1- Fondements

Principes de bases de la finance.

modèle simple :

- temps limité à une période
- marché des capitaux parfait, à l'équilibre
- pas d'impôts

Trois idées fondamentales :

- **règle de la valeur actuelle nette**
- **loi du prix unique**
- **théorème de Modigliani-Miller (neutralité de la structure financière)**

1- VALEUR ACTUELLE EN AVENIR CERTAIN

1.1- DÉFINITION DES NOTIONS

- avenir connu avec certitude
- à l'équilibre du marché des capitaux existe un taux d'intérêt sans risque r_f

marché des capitaux → échange de capitaux dans le temps

capitalisation : valeur future d'une somme actuelle $VF(C_0) = C_0(1 + r_f)$

actualisation : valeur actuelle d'une somme future $VA(C_1) = \dfrac{C_1}{1 + r_f}$

ici, taux d'actualisation = r_f

→ « 1 € demain vaut moins qu'1€ aujourd'hui »

actualisation et zéro-coupon

on peut écrire : $VA(C_1) = C_1 \times v_1$ avec $v_1 = \frac{1}{1+r_f}$

valeur actuelle = valeur future x facteur d'actualisation

Le facteur d'actualisation s'interprète comme
prix en $t = 0$ d'un zéro-coupon unitaire.

zéro-coupon unitaire = obligation (dette) donnant droit au paiement d'1€ à l'échéance (pas de coupons d'intérêt intermédiaire).

A quel prix acheter un zéro-coupon unitaire ? $VA(1) = \frac{1}{1+r_f} = v_1$

Généralisation : $VA(C_t) = C_t \times v_t$ et $VA(C_1, \ldots, C_T) = C_1 \times v_1 + \ldots + C_T \times v_T$

1.2- UTILISATION DE LA VALEUR ACTUELLE

Décision d'investissement

Projet caractérisé par : dépense immédiate I, cash-flow futur C_1.
Investir ou ne pas investir ?

Valeur actuelle nette : valeur actuelle du cash-flow – montant investi.

$$VAN = C_1 \times v_1 - I$$

La Valeur Actuelle permet de comparer des cash-flows survenant à des périodes différentes.

règle de la valeur actuelle nette : entreprendre des projets ayant une valeur actuelle nette positive.

1.3- LOI DU PRIX UNIQUE ET ABSENCE D'OPPORTUNITÉ D'ARBITRAGE

Rentabilité attendue : rapport entre profit attendu et montant investi.

$$Rentabilité\ attendue = \frac{profit\ attendu}{montant\ investi}$$

rentabilité attendue d'un zéro-coupon unitaire : $R = \frac{1 - v_1}{v_1}$ → la plus-value (en%)

Acheter zéro-coupon unitaire ⇒ coût d'opportunité (taux d'intérêt obtenu sur le marché des capitaux, r_f)
un investisseur rationnel fixera le prix du zéro-coupon unitaire de sorte que R = r_f.

D'où le prix du zéro-coupon unitaire : $v_1 = \frac{1}{1 + r_f}$.

→ **Principe de la Loi du Prix Unique.**

Loi du Prix Unique : sur un marché concurrentiel à l'équilibre, deux titres ayant les mêmes caractéristiques (mêmes cash-flows futurs) ont le même prix.

Sinon, il existerait une **opportunité d'arbitrage** (possibilité de réaliser un profit certain sans mise de fonds initiale).
→ incompatible avec l'équilibre sur un marché concurrentiel

exemple d'opération d'arbitrage :

$v_1 < \frac{1}{1+r_f}$: emprunter et acheter l'obligation en $t = 0$

$v_1 > \frac{1}{1+r_f}$: vendre l'obligation à découvert et placer en $t = 0$

application numérique : $r_f = 5\%$ et $v_1 = 0{,}95$.

« There is no free lunch »

1.4- THÉORÈME DE MODIGLIANI-MILLER

Dans un marché parfait des capitaux, la valeur actuelle est indépendante du financement.

exemple

Investissement d'une durée de vie d'1 an.
Financement des immobilisations par dette (D) ou fonds propres (FP) : I = D + FP.

À la fin de l'année :

- encaissement des flux de trésorerie générés par l'investissement
- paiement des intérêts et remboursement du principal de l'emprunt
- solde versé aux actionnaires sous forme de dividendes

Compte de résultat :

résultat d'exploitation C_1

charges financières $r_f D$

bénéfice $C_1 - r_f D$

affectation : remboursement : D

dividendes : $DIV_1 = C_1 - (1+r_f)D$

Évaluation des actifs financiers par la règle de la valeur actuelle :

– actions : $A = \dfrac{DIV_1}{1+r_f}$ → valeur des actions = valeur actuelle des dividendes

– dette : $D = \dfrac{D \times (1+r_f)}{1+r_f} = D$ → valeur de la dette = montant de l'emprunt

– entreprise : $V = A + D$ (par définition)

Sous quelles conditions les actionnaires ont-ils intérêt à créer l'entreprise ?

