2- La relation risque – rentabilité attendue

L'incertitude est au cœur de la logique financière.

Par la composition de leur portefeuille, les investisseurs choisissent un profil de risque.

Si on suppose que les rentabilités sont distribuées selon une loi normale, alors deux paramètres sont déterminants : l'espérance mathématique et l'écart-type.

À l'équilibre des marchés, il existe une relation entre la rentabilité attendue d'un actif et son risque (mesuré par l'écart-type de la rentabilité).

1- LA DISTRIBUTION DE PROBABILITÉ DES RENTABILITÉS

1.1- LA RENTABILITÉ

La rentabilité d'une action au cours d'une période est définie par :

$$R = \frac{Div_1 + P_1 - P_0}{P_0}$$

La distribution d'un dividende fait baisser le cours du montant du dividende, mais ne provoque pas de discontinuité dans la rentabilité...

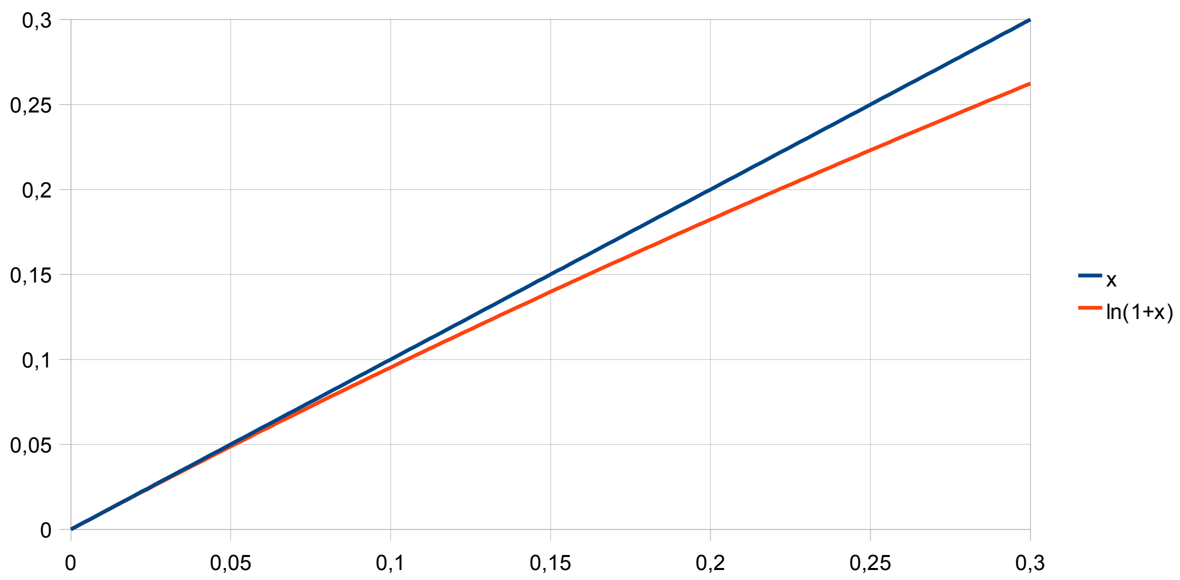
En l'absence de dividendes :

taux de rentabilité « simple » ou « arithmétique » : $R_a = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$

taux de rentabilité « logarithmique » : $R_l = \ln \frac{P_1}{P_0}$

R_l est une approximation de R_a : $R_l = \ldots = \ln(1+R_a) \approx R_a$

mais comme $x \geq \ln(1+x)$, $R_l \leq R_a$.



1.2- LA LOI NORMALE

hypothèse : la rentabilité (arithmétique) suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$

μ = espérance mathématique de la rentabilité
σ = écart-type de la rentabilité (mesure du risque, ou de la « volatilité »).

→ le prix P_1 suit une loi normale (valeur négatives possibles)

hypothèse alternative : la rentabilité *logarithmique* suit une loi normale $N(\mu, \sigma)$

→ le prix P_1 suit une loi log-normale

- P_1 ne prend pas de valeur négative → responsabilité limitée des actionnaires
- hypothèse cohérente avec l'efficience faible du marché (non corrélation sérielle des rentabilités) → application du théorème central limite.

$F(x)$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$F(x) = Pr\left(\frac{R-\mu}{\sigma} \leq x\right)$$

rappel :

$$f(x) = \frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}$$ fonction de densité de la loi normale centrée réduite, $N(0, 1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Intervalles de confiance :

$$Pr\left(\mu - 1 \times \sigma \;\leq\; R \;\leq\; \mu + 1 \times \sigma\right) \;\approx\; 67\%$$

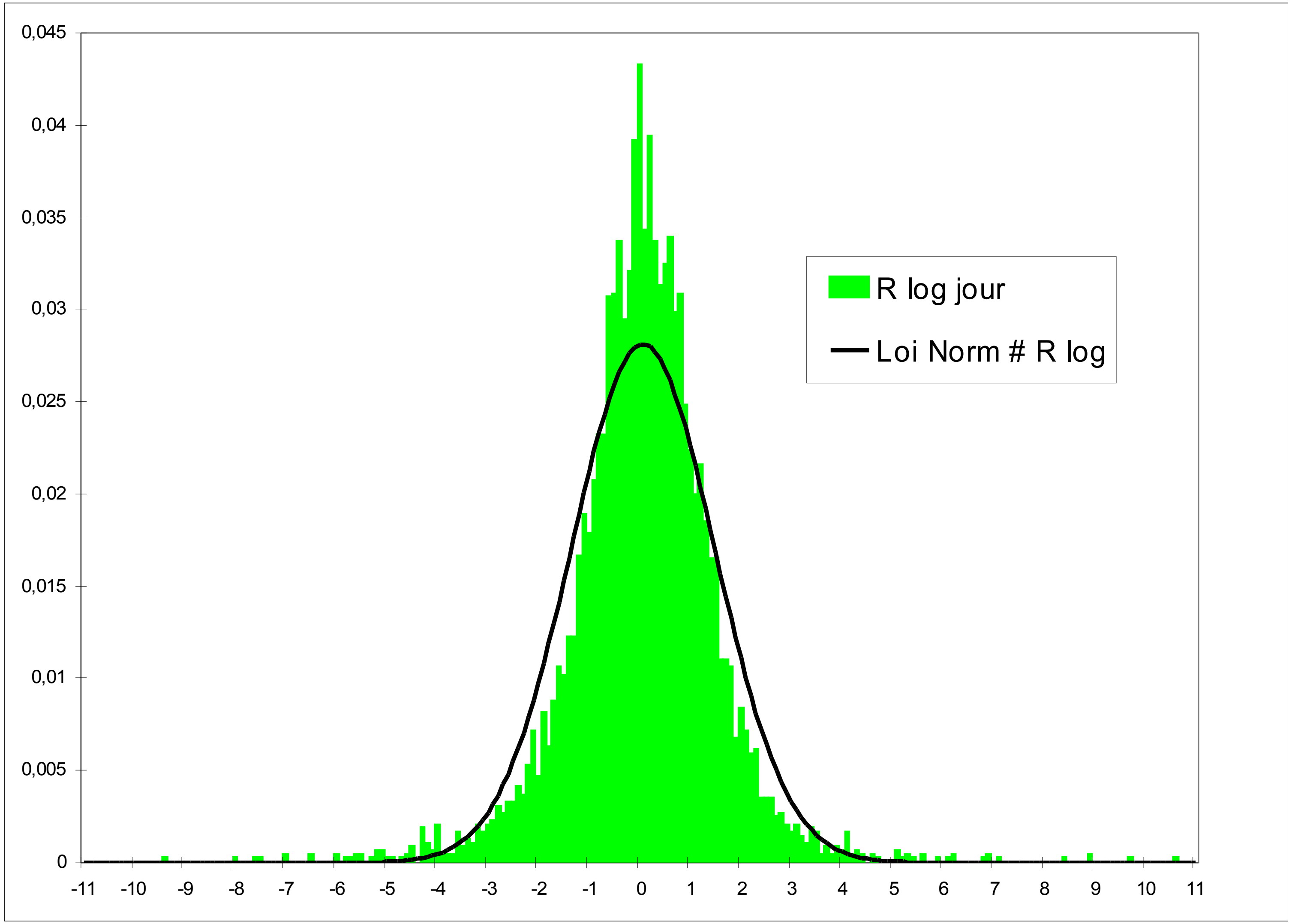
$$Pr\left(\mu - 1{,}96 \times \sigma \;\leq\; R \;\leq\; \mu + 1{,}96 \times \sigma\right) \;\approx\; 95\%$$

Typiquement, les rentabilités des actions :

- sont supposées distribuées selon une loi normale dans de nombreux modèles théoriques ;
- ne sont pas distribuées empiriquement selon une loi normale.

