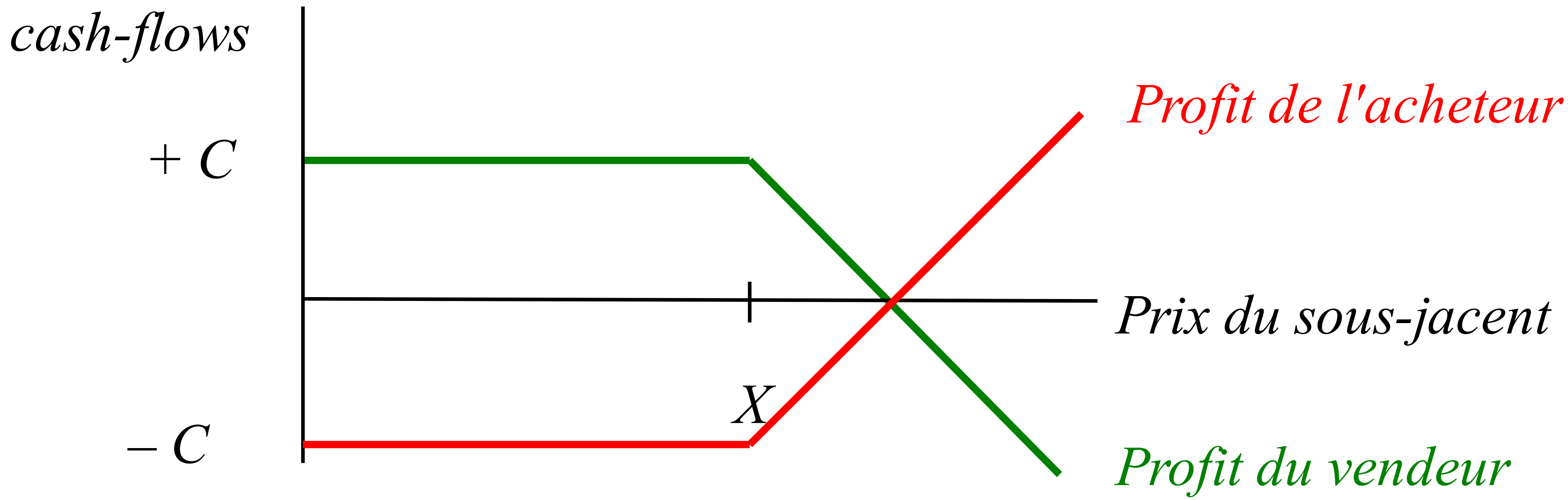


Valeur intrinsèque du put à l'échéance : $P_T = max(0, X - S_T)$

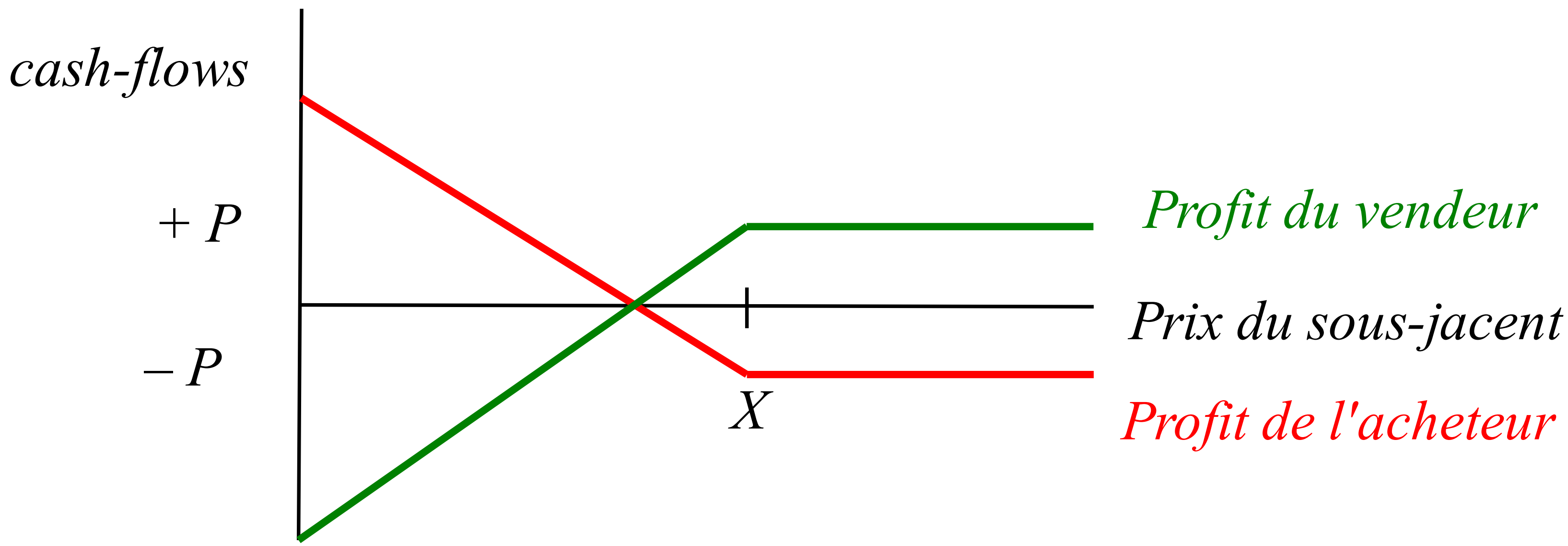


Les gains de l'acheteur sont les pertes du vendeur (et réciproquement)...

CALL



PUT



3- LA PARITÉ PUT – CALL

Les valeurs d'un call et d'un put européens de même échéance et de même prix d'exercice sont liées...

Deux portefeuilles :

- « put + actif sous-jacent »
- « call + placement de la valeur actuelle du prix d'exercice »

Valeur à l'échéance du portefeuille...

	si $S_T < X$	si $S_T > X$
… « put + actif sous-jacent »	$(X - S_T) + S_T = X$	$0 + S_T = S_T$
… « call + placement »	$0 + X = X$	$S_T - X = S_T$

→ Les deux portefeuilles ont la même valeur à l'échéance quelque soit la valeur du sous-jacent.

→ Loi du prix unique ⇒ $\boldsymbol{C + VA(X) = S + P}$

Plusieurs présentations possibles :

- signe + → position longue (achat)
- signe – → position courte (emprunt et vente)

Par exemple :

$\boldsymbol{C = S + P - VA(X)}$

→ call « synthétique » obtenu par emprunt, achat du sous-jacent et du put.

$\boldsymbol{P = C - S + VA(X)}$

→ put « synthétique » obtenu par vente du sous-jacent, placement et achat du call.

$\boldsymbol{C - P = S - VA(X)}$

→ achat du call et vente du put ≈ achat du sous-jacent par emprunt
≈ achat à terme du sous-jacent (cours à terme = prix d'exercice)