Créer l'entreprise si elle aboutit à un accroissement de la richesse...

condition de création de valeur : $A > FP$

or $A = \frac{DIV_1}{1+r_f} = ... = FP + \frac{C_1}{1+r_f} - I = FP + VAN$

donc $A > FP \Leftrightarrow VAN > 0$ $\rightarrow$ l'accroissement de la richesse des actionnaires
résulte d'une valeur actuelle nette positive

La valeur ne dépend pas du mode de financement :

$$V = A + D = FP + D + \frac{C_1}{1+r_f} - I = \frac{C_1}{1+r_f}$$

la valeur de l'entreprise dépend uniquement des cash-flows futurs actualisés.

→ théorème de Modigliani-Miller (1958)
« You can't increase the value of a pizza by cutting it up into different slices ».

2- VALEUR ACTUELLE EN AVENIR INCERTAIN

2.1- LES ÉTATS DE LA NATURES

Une seule source d'incertitude, appelée « états de la nature »

exemple : un seul parmi deux états se produira en $t = 1$

- bonne conjoncture (b), avec probabilité p ;
- mauvaise conjoncture (m), avec probabilité $(1 - p)$.

Les cash-flows peuvent prendre deux valeurs possibles, selon l'état de la nature.

2.2- LES ACTIFS FINANCIERS

supposons deux types de titres :

- zéros-coupons unitaires : revenu « non-contingent » 1 € que l'état soit *b* ou *m*.
- des actions d'une société : revenu « contingent », a_{1b} si *b*, a_{1m} si *m*.

Valeur du zéro-coupons unitaire :

→ valeur du revenu actualisé au taux sans risque : $v_1 = \dfrac{1}{1+r_f}$

Valeur d'une action :

→ cash-flow attendu actualisé au taux de rentabilité attendu : $a = \dfrac{a_1}{1+r}$

cash-flow attendu ≡ espérance mathématique du cash-flow

$$a_1 \equiv E(\tilde{a}) = p \times a_{1\mathrm{b}} + (1-p) \times a_{1\mathrm{m}}$$

rentabilité attendue : $r = \dfrac{a_1 - a}{a}$ … l'espérance mathématique de la rentabilité.

2.3- LES TITRES CONTINGENTS ET LES PRIX D'ÉTAT

titres traités sur les marchés financiers
→ paniers de flux monétaires à des dates / dans des états de la nature différents
→ décomposés en **titres financiers élémentaires**

En **avenir certain** : les titres sont décomposés en zéro-coupons unitaires

- rapportent 1 à une date donnée, 0 aux autres dates

En **avenir incertain** : les titres sont décomposés en **titres contingents**

- rapportent 1 dans un état de la nature donné, 0 dans les autres états

Les titres contingents sont aussi appelés **créances d'Arrow-Debreu**.

exemple (avenir certain) : obligation émise par l'État, considérée comme sans risque, valeur nominale 100 €, intérêt de 6%, à échéance dans 3 ans

échéance	1 an	2 ans	3 ans
cash-flow	6 €	6 €	100 €

→ comparable à une combinaison de 3 zéro-coupons

zéro-coupon	échéance	valeur nominale	
1	1 an	6 €	*6 zéros-coupons unitaires à 1 an*
2	2 ans	6 €	*6 zéros-coupons unitaires à 2 ans*
3	3 ans	106 €	*106 zéros-coupons unitaires à 3 ans*

Prix de l'obligation = somme des prix des zéros-coupons

- $v_1 = 0{,}95$; $v_2 = 0{,}91$; $v_3 = 0{,}87$ (avec un taux d'actualisation de 4,90%)
- prix de l'obligation = $6\ v_1 + 6\ v_2 + 106\ v_3 = 103$

exemple (avenir incertain) :

	prix en t = 0	cash-flow si *b*	cash-flow si *m*
zéro-coupon unitaire	0,95	1	1
action	1,45	2	1

deux états → deux titres contingents :
« bonne conjoncture » (*B*), « mauvaise conjoncture » (*M*)

Décomposition des titres en titres contingents :

	nombre de *B*	nombre de *M*
zéro-coupon unitaire	1	1
action	2	1

Détermination des prix des titres contingents (appelés **prix d'état**)

- $v_{1b} = 0{,}50$; $v_{1m} = 0{,}45$.