Empiriquement :

- Asymétrie négative ($S < 0$) : distribution étirée à gauche, sur représentation des valeurs basses
- Kurtosis excédentaire positive ($K > 0$) : distribution leptokurtique, trop de valeurs extrêmes (queues de distribution épaisses) et de valeurs proches de la moyenne.



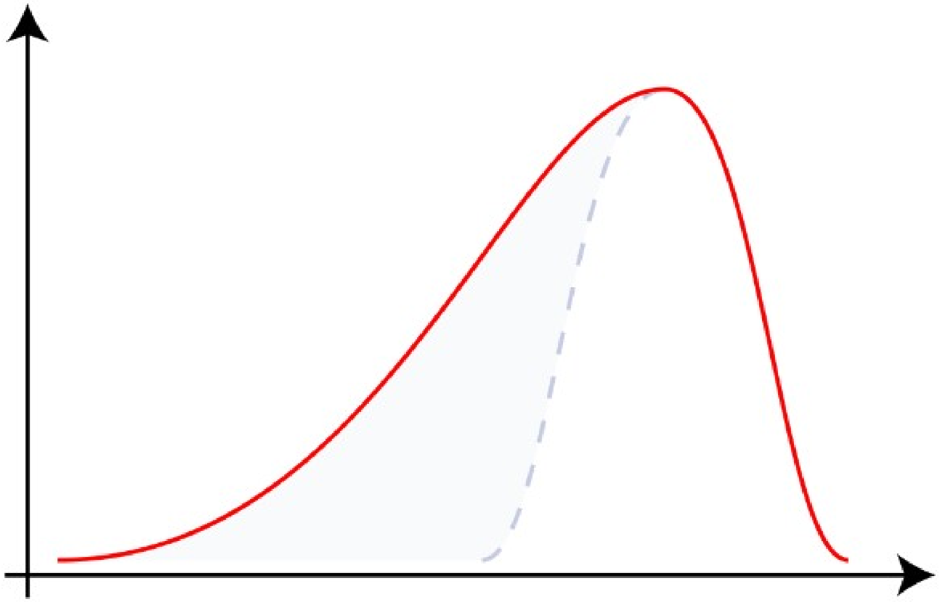
CAC 40 (mars 1990 – septembre 2009)

Asymétrie (skewness) :

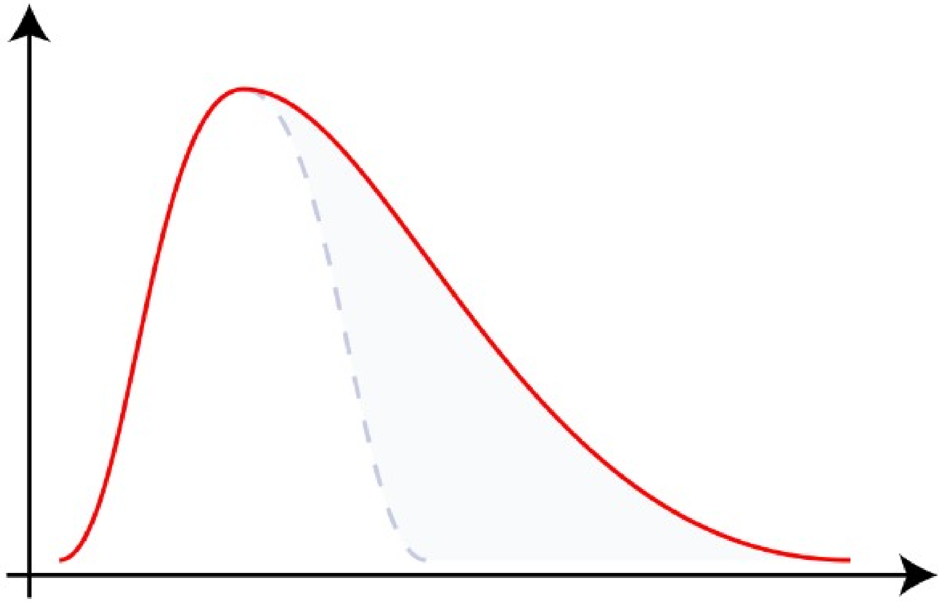
Coefficient d'asymétrie : $S = \dfrac{E\left(\tilde{R} - E\,\tilde{R}\right)^3}{\sigma^3}$

Pour une variable gaussienne, $S = 0$ (distribution symétrique)

Asymétrie négative ($S < 0$)	Asymétrie positive ($S > 0$)
densité étirée à gauche (par exemple à cause d'une valeur plafond)	densité étirée à droite (par exemple à cause d'une valeur plancher)
Souvent moyenne < médiane mode « trop à droite »	Souvent moyenne > médiane mode « trop à gauche »



Negative Skew



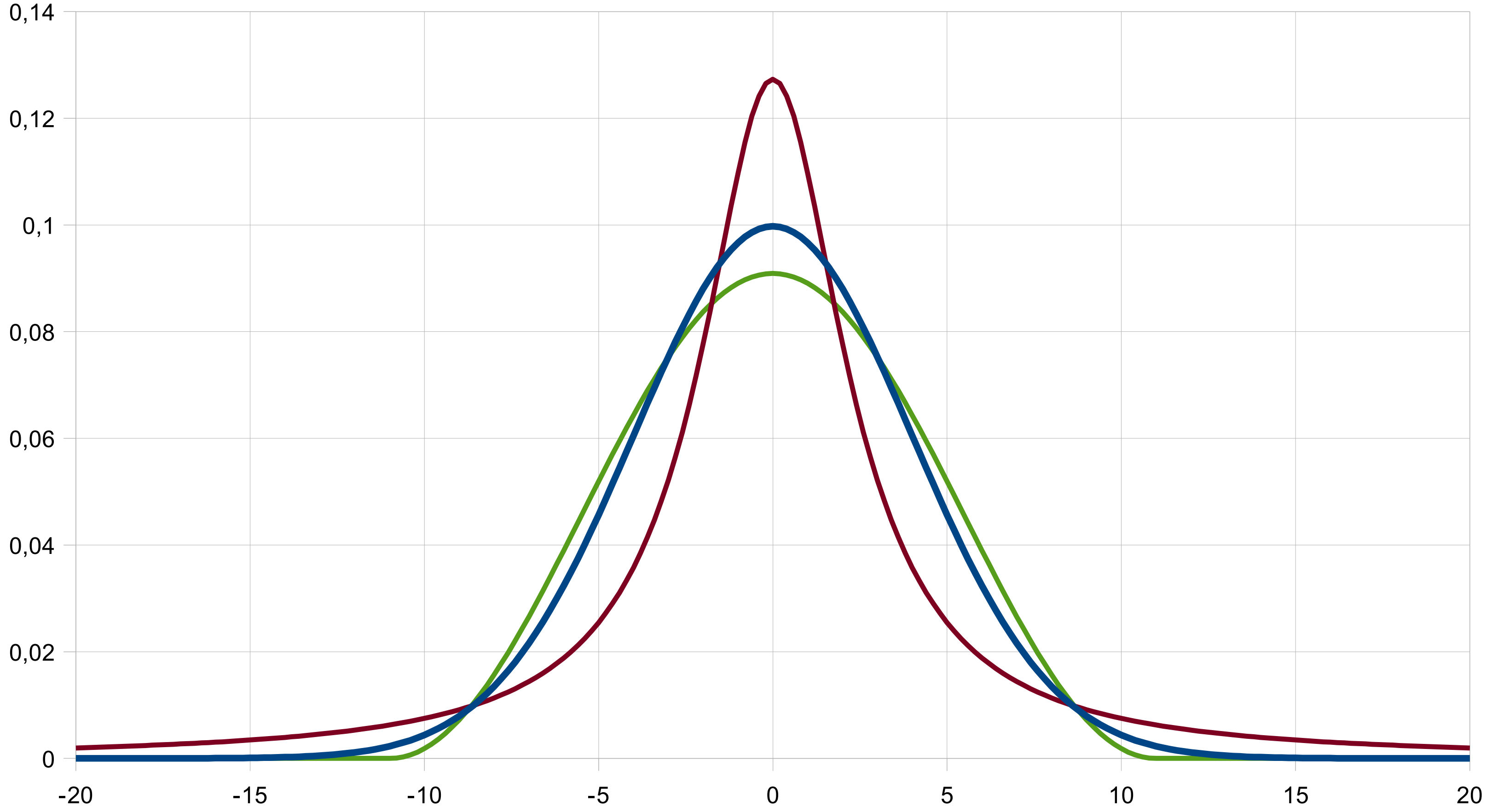
Positive Skew

Applatissement (kurtosis) :

Coefficient d'excès de kurtosis : $K = \frac{E\left(\tilde{R} - E\,\tilde{R}\right)^4}{\sigma^4} - 3$

Pour une variable gaussienne, $K = 0$ (distribution mésokurtique).

