3- Les taux d'intérêt

Mishkin (2007), Monnaie, Banque et marchés financiers, Pearson Education, ch. 4 et 6
Vernimmen (2005), Finance d'Entreprise, Dalloz, ch. 20 à 22

1- Mesurer les taux d'intérêt

→ comparer les différents instruments de crédit (qui diffèrent par les flux de paiements) par la valeur actualisée

1.1- La valeur actualisée

1 € aujourd'hui a moins de valeur que 1 € dans un an... car il peut être placé...

Exemple : prêt simple (l'emprunteur reçoit un montant, le principal, qu'il doit rembourser à la date dite d'échéance, augmenté d'un intérêt)

$$taux\ d'intérêt = \frac{intérêt}{principal}$$ → intérêt simple

Valeur future de 100 € dans 1 an au taux i : $100(1+i)$
Valeur future de 100 € dans n an au taux i : $100(1+i)^n$

Valeur actuelle de 100 € dans 1 an au taux i : $100/(1+i)$
Valeur actuelle de 100 € dans n an au taux i : $100/(1+i)^n$

$$VA = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

exemple : le gagnant du loto gagne 20 M € payés à raison de 1 M € par an pendant 20 ans. Si le taux d'intérêt est de 10%, la somme actualisée des paiements vaut 9,4 M €.

1.2- Quatre instruments de crédit

se distinguent par la manière dont les flux de paiements se répartissent dans le temps

1- le prêt simple : prêt d'un principal, remboursé à l'échéance d'un intérêt (cf. la cigale et la fourmi).

2- le crédit à versements constants (à mensualités, ou annuité, fixes) : des montants constants incluant à la fois le remboursement du principal et les intérêts, sont versés par l'emprunteur.

Exemple : 1000 € remboursés en 25 annuités de 126 €.

<u>3- l'obligation classique :</u> paiement annuel d'un intérêt jusqu'à la maturité du prêt, date à laquelle est effectué le remboursement.

- Valeur faciale ou nominale (le pair) = montant de la dette nominale
- Coupon = paiement annuel
- Taux nominal, ou taux du coupon = coupon/valeur faciale en %
- Prime de remboursement = différence entre montant payé à maturité et valeur faciale
- Prime d'émission = différence entre valeur faciale et montant effectivement versé à l'emprunteur au moment de l'émission.

3 informations identifient l'obligation : l'émetteur, la date d'échéance, le taux nominal

→ emprunts à MLT des entreprises et collectivités

<u>4- l'obligation zéro-coupon :</u> émise à un prix inférieur à la valeur faciale, ne verse pas de coupon, et est remboursée à l'échéance à sa valeur faciale.

→ Bons du Trésor à CT, obligations à LT

pour tous ces instruments :
paiements à des moments différents → comparer en construisant un taux d'intérêt valable pour tous ces instruments (le taux actuariel)

1.3- Le taux actuariel

Taux d'intérêt actuariel = taux de rendement actuariel = taux de rentabilité actuariel (titre financier)
= taux de rendement interne (investissement industriel)
= taux d'intérêt qui égalise la VA des flux de paiements futurs imposés par un instrument financier et sa valeur courante
= taux d'actualisation qui annule la VAN

<u>1- le prêt simple :</u> dans ce cas → taux actuariel = taux nominal

exemple : prêt simple de 100 remboursé par un versement de 110 à l'échéance

taux actuariel = r tel que $100=\frac{110}{(1+r)}$ soit 10%

taux nominal = i = $\frac{110-100}{100}$ soit 10%

<u>2- le crédit à versements constants :</u>
Exemple : 1000 € remboursés en 25 annuités de 126 €.

taux actuariel = r tel que $1000=\frac{110}{(1+r)}+\frac{110}{(1+r)^2}+\frac{110}{(1+r)^3}+...+\frac{110}{(1+r)^{25}}$ soit 12%.

de la forme : $\frac{V}{(1+r)}+\frac{V}{(1+r)^2}+\frac{V}{(1+r)^3}+...+\frac{V}{(1+r)^N}=\sum_{i=1}^{N}\frac{V}{(1+r)^i}$

or : $(1-x)\sum_{i=1}^{N} x^i = (x+x^2+...+x^n)-(x^2+...+x^{n+1}) = x-x^{n+1} = x(1-x^n)$

d'où : $\sum_{i=1}^{N} x^i = x\frac{(1-x^n)}{(1-x)}$

soit, avec $x = 1/(1+r)$:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(1+r)^i}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

(Utiliser la fonction TAUX() dans MS Excel ou OpenOffice).

<u>3- l'obligation classique :</u>

Le prix d'une obligation classique est $P=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+...+\frac{C}{(1+r)^N}+\frac{V}{(1+r)^N}$

avec P le prix, C le coupon d'intérêt annuel, N le nombre d'années avant la date de maturité et V la valeur de remboursement.