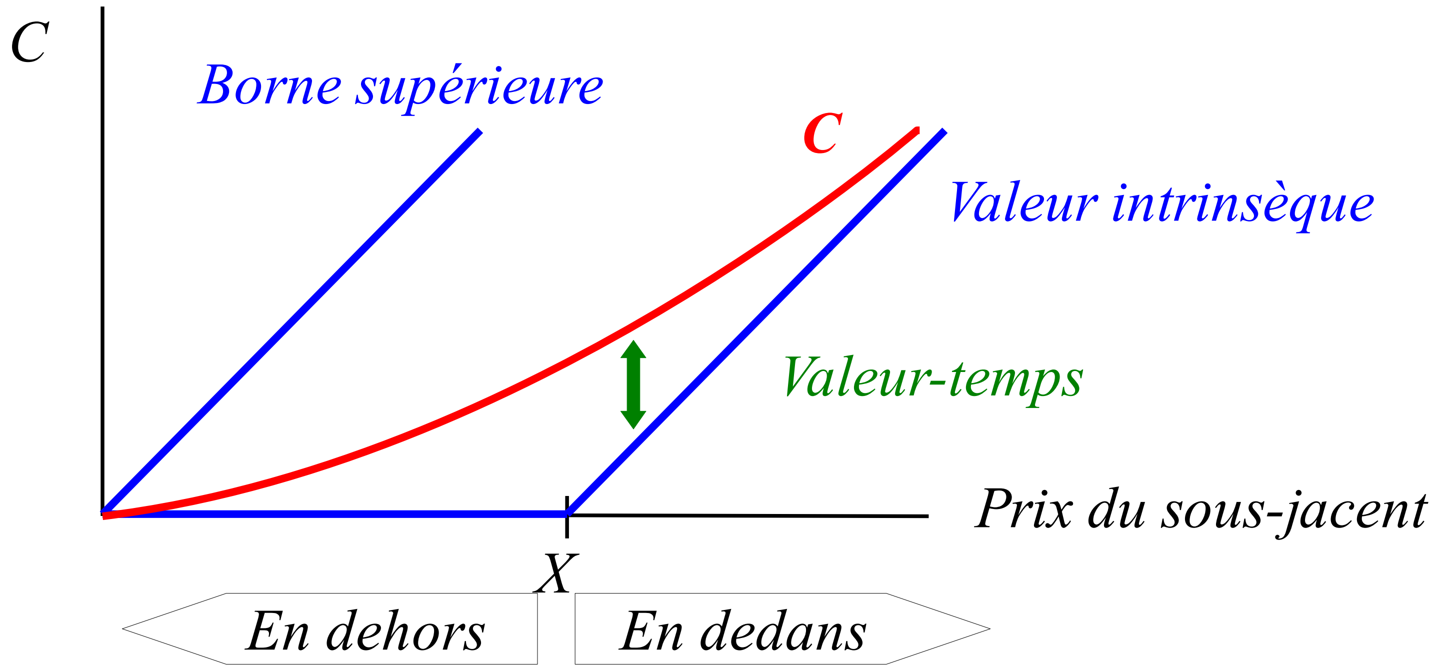
(représenter les profils de gain brut des portefeuilles)

4- LES BORNES DES OPTIONS

Par absence d'opportunité d'arbitrage :

- pour un CALL : $\max(0, S - X) < C < S$
- pour un PUT : $\max(0, X - S) < P$

CALL



5- VALORISATION DES OPTIONS : MODÈLE BINOMIAL

Chaque méthode d'évaluation des options repose sur un modèle d'évolution du prix de l'actif sous-jacent.

Le modèle binomial : le prix du sous-jacent peut monter à $u\,S$ ou baisser à $d\,S$.

$$S \nearrow S_u = u\,S \qquad S \searrow S_d = d\,S$$

avec : $d < 1 + r_f < u$

Option à échéance en fin de période :

- en cas de hausse : $V_u = max\left(0, \theta(S_u - X)\right)$
- en cas de baisse : $V_d = max\left(0, \theta(S_d - X)\right)$

avec $\theta = +1$ pour un **call** et $\theta = -1$ pour un **put**

5.1- ÉVALUATION SUR LA BASE DES PRIX DES TITRES CONTINGENTS

Deux valeurs de l'actif sous-jacent $\Rightarrow$ deux états de la nature
$\Rightarrow$ deux titres contingents

- titre contingent rapportant 1 en cas de hausse du sous-jacent → prix = v_u
- titre contingent rapportant 1 en cas de baisse du sous-jacent → prix = v_d

Les prix de l'actif sans risque et du sous-jacent : $\begin{cases} v = v_u + v_d \\ S = v_u S_u + v_d S_d \end{cases}$

… déterminent les prix des titres contingents : $\begin{cases} v_u = \dfrac{1 - v\,d}{u - d} \\ v_d = \dfrac{v\,u - 1}{u - d} \end{cases}$

D'où la valeur de l'option : $V = v_u V_u + v_d V_d$

5.2- ÉVALUATION FONDÉE SUR LA RÉPLICATION DES CASH-FLOWS

(a) Créer un portefeuille qui réplique exactement la valeur de l'option :

- acheter δ actions
- investir M dans l'actif sans risque

→ δ et M tels que la valeur finale du portefeuille soit égale à celle de l'option.