Kurtosis excédentaire négative ($K < 0$) distribution platykurtique	Kurtosis excédentaire positive ($K > 0$) distribution leptokurtique
Trop de valeurs moyennes par rapport à une gaussienne	Trop de valeurs extrêmes par rapport à une gaussienne (*queues épaisses*)



En bleu : loi normale
En rouge : distribution leptokurtique (queues épaisses)
En vert : distribution platikurtique.

2- RENTABILITÉ ET RISQUE D'UN PORTEFEUILLE DE 2 À *N* ACTIFS

2.1- RENTABILITÉ D'UN PORTEFEUILLE DE 2 ACTIFS

Portefeuille *P* constitué de deux titres, en proportions x_1 et $x_2 = 1 - x_1$

$x_i > 0$: position longue (on a acheté l'actif *i*)
$x_i < 0$: position courte (on a emprunté l'actif *i*)

Les taux de rentabilité sont considérés comme des variables aléatoires R_i, dont les propriétés statistiques sont connues (observations des séries passées).

Valeur d'un actif en *t* : $P_{i,t}$ $\Rightarrow$ Rentabilité arithmétique de l'actif : $R_i = \dfrac{P_{i,1} - P_{i,0}}{P_{i,0}}$

- Espérance : $E(R_i) = \mu_i$, $\rightarrow$ **$\boldsymbol{\mu_i}$ ≈ rentabilité moyenne**
- Variance : $V(R_i) = \sigma_i^2$, $\rightarrow$ **$\boldsymbol{\sigma_i}$ ≈ « risque »**
- Covariance : $Cov(R_1, R_2) = \sigma_{12}.= \sigma_{21}$.
- Coefficient de corrélation : $\rho_{12} = \sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$

Valeur d'un portefeuille contenant n_1 actifs 1, et n_2 actifs 2 : $V_t = n_1 P_{1,t} + n_2 P_{2,t}$
(valeur du portefeuille = somme des valeurs des actifs qui le composent)

Part de l'actif *i* dans le portefeuille : $x_i = \frac{n_i P_{i,0}}{V_0}$

Rentabilité arithmétique du portefeuille : $R_P = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \ldots = x_1 R_1 + x_2 R_2$

La rentabilité arithmétique du portefeuille est égale à la moyenne des rentabilités arithmétiques des actifs qui le composent, pondérée par leur poids.

NB : la rentabilité *logarithmique* du portefeuille *n'est pas égale* à la moyenne des moyenne des rentabilités *logarithmiques* des actifs qui le composent...

Si les rentabilités des actifs suivent des lois normales, alors la rentabilité du portefeuille suit également une loi normale.

Espérance de la rentabilité du portefeuille (rentabilité attendue) : $\mu_P = x_1\ \mu_1 + x_2\ \mu_2$

Variance de la rentabilité : $\sigma_P^2 = x_1^2\ \sigma_1^2 + x_2^2\ \sigma_2^2 + 2\ x_1\ x_2 \sigma_{12}$

soit : $\sigma_P^2 = x_1^2\ \sigma_1^2 + x_2^2\ \sigma_2^2 + 2\ x_1\ x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}$

Écart-type de la rentabilité (risque) : $\sigma_P = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2\, x_1\, x_2\, \sigma_2\, \sigma_1\, \rho_{12}}$

Cas n°1 : un des deux actifs est sans risque (Tobin 1958)

L'**actif sans risque** paie un taux de rentabilité réelle fixe, sans risque de défaut (type obligation d'État indexée).

Un portefeuille comprenant

- un titre (ou portefeuille) risqué, (σ_R, μ_R), en proportion x,
- et un actif sans risque, $(0, r_f)$, en proportion $(1 - x)$,

a une rentabilité : $R_P = x\, R_R + (1 - x) r_f$

donc une rentabilité attendue : $\mu_P = x\, \mu_R + (1 - x) r_f$

et un risque : $\sigma_P = x\, \sigma_R$

D'où : $\mu_P = r_f + \dfrac{\mu_R - r_f}{\sigma_R} \sigma_P$

→ Rentabilité espérée et risque se combinent linéairement

$\frac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du titre risqué.

$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ s'appelle le « ratio de Sharpe » du portefeuille.

On a donc : $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mu_R - r_f}{\sigma_R}$

Le portefeuille a le même ratio de Sharpe que l'actif risqué qu'il contient.

$\mu_P - r_f$ → mesure la rentabilité excédentaire moyenne (rémunération du risque)

σ_P → mesure la « quantité » de risque

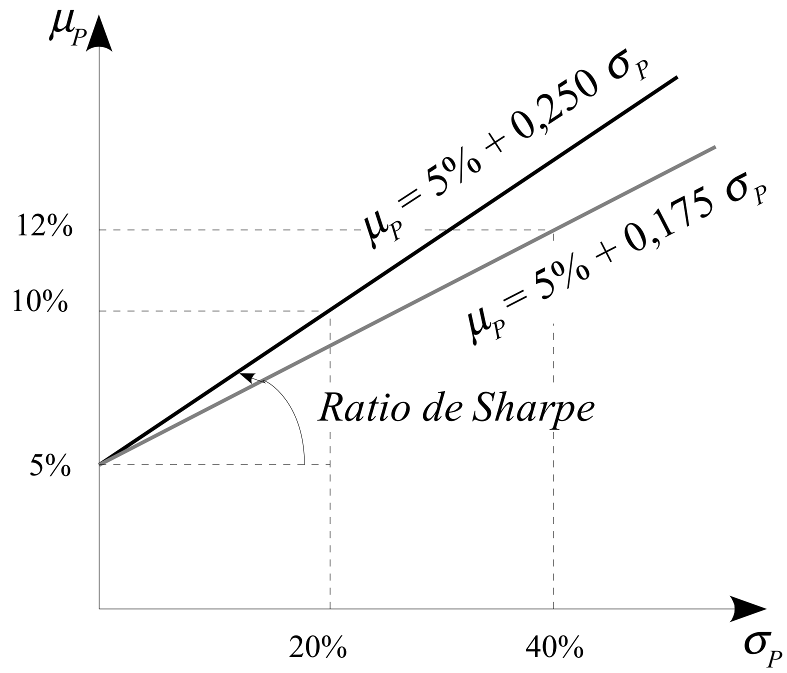
$\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ → s'interprète comme la rémunération *unitaire* du risque

Exemple :

actif sans risque : $r_f = 5\%$

actifs risqués, de rentabilités :

- R_1 caractérisé par $(\sigma_1, \mu_1) = (40\%, 12\%)$
- R_2 caractérisé par $(\sigma_2, \mu_2) = (20\%, 10\%)$



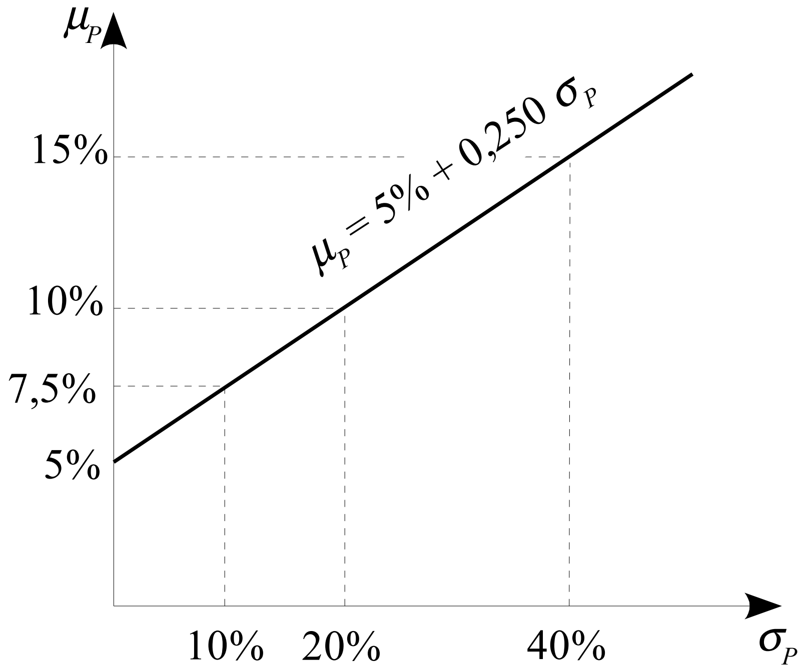
Tous les portefeuilles combinant l'actif sans risque et R_1 sont dominés par ceux qui contiennent R_2 au lieu de R_1.

Parmi des actifs risqués mutuellement exclusifs → choisir l'actif ayant le ratio de Sharpe le plus élevé.

La possibilité de placer dans un actif sans risque $(1 - x > 0)$ et d'emprunter au taux sans risque $(1 - x < 0)$ élargit l'ensemble des portefeuilles possibles.

En combinant l'actif sans risque
et R_2 caractérisé par $(\sigma_2, \mu_2) = (20\%, 10\%)$...