Exemple : obligation de valeur nominale 1000 €, au coupon de 100 €, à 10 ans de maturité, remboursable au pair (1000 €)

prix de l'obligation	1200 €	1100 €	1000 €	900 €	800 €
taux actuariel	7,13%	8,48%	10,00%	11,75%	13,81%

(Utiliser la fonction TAUX() dans MS Excel ou OpenOffice).

Trois observations (pour toute obligation classique) :

- Si prix actuel = remboursement final = valeur nominale, alors taux actuariel = taux nominal
- Prix actuel et rendement actuariel varient en sens inverse
- taux actuariel > taux nominal quand prix actuel < valeur faciale

Cas particulier des obligations perpétuelles (émises surtout au XIX^e siècle par les gouvernements, connues en France sous le nom de rentes perpétuelles) : maturité infinie, pas de remboursement.

Prix de la rente :

$$P=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+...+\frac{C}{(1+r)^\infty}$$

or : $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^i}=\frac{1}{r}$ d'où : $P = C/r$.

Taux actuariel : $r = C/P$.

L'Etat émet une « rente 4% » dont le coupon est de 1 franc → cours = 25 francs
L'Etat émet une « rente 5% » → le cours de la rente 4% passe à 20 francs

<u>4- l'obligation zéro-coupon :</u>

exemple : obligation zéro-coupon remboursable 1000 € dans 1 an, au prix courant de 900 €

taux actuariel = r tel que $900=\frac{1000}{(1+r)}$ soit $r=\frac{1000-900}{900}$ ≈ 11,11%

obligation zéro-coupon remboursable F dans N années, au prix courant de P :

taux actuariel = r tel que $P = \frac{F}{(1+r)^N}$ soit $r = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{N}} - 1$

→ explication des taux d'intérêt négatifs au Japon à la fin des années 1998 (les taux sur les Bons du Trésor à 6 mois sont devenus négatifs à – 0,004% en novembre 1998).

- taux d'intérêt très bas à cause de la « dépression » économique
- préférence pour la détention de liquidités sous forme de BT plutôt qu'avoir en dépôts dans les banques (à cause du risque de faillite des banques) : $P > F$.

1.4- Taux d'intérêt apparent

Taux actuariel = meilleure mesure (mesure la plus cohérente) du taux d'intérêt au sens économique.

Problème : difficile à calculer

→ Autre mesure du taux d'intérêt : $taux\ d'intérêt\ apparent = \frac{coupon\ annuel}{prix}$ soit $i_a = C / P$.

pour les rentes perpétuelles : taux apparent = taux actuariel
pour obligations très éloignées de l'échéance (20 ans) ≈ perpétuelles : taux apparent ≈ taux actuariel

pour obligations proches du pair (si pair = valeur de remboursement, ce qui est généralement le cas) : taux actuariel ≈ taux nominal ≈ taux apparent

NB : taux apparent et taux actuariel varient en sens inverse du prix.

1.5- Taux actuariel et choix d'investissement

Critère de décision d'achat ou vente
Taux de rentabilité actuariel du titre > taux de rentabilité exigé → acheter le titre
Taux de rentabilité actuariel du titre < taux de rentabilité exigé → vendre le titre

A l'équilibre, taux de rentabilité actuariel du titre = taux de rentabilité exigé = taux de marché (VAN = 0).

Limite du taux de rentabilité actuariel (TRA) :
VAN et TRA → même critère de décision d'achat ou vente
→ conclusions éventuellement différentes dans la comparaison entre opportunités

2- Taux d'intérêt et taux de rendement

2.1- le taux de rendement

rendement = revenus versés + gain en capital exemple : détention d'une obligation

taux de rendement = résultat *a posteriori* du placement
taux actuariel = résultat *a priori* d'une détention jusqu'à échéance

taux de rendement résultant de la détention d'un actif de t à t+1 : $R=\frac{C+P_{t+1}-P_t}{P_t}$

soit : $R=\frac{C}{P_t}+\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}=i_a+g$

i_a = taux d'intérêt apparent
g = taux de gain en capitale ou plus-value (en %)

→ le rendement peut différer du taux d'intérêt (apparent ou actuariel) si des variations du prix (dues par exemple à des variations des taux d'intérêt de marché) produisent des gains (ou pertes) en capital.

Quelques remarques : en cas de hausse du taux actuariel

- une obligation peut produire un rendement négatif même si le taux apparent est élevé
- plus la maturité est longue (échéance éloignée), plus la sensibilité du prix de l'obligation au taux d'intérêt (actuariel) est élevée
- plus la maturité est longue (échéance éloignée), plus le rendement, sur une période de détention donnée où a lieu une hausse du taux d'intérêt, est faible.
- On peut éviter de *réaliser* les pertes en capital en conservant l'obligation jusqu'à la maturité (mais on les subit quand même, comparativement à une détention de dépôts bancaires sans risque de perte en capital).