$$\begin{cases} \delta \; S_u + M(1+r_f) = V_u \\ \delta \; S_d + M(1+r_f) = V_d \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{V_u - V_d}{(u-d)S} \\ M = v \dfrac{u V_d - d V_u}{u-d} \end{cases}$$

avec $v = \dfrac{1}{1+r_f}$

Absence d'opportunité d'arbitrage $\Rightarrow$ $\boldsymbol{V = \delta S + M}$

Nombre d'actions en portefeuille de réplication (δ)

- s'appelle le « delta » de l'option.
- s'interprète comme la sensibilité du prix de l'option au prix du sous-jacent : $dV/dS = \delta$
- positif pour un call, négatif pour un put

Position dans l'actif sans risque (M) :

- négative pour un call, positive pour un put

On peut aussi écrire : $\boldsymbol{\delta S - V = - M}$

- δ actions + vente d'une option ≈ position sans risque

(b) Créer un portefeuille sans risque : (évaluation d'un call)

- acheter δ actions
- vendre un call

Valeur initiale du portefeuille : $V = \delta S - C$

Valeur finale du portefeuille :

- en cas de hausse du sous-jacent : $C_u = u\,S - X$ et $V_u = (\delta - 1)\,u\,S + X$
- en cas de baisse du sous-jacent : $C_d = 0$ et $V_d = \delta\,d\,S$
- portefeuille sans risque si $V_u = V_d$: $\delta = \dfrac{uS - X}{(u-d)S}$

Absence d'opportunité d'arbitrage $\Rightarrow (1 + r_f)\,V = V_u = V_d$

$$(1 + r_f)\,(\delta S - C) = \delta\,d\,S$$

$$C = \frac{r_f - d}{r_f(u-d)}(uS - X)$$

5.3- PROBABILITÉS RISQUE-NEUTRES

Les deux méthodes d'évaluation conduisent à la même valeur de l'option :

$$V = v_u V_u + v_d V_d \quad \text{avec} \quad v_u = \frac{1 - v\,d}{u - d} \quad \text{et} \quad v_d = \frac{v\,u - 1}{u - d}$$

La valeur de l'option est indépendante de la probabilité de hausse du sous-jacent.

On peut évaluer les actifs en considérant que les individus sont neutres au risque, à condition de modifier les probabilités affectées aux états de la nature.

→ écrire le prix de l'option comme valeur actuelle (au taux sans risque) attendue :

$$V = v\left[p V_u + (1 - p) V_d\right]$$

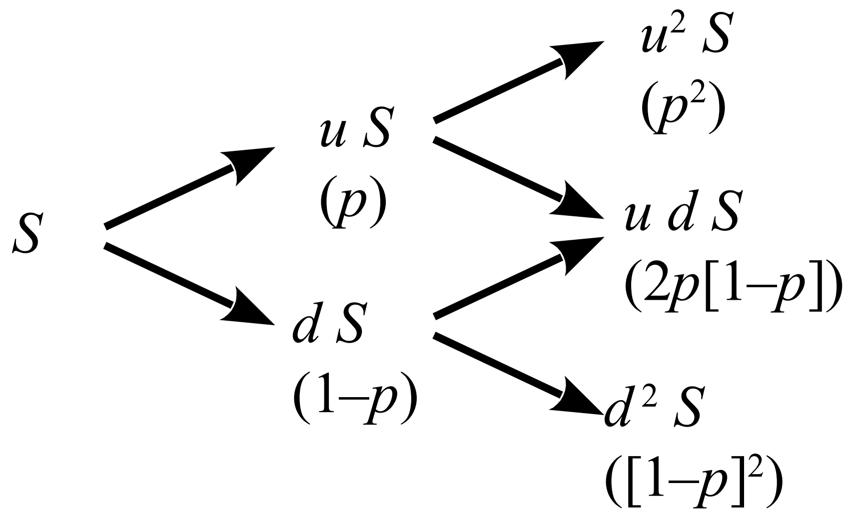
→ la valeur estimée par un individu neutre à l'égard du risque

D'où le nom de « probabilités risque-neutres » $p = \dfrac{1 - v\,d}{v(u - d)}$ et $1 - p = \dfrac{v\,u - 1}{v(u - d)}$

5.4- EXTENSION À PLUSIEURS PÉRIODES

Le modèle binomial peut être étendu à n périodes :

exemple avec 2 périodes…



- équivalence des hausses et baisses successives :
  u puis d revient au même que d puis u.
- évolution suit une marche au hasard (indépendance par rapport au passé)
- à l'échéance : n + 1 valeurs possibles du sous-jacent, donc de l'option.