… Comment obtenir $\mu_P = 15\%$?
… Comment obtenir $\sigma_P = 10\%$?



Cas n°2 : les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés positivement

$$\rho_{12} = +1$$

rentabilité attendue du portefeuille : $\mu_P = x_1\ \mu_1 + x_2\ \mu_2$

risque du portefeuille : $\sigma_P^2 = x_1^2\ \sigma_1^2 + x_2^2\ \sigma_2^2 + 2\ x_1\ x_2 \sigma_1 \sigma_2$

soit : $\sigma_P = x_1\ \sigma_1 + x_2\ \sigma_2$

D'où : $\mu_P = \mu_1 + \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2 - \sigma_1}(\sigma_P - \sigma_1)$

→ Rentabilité espérée et risque se combinent linéairement

Constitution d'un **portefeuille sans risque** à partir de 2 actifs parfaitement corrélés positivement :

$$x_1 = \sigma_2 / (\sigma_2 - \sigma_1) \quad \text{et} \quad x_2 = -\sigma_1 / (\sigma_2 - \sigma_1)$$

→ acheter le titre ayant la volatilité la plus basse, vendre à découvert celui qui a la volatilité la plus haute.

Cas n°3 : les deux actifs sont risqués et parfaitement corrélés négativement

$$\rho_{12} = -1$$

rentabilité attendue du portefeuille : $\mu_P = x_1\,\mu_1 + x_2\,\mu_2$

risque du portefeuille : $\sigma_P^2 = x_1^2\,\sigma_1^2 + x_2^2\,\sigma_2^2 - 2\,x_1\,x_2\sigma_1\sigma_2$

soit : $\sigma_P = x_1\,\sigma_1 - x_2\,\sigma_2$

Le portefeuille est **sans risque** avec : $x_1 = \sigma_2/(\sigma_2+\sigma_1)$ et $x_2 = \sigma_1/(\sigma_2+\sigma_1)$

Et :

$$\mu_P = \mu_1 + \frac{\mu_2-\mu_1}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_P-\sigma_1) \quad \text{pour} \quad x_1 > \sigma_2/(\sigma_1+\sigma_2)$$

$$\mu_P = \mu_2 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma_2-\sigma_1}(\sigma_P-\sigma_1) \quad \text{pour} \quad x_1 < \sigma_2/(\sigma_1+\sigma_2)$$

→ Relation entre rentabilité attendue et risque donnée par deux segments de droite

Cas n°4 : les deux actifs sont risqués et imparfaitement corrélés

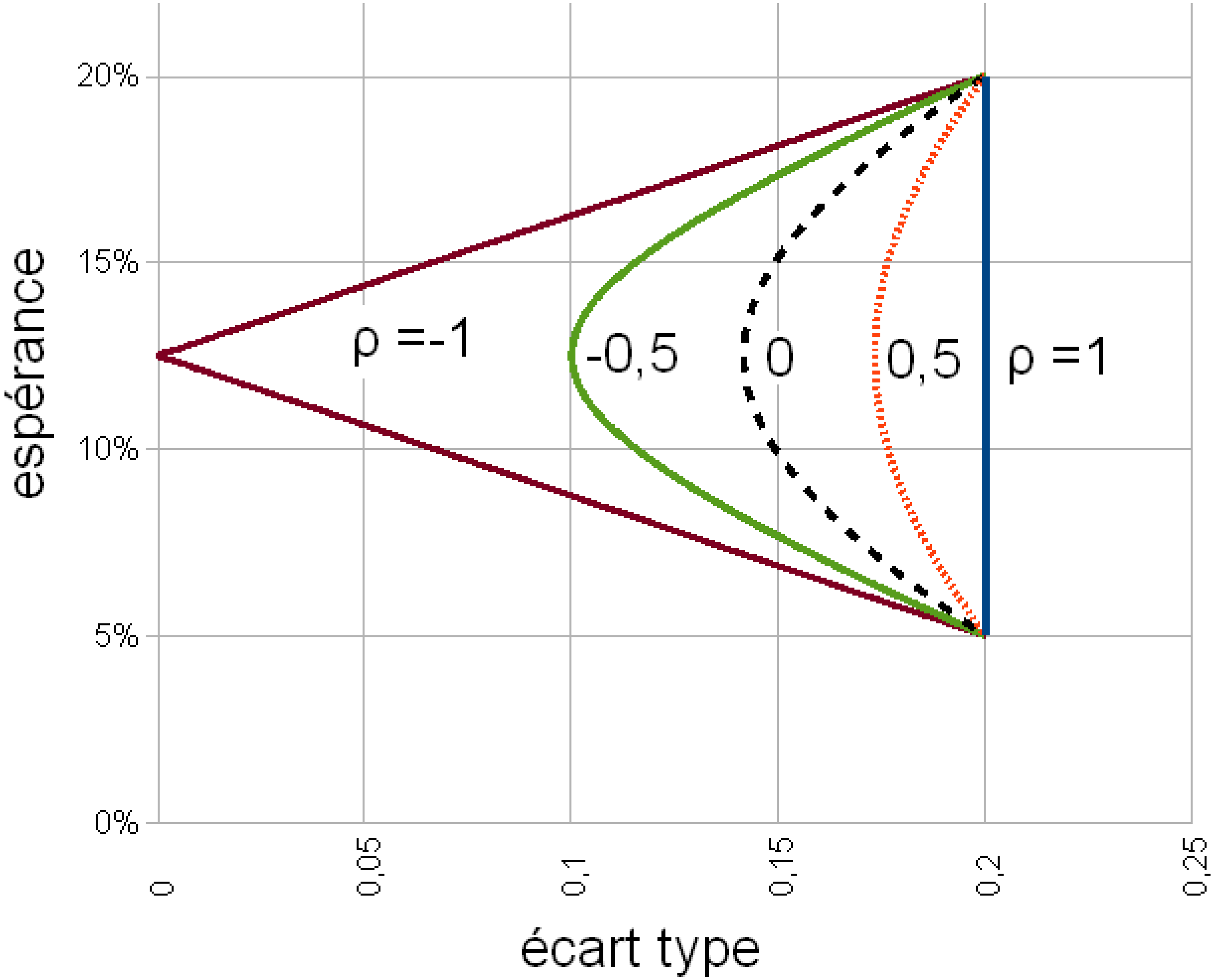
$$-1 < \rho_{12} < +1$$

rentabilité attendue du portefeuille : $\mu_P = x_1\,\mu_1 + x_2\,\mu_2$
risque du portefeuille : $\sigma_P^{\,2} = x_1^{\,2}\,\sigma_1^{\,2} + x_2^{\,2}\,\sigma_2^{\,2} + 2\,x_1\,x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$

→ **La relation entre rentabilité attendue et risque est non linéaire**.

Exemple : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à deux actifs pour diverses valeurs du coefficient de corrélation.

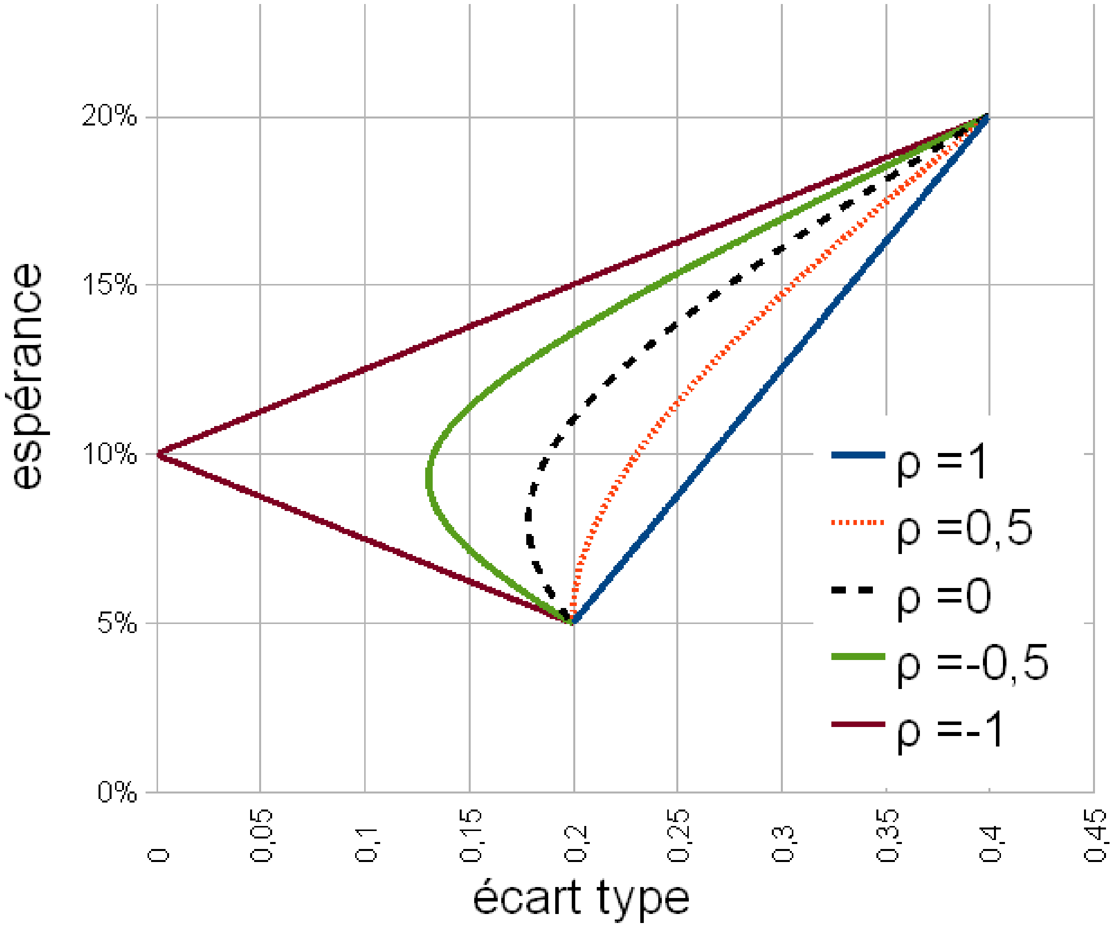
Avec :
$\mu_1 = 5\%$ $\mu_2 = 20\%$
$\sigma_1 = 20\%$ $\sigma_2 = 20\%$
(même « risque »)