Interprétation des titres contingents : des **contrats d'assurance**
→ B verse un revenu si l'état b se produit... une assurance « contre » l'état b !
→ les prix d'état v_{1b} et v_{1m} sont les primes à payer pour s'assurer contre les risques économiques.

Décision d'investissement en univers incertain :

Projet caractérisé par : dépense immédiate I, cash-flows futurs C_{1b} et C_{1m}.

Valeur actuelle nette : valeur actuelle du cash-flow – montant investi.

$$VAN = C_{1b} \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m} - I$$

Dès lors que les prix d'état sont connus, les probabilités associées aux cash-flows futurs n'interviennent pas dans le calcul.

2.4- LOI DU PRIX UNIQUE ET ABSENCE D'OPPORTUNITÉ D'ARBITRAGE EN INCERTITUDE

La notion d'arbitrage en incertitude.

Soit portefeuille composé de n_z zéro-coupons unitaires et n_a actions.

- position longue → achat du titre : $n > 0$
- position courte → vente du titre : $n < 0$.
  - position courte sur le zéro-coupon : emprunt sans risque classique
  - position courte sur l'action : emprunter les actions et les vendre en $t = 0$, puis les racheter à l'échéance pour les rendre (emprunt dont le montant est incertain).

Valeur du portefeuille : $V = n_z\, v_1 + n_a\, a$

- dans l'état b : $V_{1b} = n_z + n_a\, a_{1b}$
- dans l'état m : $V_{1m} = n_z + n_a\, a_{1m}$

Une **opportunité d'arbitrage** existe s'il est possible de constituer
un portefeuille de valeur nulle,
dont la valeur soit strictement positive dans un état
et non négative dans l'autre état

exemple :

	prix en t = 0	cash-flow si *b*	cash-flow si *m*
zéro-coupon unitaire	0,95	1	1
action	0,95	2	1

Que coûte et que rapporte un portefeuille $n_z = -1$ et $n_a = 1$?

A l'équilibre, il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

Conséquence de l'absence d'opportunité d'arbitrage :

Il existe des prix d'état positifs, solution du système :

- $v_1 = v_{1b} + v_{1m}$
- $a = v_{1b}\, a_{1b} + v_{1m}\, a_{1m}$

La loi du prix unique permet d'évaluer les cash-flows futurs incertains par :

$$VA = C_{1b} \times v_{1b} + C_{1m} \times v_{1m}$$

N.B. : Dans ce modèle simplifié, le nombre de titres est égal au nombre d'états de la nature. On dit que le système de marchés financiers est « complet ».

2.5- THÉORÈME DE MODIGLIANI-MILLER EN AVENIR INCERTAIN

Une entreprise génère des cash-flows futurs incertains C_{1b} et C_{1m}.

Valeur de l'entreprise non endettée : $C_{1b}\ v_{1b} + C_{1m}\ v_{1m}$

Si l'entreprise s'endette, d'un montant (futur) F, sa valeur se décompose en A+D, (valeur des actions + valeur de la dette).

– Si $C_{1b} > C_{1m} > F$, alors la dette est **sans risque**.

	cash-flow	dette	actions
État b	C_{1b}	F	$C_{1b} - F$
État m	$C_{1\mathrm{m}}$	F	$C_{1\mathrm{m}} - F$
Valeur de marché		$D = F\ v_{1b} + F\ v_{1m}$	$A = (C_{1b} - F)v_{1b} + (C_{1m} - F)v_{1m}$

Valeur de l'entreprise endettée = A + D = ... = Valeur de l'entreprise non endettée

– Si $C_{1b} > F > C_{1m}$, alors la dette est **risquée**.

	cash-flow	dette	actions
État b	C_{1b}	F	$C_{1b} - F$
État m	C_{1m}	C_{1m}	0
Valeur de marché		$D = F\, v_{1b} + C_{1m}\, v_{1m}$	$A = (C_{1b} - F)v_{1b}$

Valeur de l'entreprise endettée = A + D = ... = Valeur de l'entreprise non endettée

La valeur de l'entreprise est indépendante de sa structure financière.

3- CONCLUSION

- Les décisions financières des entreprises (investissement, financement) doivent maximiser la valeur des actions.

- Avec un marché parfait des capitaux, la maximisation de la valeur des actions implique de réaliser des opérations ayant une VAN positive.

- Avec un marché parfait des capitaux, en l'absence d'impôts, la VAN des opérations de financement est nulle, la valeur de l'entreprise est indépendante de sa structure financière.