Pour une option européenne : (ne peut être exercée qu'à l'échéance)

(1) actualiser l'espérance risque-neutre au taux d'intérêt sans risque

exemple avec 2 périodes…

$$V = v^2\left[p^2 V_{uu} + 2\mathrm{p}(1-p)V_{ud} + (1-p)^2 V_{dd}\right]$$

(2) itérer l'évaluation mono-périodique en partant de l'échéance et en remontant vers la date initiale

exemple avec 2 périodes…

période 1 : $\begin{cases} V_u = v\left[p V_{uu} + (1-p)V_{ud}\right] \\ V_d = v\left[p V_{ud} + (1-p)V_{dd}\right] \end{cases}$

période 0 : $V = v\left[p V_u + (1-p)V_d\right]$

Pour un option américaine : (peut être exercée avant l'échéance)

(1) itérer l'évaluation mono-périodique en partant de l'échéance et en remontant vers la date initiale
& vérifier à chaque étape si l'option doit être exercée

au nœud j, la valeur de l'option est le maximum
de la valeur intrinsèque et de la valeur en l'absence d'exercice

$$V_j = Max\left[Max\left(0,\ \theta(S_j - X)\right),\ v\left(pV_{ju} + (1-p)V_{jd}\right)\right]$$

NB :

- Il n'y a pas intérêt à exercer un call américain sur une action ne versant pas de dividende avant l'échéance → sa valeur est égale à celle d'un call européen.
- Il peut être intéressant d'exercer le call américain juste avant le versement du dividende.

6- FORMULE DE BLACK ET SCHOLES

Formule de valorisation d'une option européenne sur une action ne versant pas de dividende et dont la volatilité est constante.

Extension du modèle binomial en temps continu.

- La durée de la période tend vers 0
- Le nombre période tend vers l'infini

$$C = S\,N(d_1) - X\exp(-r_f T)\,N(d_2)$$

avec :

- $N(x)$ la fonction de répartition de la loi normale
- $d_1 = \dfrac{\ln(S/X) + (r_f + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

$$C = S\,N(d_1) - X\exp(-r_f T)\,N(d_2)$$

on retrouve : $\boldsymbol{V = \delta S + M}$

$\boldsymbol{\delta = N(d_1)}$ et $\boldsymbol{M = -X\exp(-r_f T)\,N(d_2)}$ (emprunt pour un call)

$\boldsymbol{X\exp(-r_f T)}$ = valeur actualisée au taux sans risque « continu » du prix d'exercice

$\boldsymbol{N(d_2)}$ **=** probabilité risque-neutre d'exercer le call

$\boldsymbol{X\exp(-r_f T)\,N(d_2)}$ = valeur actuelle attendue risque-neutre du prix d'exercice

remarque : si l'action verse un dividende (d : taux de dividende en % de S)