Avec :

$\mu_1 = 5\% \quad \mu_2 = 20\%$

$\sigma_1 = 20\% \; \sigma_2 = 40\%$



2.2- GÉNÉRALISATION POUR UN PORTEFEUILLE À N ACTIFS

Portefeuille → un vecteur des « parts » d'actifs : $X' = [x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N]$
Rentabilités des actifs : $R' = [R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_N]$

Matrice des variances-covariances de N actifs : $\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \ldots & \sigma_{1j} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{i1} & \ldots & \sigma_i^2 & \ldots & \sigma_{iN} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{N1} & \ldots & \sigma_{Nj} & \ldots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$

Rentabilité du portefeuille : $R_P = X' R = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i$

Espérance de la rentabilité : $\mu_P = \mathrm{E}(R_P) = X' \mathrm{E}(R) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$

Variance de la rentabilité : $\mathrm{V}(R_P) = X' \Omega X = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$

(N termes de variance et $N^2 - N$ termes de covariances)

3- RÉDUCTION DU RISQUE PAR LA DIVERSIFICATION

Importance de la covariance des rentabilités...

Supposons que tous les titres ont :

- la même rentabilité attendue, μ
- le même volatilité, σ
- le même coefficient de corrélation 2 à 2, ρ

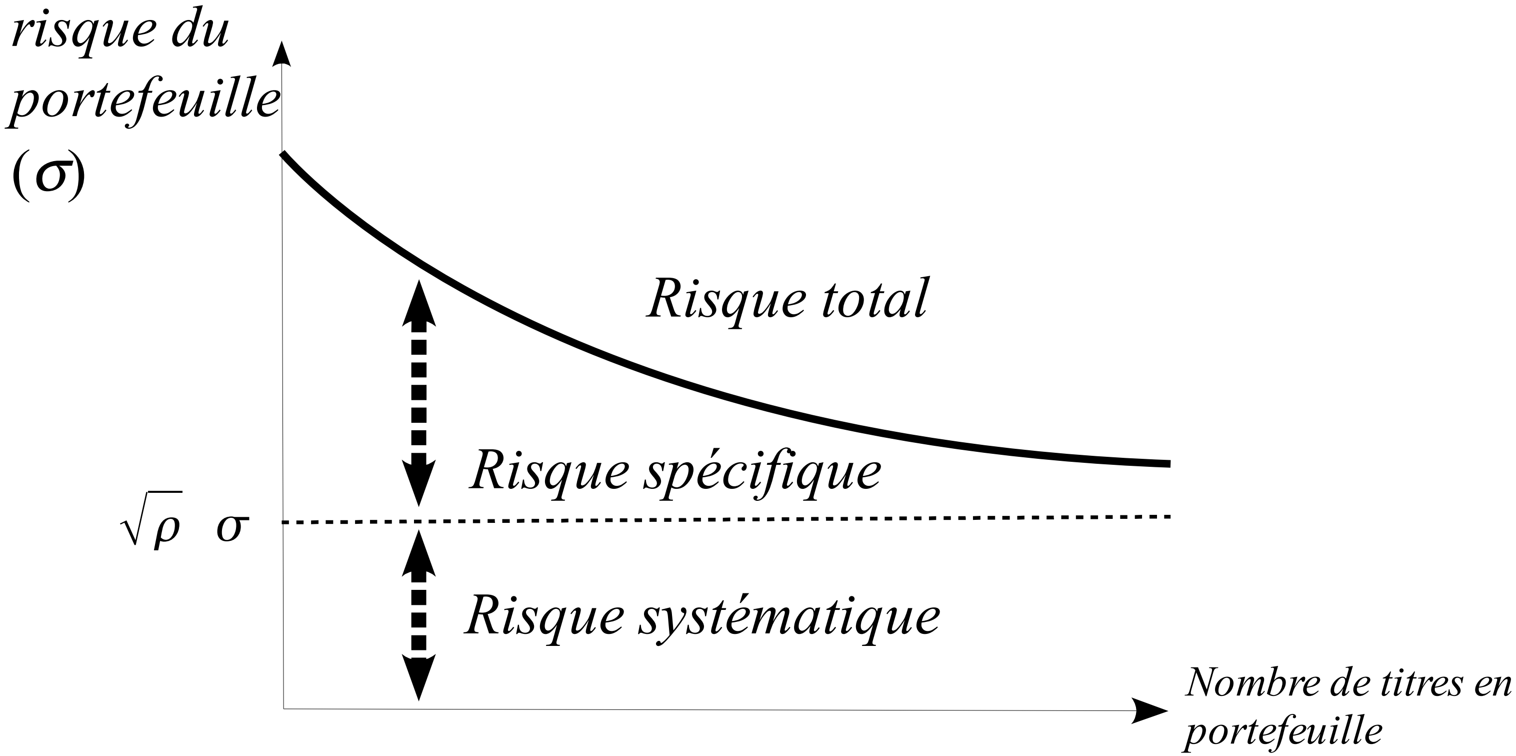
Constituons un **portefeuille équipondéré** : $x_i = 1/N$

Espérance de la rentabilité : $\mu_P = \mu$

Variance de la rentabilité : $\sigma_P = \dfrac{\sigma^2}{N} + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\rho\,\sigma^2$

→ En augmentant le nombre de titres en portefeuille (en diversifiant), le « risque » du portefeuille diminue. La covariance moyenne détermine le « socle » de risque qui subsiste après diversification.

Diagramme de Wagner et Lau :



Distinguer entre :

- risque total d'un titre (sa volatilité)
- risque systématique (ne pouvant être éliminé par diversification)
- risque spécifique (diversifiable).

4- MESURE DU RISQUE D'UN ACTIF

Le risque d'un actif *i* est évalué par sa contribution au risque du portefeuille.

- mesure absolue : la covariance de l'actif avec le portefeuille σ_{iP}
- mesure relative : le bêta de l'actif dans le portefeuille β_{iP}

La covariance étant une fonction linéaire :

$$\sigma_{iP} = \mathrm{Cov}\left(R_i, R_P\right) = \mathrm{Cov}\left(R_i, \sum_{j=1}^{N} x_j R_j\right) = \sum_{j=1}^{N} x_j \mathrm{Cov}\left(R_i, R_j\right) = \sum_{j=1}^{N} x_j \sigma_{ij}$$

→ la covariance d'un actif avec le portefeuille est égale à la moyenne pondérée des covariances de l'actif avec tous les actifs contenus dans le portefeuille.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{N} x_i \sigma_{iP}$$

→ la variance (de la rentabilité) du portefeuille est égale à la moyenne pondérée des covariances des actifs avec le portefeuille.

Le bêta de l'actif par rapport au portefeuille β_{iP} est le rapport entre la covariance de l'actif avec le portefeuille σ_{iP} et la variance du portefeuille σ_P.

$$\beta_{iP} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}$$

$\beta_{iP} > 1$: le risque du titre i dans le portefeuille P est supérieur au risque du portefeuille (le titre i contribue à accroître le risque du portefeuille).

$\beta_{iP} < 1$: le risque du titre i dans le portefeuille P est inférieur au risque du portefeuille (le titre i contribue à diminuer le risque du portefeuille).

Propriété : la moyenne des bêtas des actifs par rapport au portefeuille est égale à 1.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_{iP} = 1$$

Deux interprétations du bêta :

(1) **Impact marginal du titre sur le risque du portefeuille**.

L'accroissement en pourcentage du risque du portefeuille dû à un accroissement d'un point de pourcentage de la part du titre en portefeuille, vaut :

$$\frac{d\sigma_P/\sigma_P}{d x_i} = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}$$

en effet : $\dfrac{d\sigma_P^2}{d x_i} = 2\sigma_{iP}$ et $\dfrac{d\sigma_P^2}{d\sigma_P} = 2\sigma_P$

(2) **Sensibilité de la rentabilité du titre à la rentabilité du portefeuille** (pente d'une droite de régression).

En supposant que les rentabilités sont « normalement » distribuées et que la régression linéaire par les MCO de R_i sur R_P, donne la relation :

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_P + \varepsilon_i$$

- α_i et β_i sont les coefficients de la régression,
- β_i est précisément égal à σ_{iP}/σ_P^2
- ε_i est le résidu, d'espérance nulle, non corrélé à R_P.

5- LE CHOIX DU PORTEFEUILLE OPTIMAL

Si on combine tous les titres « risqués » disponibles de toutes les manières possibles, on obtient *l'ensemble des portefeuilles possibles*, caractérisés par un taux de rentabilité de moyenne μ et d'écart-type σ.

Un **portefeuille efficient** est un portefeuille

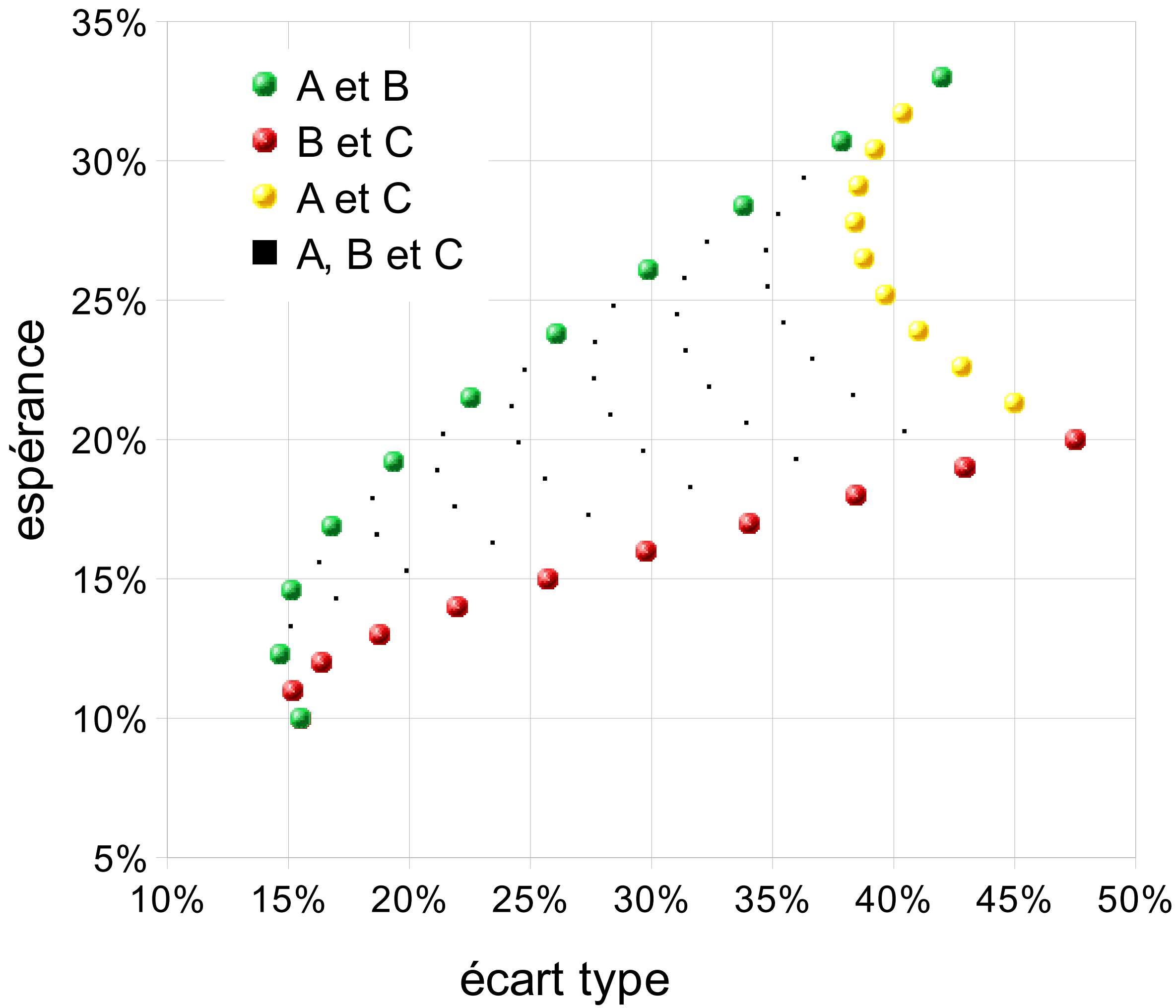
- dont la rentabilité moyenne est maximale pour un niveau de risque donné, ou
- dont le risque est minimal pour une rentabilité donnée.

Parmi tous les portefeuilles possibles, seuls les portefeuilles efficients doivent être considérés.

Exemple : Rentabilité moyenne en fonction de l'écart-type de rentabilité d'un portefeuille à trois actifs, A, B et C.

	Coefficient de corrélation		
	A	B	C
A	1	0,02	0,5
B		1	0,1
C			1

	μ_i	σ_i
A	33 %	42,0 %
B	10 %	15,5 %
C	20 %	47,5 %



On peut montrer algébriquement que :

$$\sigma_P^2 = \sigma_V^2 + \left(\frac{\mu_P - \mu_V}{a}\right)^2$$

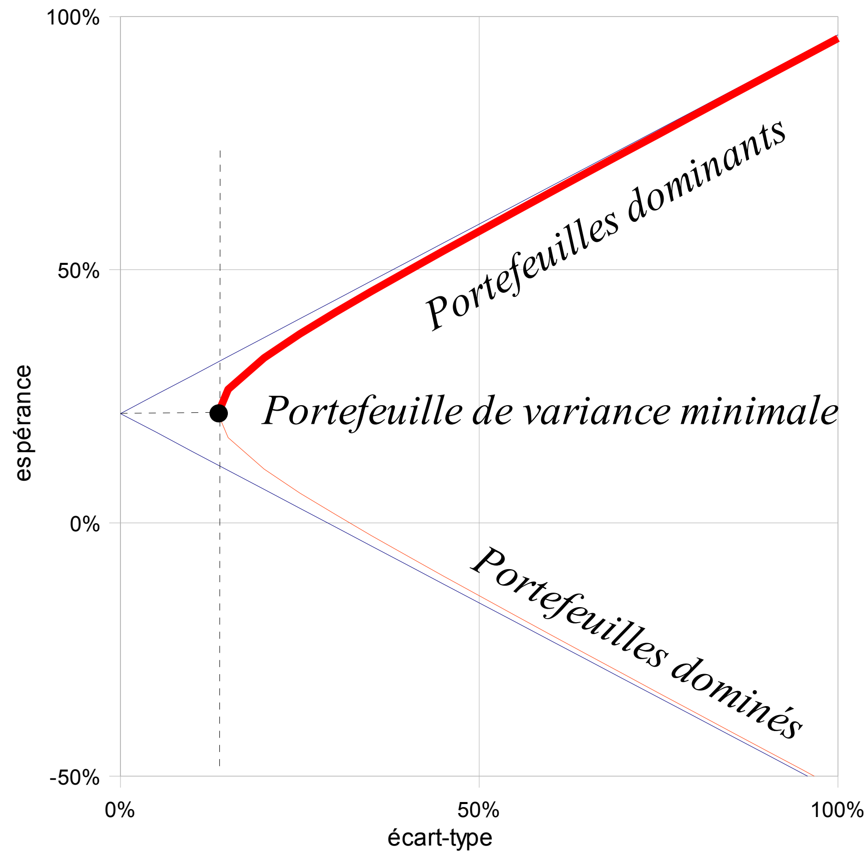
La frontière de l'ensemble des portefeuilles est une branche d'hyperbole d'équation : $\mu = \mu_V \pm a\sqrt{\sigma^2 - \sigma_V^2}$ dans le plan (σ, μ).

où *a* est une constante (qui correspond à la pente de la branche asymptotique, et dont la valeur dépend des caractéristiques des rentabilités des titres existant, leurs moyennes, variances, covariances)

et σ_V et μ_V sont les caractéristiques du portefeuille de variance minimale.

Exemple :

$$\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - (13{,}59\,\%)^2}$$



La frontière efficiente « régulière » est la branche supérieure de l'hyperbole (portefeuilles dominants).

Les rentabilités espérées se combinent linéairement, tandis que les « risques » se combinent non linéairement, à cause des covariances.