$$C = S\exp(-d\,T)\,N(d_1) - X\exp(-r_f T)\,N(d_2) \quad \text{(Merton)}$$

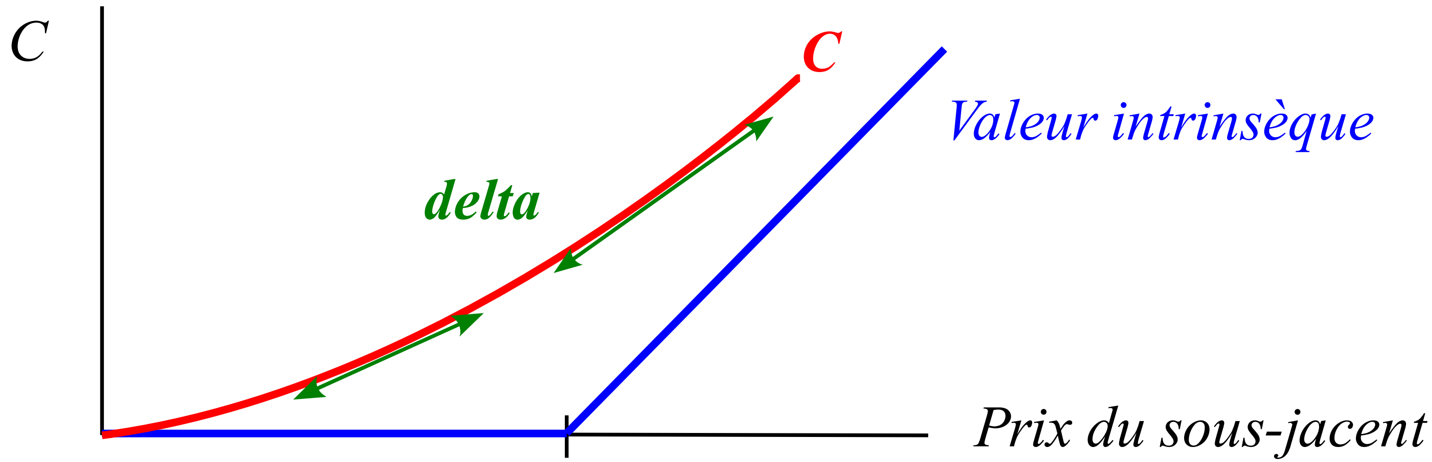
$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_f - d + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Le prix du call dépend du prix du sous-jacent

- Le prix du call augmente avec le prix du sous-jacent : le « delta » de l'option : $dC/dS = \delta > 0$

- La relation est convexe : le « gamma » de l'option

le « delta » augmente avec le prix du sous-jacent $d^2C/dS^2 = d\delta/dS = \Gamma > 0$



Le prix du put se déduit du prix du call par la parité put-call

$$
\begin{aligned}
P &= C - S - VA(X) \\
P &= S\left[N(d_1) - 1\right] - X\exp(-r_f T)\left[1 - N(d_2)\right]
\end{aligned}
$$

- Le delta du put est négatif

- La valeur du put peut être négative :
  put très en dedans → exercer : attendre l'échéance → coût d'opportunité

- Il peut être intéressant d'exercer un put avant échéance : la formule de Black-Scholes ne peut pas être utilisée pour évaluer un put américain (il n'existe pas de formule)

7- VALEUR D'OPTION ET VOLATILITÉ

La valeur d'une option dépend de 6 paramètres :

paramètres	**« grecque »**	**call**	**put**
cours du sous-jacent	« delta »	+	–
prix d'exercice		–	+
volatilité du sous-jacent	« véga »	+	+
durée jusqu'à échéance	« thêta »	–	+/–
taux sans risque	« rho »	–	+
dividendes versés		–	+

La volatilité n'est pas connue :

- estimation fondée sur la volatilité historique (écart-type des rentabilités passées)
- tenir compte de la variation dans le temps (modèles statistique GARCH Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity).

Pour des options cotées :