Les portefeuilles d'actifs risqués « efficients » vérifient plusieurs **propriétés** :

1. Par construction, la rentabilité moyenne d'un portefeuille efficient est une fonction croissante du risque (si on modifie un portefeuille efficient de manière à augmenter la rentabilité moyenne, alors on est contraint d'augmenter le risque).

2. Toute combinaison linéaire de portefeuilles efficients est un portefeuille efficient (en particulier, le portefeuille de marché est efficient).

3. Toute la frontière « régulière » peut être générée par la combinaison linéaire de deux portefeuilles efficients quelconques, en combinant éventuellement des positions longues et courtes (« théorème de séparation à deux fonds » de F. Black 1972, qui généralise celui de Tobin 1958).

4. La rentabilité excédentaire par unité de risque de chaque titre est la même que la rentabilité excédentaire par unité de risque du portefeuille :

$$\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_{iP}} = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P^2}$$

Autrement dit, la prime de risque de chaque titre est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille :

$$\mu_i - r_f = \frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}\left(\mu_P - r_f\right) = \beta_{iP}\left(\mu_P - r_f\right)$$

Avec un actif sans risque, la frontière efficiente « singulière » est la demi-droite qui relie le titre sans risque au portefeuille d'actifs risqués ayant le ratio de Sharpe le plus élevé (« portefeuille tangent »).

<u>Exemple :</u>

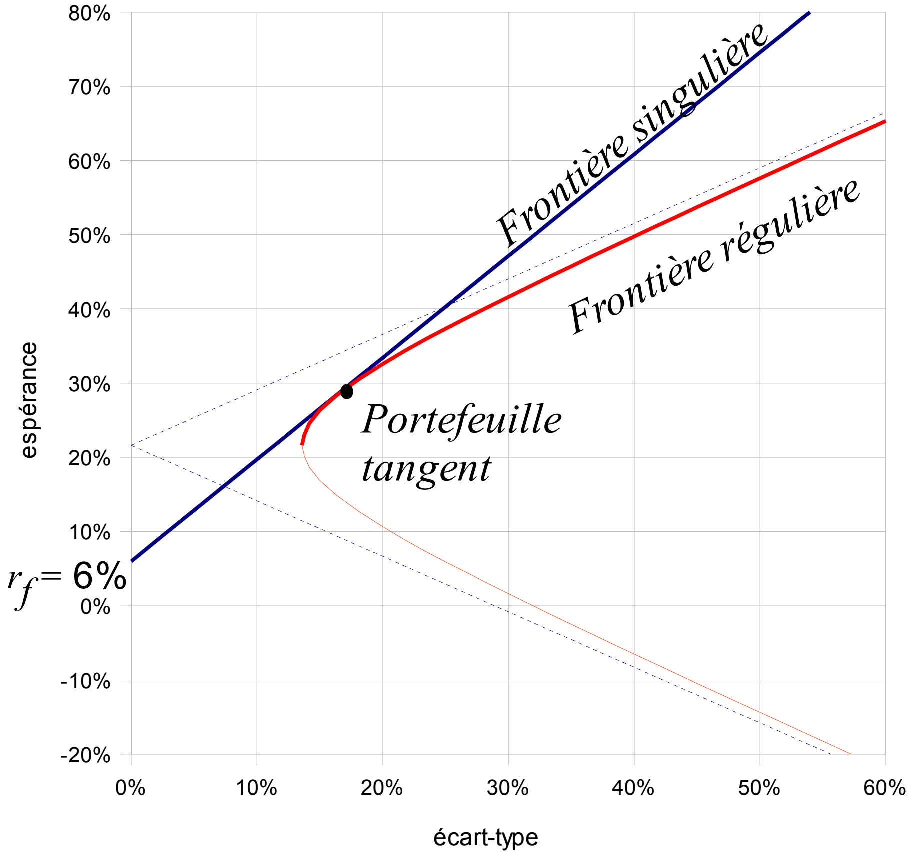
Frontière régulière :

$$\mu = 21{,}62\,\% \pm 0{,}7479\sqrt{\sigma^2 - (13{,}59\,\%)^2}$$

	σ	μ
centre:	0	21,62%
portef var min	13,59%	21,62%
portef tangent	16,22%	28,23%

pente asymptote : 0,7479

pente frontière singulière : 1,3708



La frontière singulière indique un **principe de séparation des fonds** (« théorème de séparation à deux fonds » de Tobin 1958) :

Des investisseurs ayant les mêmes anticipations sur les rentabilités et leurs corrélations, investissent dans le même portefeuille (ou fonds) d'actifs risqués (celui qui a le ratio de Sharpe le plus élevé : le portefeuille tangent).

→ Sa composition est indépendante de la tolérance ou de l'aversion au risque des investisseurs.
C'est l'allocation entre ce fonds et l'actif sans risque qui diffère selon la tolérance ou l'aversion au risque.

→ la prime de risque de chaque titre est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille tangent :

$$\mu_i - r_f = \beta_{iT} \left(\mu_T - r_f \right)$$

Allocation d'actif optimale (Markowitz) :

Préférences : $U(\mu, \sigma) = \mu - a\,\sigma^2$

$a \rightarrow$ « aversion au risque » (au sens de Markowitz)

$\mu = r_f + \frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T}\sigma$ où μ_T et σ_T sont les caractéristiques du portefeuille tangent.

On note :

- x la part investie dans le portefeuille risqué (portefeuille tangent)
- (1 – x) la part investie en actif sans risque

On obtient : $x^* = \frac{1}{2a}\frac{\mu_T - r_f}{\sigma_T^2}$.

6- LE MEDAF

La théorie du portefeuille conseille de choisir un portefeuille risqué efficient ou un partage entre actif sans risque et portefeuille d'actifs risqués selon le degré d'aversion au risque.

Le MEDAF (modèle d'évaluation des actifs financiers) propose une détermination des **prix d'équilibre des actifs** (Sharpe, Treynor, Lintner, Mossin)

1. Des investisseurs riscophobes évaluent les portefeuilles en termes d'espérance et de variance des rentabilités sur une période (il existe des extensions sur plusieurs périodes, des extensions avec des fonctions d'utilité espérée)
2. Le marché des titres est parfait (pas de coûts de transactions, de restrictions de ventes à découvert, de taxes ; information disponible sans coût ; possibilité de prêt et d'emprunt au taux sans risque)
3. Les investisseurs ont accès aux mêmes opportunités d'investissement.
4. Les anticipations de rendement (espérances, variances, covariances) sont identiques.

Sous ces hypothèses,
tous les investisseurs déterminent

- la même frontière efficiente régulière,
- le même portefeuille tangent (ayant le ratio de Sharpe le plus élevé) ;

ils détiennent tous des actifs risqués dans les mêmes proportions (celles du portefeuille tangent, le « fonds d'actifs risqués »).

Alors, **à l'équilibre du marché** :

- Tous les titres offerts sont détenus ;
- Le portefeuille « tangent » est le « portefeuille de marché » (tous les titres existants, en proportion de leur capitalisation boursière).
- Le portefeuille de marché est efficient.
- La prime de risque de chaque titre est proportionnelle à la prime de risque du portefeuille de marché :

$$\mu_i = r_f + \beta_{iM}\left(\mu_M - r_f\right)$$

Implications du MEDAF

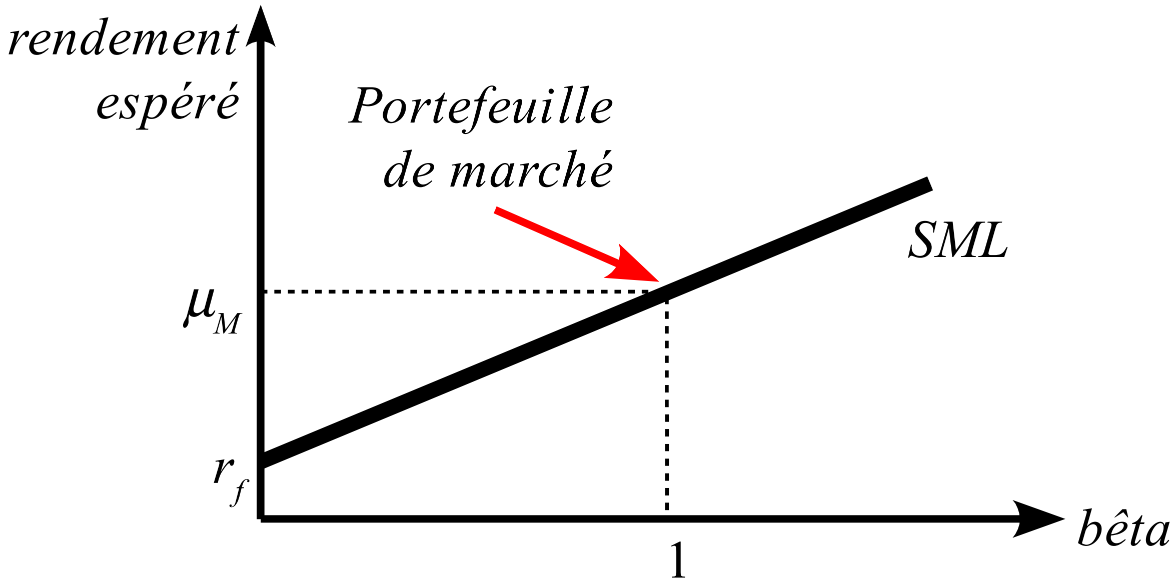
1°- La rentabilité espérée d'un titre ne dépend pas de son risque spécifique.

$$\mu_i = r_f + \beta_i \left(\mu_M - r_f \right)$$

→ La rentabilité (donc la prime de risque) d'un titre dépend de la prime de risque du marché et du bêta du titre.