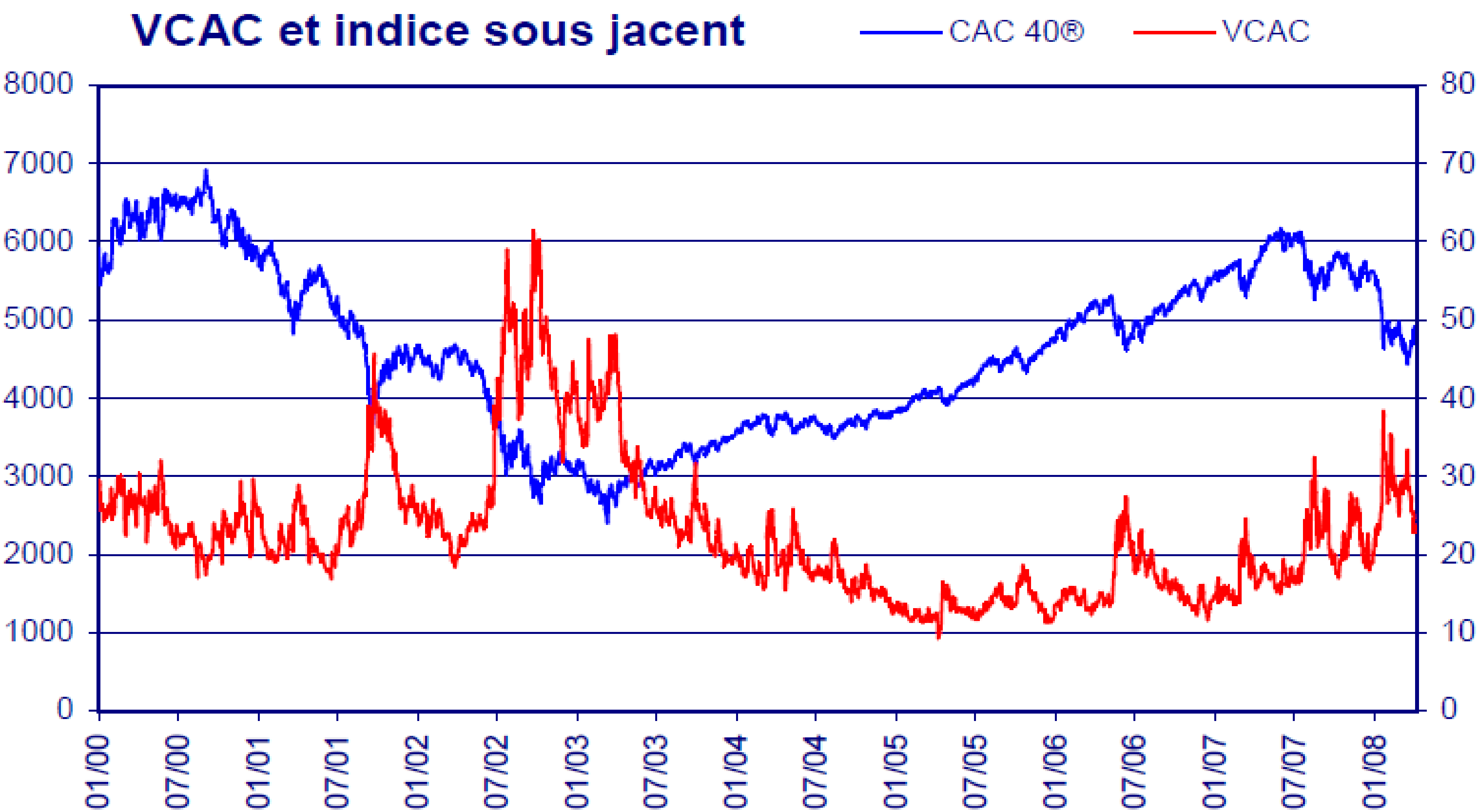
- le prix est donné
- on peut en déduire une « volatilité implicite » du sous-jacent

« Euronext en lance le 3 septembre 2007 trois nouveaux indices de volatilité : AEX® Volatility Index, BEL 20® Volatility Index et CAC 40® Volatility Index.

- mesurent la volatilité implicite du prix des options....
- à partir des prix d'exercice hors de la monnaie des options d'achat et de vente sur indices de Liffe.

Exprimés en points de pourcentage, ces indices reflètent, sur une base annualisée, la variation attendue de l'indice sous-jacent durant les trente prochains jours.
Un niveau élevé traduit des anticipations de fluctuations plus importantes de l'indice sous-jacent, et inversement.

http://volatility.euronext.com/


VCAC et indice sous jacent
CAC 40®
VCAC
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
80
70
60
50
40
30
20
10
0
01/00
07/00
01/01
07/01
01/02
07/02
01/03
07/03
01/04
07/04
01/05
07/05
01/06
07/06
01/07
07/07
01/08