2°- Le bêta indique la part du risque non diversifiable.

A l'équilibre, tous les portefeuilles et tous les actifs sont sur la « droite du MEDAF » (SML = *Security Market Line*)



Le bêta d'un portefeuille est égal à la moyenne pondérée des bêtas des titres qui le composent.

Le bêta du portefeuille de marché est égal à 1.

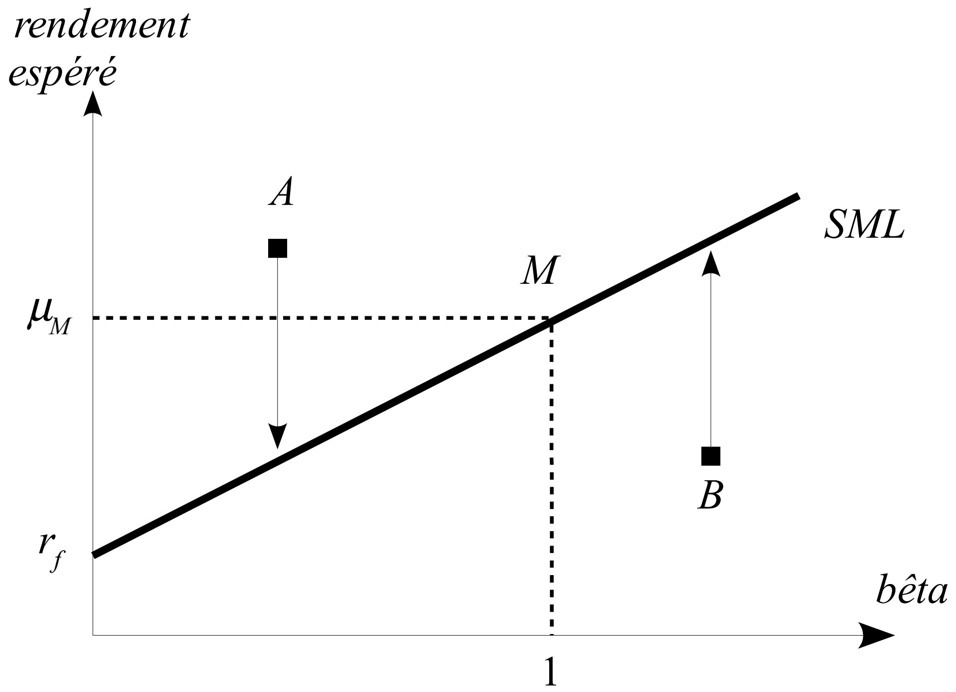
Un portefeuille efficient est composé de titres sans risques et du portefeuille de marché (théorème de séparation en deux fonds).

→ **le bêta du portefeuille efficient mesure la fraction investie dans le portefeuille de marché** !

Seul le risque non diversifiable (la fraction du portefeuille investi dans le portefeuille de marché) « mérite » une rémunération (une rentabilité supérieure au taux sans risque).

Un titre A situé au-dessus de la SML est « sous-évalué » : sa rentabilité espérée est supérieure à celle d'un portefeuille efficient de même bêta, la demande pour ce titre devrait augmenter, ainsi que son prix (de sorte que sa rentabilité espérée diminue).

Un titre B situé au-dessous de la SML est, au contraire, « sur-évalué » (son prix courant est supérieur au prix d'équilibre, sa rentabilité actuelle est inférieure à sa rentabilité d'équilibre).



3°- La valeur d'un titre ne dépend pas du taux de croissance anticipé des cash-flows futurs.

Le modèle de Gordon-Shapiro de détermination du coût du capital est remis en cause et dépassé.

Coût du capital financé par action	=	rendement en dividende	+	taux de croissance anticipé du dividende

Le coût du capital est donné par la rentabilité anticipée (l'espérance mathématique de la rentabilité), qui dépend du bêta, du taux sans risque et de la prime de risque du marché.

Coût du capital	=	taux sans risque	+ bêta x	prime de risque du marché

La valorisation d'un actif à partir du MEDAF :

Rentabilité aléatoire du titre : $\tilde{R}=\dfrac{\tilde{V}_1-V_0}{V_0}$

D'où : $\tilde{V}_1=(1+\tilde{R})V_0$ et $E[\tilde{V}_1]=(1+E[\tilde{R}])V_0=(1+\mu)V_0$

avec $\mu=r_f+\beta(\mu_M-r_f)=r_f+\theta\,\mathrm{Cov}(\tilde{R},R_M)$ avec $\theta=\dfrac{(\mu_M-r_f)}{\sigma_M^2}$

Deux manières d'évaluer V_0 :

$V_0=\dfrac{E[\tilde{V}_1]}{(1+\mu)}$ → valeur actuelle au taux ajusté pour le risque de l'espérance de $\tilde{V}_1$

$V_0=\dfrac{E[\tilde{V}_1]-\theta\,\mathrm{Cov}(\tilde{V}_1,R_M)}{(1+r_f)}$ → valeur actuelle au taux sans risque de l'équivalent-certain de $\tilde{V}_1$

7- LE MODÈLE D'ÉVALUATION PAR ARBITRAGE

Hypothèse : la rentabilité d'un actif est déterminée

- en partie par des facteurs qui reflètent des variables macroéconomiques
- en partie par des éléments spécifiques

La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage implique alors une relation linéaire entre la rentabilité attendue et les facteurs de risques

avec *un* facteur : $R_i = \mu_i + \beta_i (F - E(F)) + \epsilon_i$

F : facteur de risque commun → centré dans la relation ci-dessus.
β_i : sensibilité l'action i au facteur F.
ϵ_i : terme spécifique à l'action i, non corrélé au facteur F, de moyenne nulle (diversifiable)
μ_i : rentabilité moyenne de l'action i.

Le risque spécifique est éliminé par diversification.
→ le facteur commun est la seule source de risque : $R_i = \mu_i + \beta_i F$

En constituant un portefeuille diversifié, même l'influence du facteur commun peut être éliminée.

$R_P = x_1 R_1 + x_2 R_2$ avec $x_1 = \beta_2/(\beta_2 - \beta_1)$ et $x_2 = \beta_1/(\beta_1 - \beta_2)$

Absence d'opportunité d'arbitrage :

$$r_f = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\mu_1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\mu_2$$

rentabilité d'un portefeuille sans risque = taux sans risque.

soit : $\frac{\mu_1 - r_f}{\beta_1} = \frac{\mu_2 - r_f}{\beta_2} \equiv \lambda$ ou : $\mu_i - r_f = \lambda \beta_i$

→ la rentabilité excédentaire moyenne par unité de bêta est la même pour tous les portefeuilles (tous les portefeuilles rémunèrent de la même manière la sensibilité au facteur commun).

→ λ est la prime de risque (rentabilité excédentaire) d'un actif de bêta égal à 1.

Si le facteur commun est la rentabilité du portefeuille de marché, on a :

$\mu_i - r_f = \lambda \beta_i$ pour tout portefeuille et
$\mu_m - r_f = \lambda$ pour le portefeuille de marché

On retrouve l'équation du MEDAF : $\mu_i - r_f = \beta_i (\mu_m - r_f)$

… sans l'hypothèse forte d'homogénéité des anticipations du MEDAF...

Généralisation à plusieurs facteurs :

$$\mu_i - r_f = \lambda_1 \beta_{i1} + ... + \lambda_n \beta_{in}$$

avec $\lambda_k = E(F_k) - r_f$ la prime de risque du facteur *k*.

→ des facteurs exogènes au marché influencent les rentabilités
→ l'évaluation dépend de ces facteurs (non précisés par la théorie... des portefeuilles de bêta unitaire...)
→ empiriquement : (modèle de Burmeister, Roll et Ross 1994)

- variation du spread de taux corporate – government (confiance)
- variation du spread de taux long – court (horizon temporel)
- variation de l'inflation (risque inflationniste)
- variation non anticipée du PIB (cycle économique)
- ...