2.2- Maturité et volatilité du prix des obligations

Conséquence de ce qui précède : la volatilité des cours des obligations à LT est plus élevées que celle des titres à plus court terme

→ les obligations à LT sont soumises à un *risque de taux d'intérêt* (fortes pertes en capital en cas de hausse des taux d'intérêt), placements risqués pour des périodes brèves.

→ les obligations à CT ont peu de risque de taux (les obligations zéro-coupon dont la durée de détention est égales à la maturité n'en comportent aucun ; les obligation versant un coupon sont soumises à un risque de taux sur le coupon versé)
MAIS il existe un *risque de réinvestissement* si l'épargne est placée en titres à CT (maturité inférieure à la durée du placement) : le taux auquel le placement sera effectué à la période suivante n'est pas encore connu.

2.3- Taux équivalent et taux proportionnel

Calculer des taux d'intérêt sur des périodes infra-annuelles

taux proportionnel : considère que les intérêts ne se capitalisent pas au sein de l'année

$$taux\ proportionnel = taux\ annuel\ \frac{nombre\ de\ jours\ de\ la\ période}{nombre\ de\ jours\ dans\ l'\ année} = i\,\frac{n}{365}$$

taux équivalent : considère que les intérêts se capitalisent au sein de l'année

$$(1+taux\,équivalent)=(1+taux\,annuel)^{\frac{n}{365}}$$

Deux taux se rapportant à des périodes différentes sont dits « équivalents » si la valeur future à une même date d'une même somme est la même avec chacun des deux taux.

Si le taux apparent i_a implique des versements N fois dans l'année, le taux actuariel équivalent r_e s'obtient en capitalisant N fois ce taux apparent :

$(1+r_e)=\left(1+\frac{i_a}{N}\right)^N$ où i_a/N est le taux proportionnel sur $1/N$-ième d'année.

Taux composé en continu : N tend vers l'infini $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{i}{N}\right)^N=e^i$

2.4- Conclusion

→ rendement ≠ taux d'intérêt

prendre en compte l'inflation → définir le taux d'intérêt réel : $1+i_r=\frac{1+i_n}{1+\pi}$

inflation anticipée = taux des OAT non indexées – taux des OAT indexées (émises

prendre en compte la fiscalité → taux d'intérêt net d'impôts et prélèvements sociaux (CRDS et CSG)...

pour une entreprise, les intérêts sont déductibles du résultat imposable : une entreprise bénéficiaire endettée paye moins d'impôts (sur les bénéfices) qu'une entreprise bénéficiaire non endettées.

→ On a toujours une relation inverse entre cours des obligations et taux d'intérêt (ou de rendement).

Variation des quantités offertes ou demandées => variation des cours => variation des taux

3- La structure par risque des taux d'intérêt

Il existe des différences entre les taux d'intérêt actuariels des obligations de même maturité émises par des emprunteurs de catégories différentes : risque de défaut, liquidité, fiscalité.

3.1- Risque de défaut

défaut → l'emprunteur ne peut pas payer les intérêts et/ou rembourser le principal

Généralement, les BT sont considérées comme « sans risque de défaut »... le gouvernement peut toujours payer en créant de la monnaie...
→ obligations sans risque, taux sans risque

prime de risque = écart entre taux des obligations à risque de défaut et taux des obligations sans risque (*spread* de taux)

Exemple : choix de prêter 1 au gouvernement au taux r_f ou à une entreprise qui « réussit » avec une probabilité P et rembourse le prêt au taux convenu r_e, ou « échoue » avec une probabilité $1 - P$ et rembourse $1 + r_d$ ($r_d < 0$, éventuellement $r_d = -1$).

rentabilité exigée (en cas de neutralité au risque) : r_f
rentabilité moyenne du prêt à l'entreprise : $P\, r_e + (1 - P)\, r_d$

arbitrage → $r_e = r_f + (1/P - 1)(r_f - r_d)$

Rôle des agences de notation (de *rating*) : Moody's, Standard & Poor's, Fitch
http://www2.standardandpoors.com/

obligation « à haut rendement » = *junk bond* (obligation pourrie)

3.2- Liquidité

Actif liquide = actif possible à convertir en monnaie (instrument de paiement) rapidement et à faible coût.

La liquidité provient : de la quantité de titres disponible (→ obligations d'État + liquides que obligations privées.), de l'activité du marché (sur certains marchés financiers, la liquidité est organisée par les *market makers*)

Plus un actif est liquide, plus il est désirable toutes choses égales par ailleurs.
→ son taux d'intérêt est plus bas que celui d'un titre moins liquide (qui comprend une prime d'illiquidité).

On peut considérer que la « prime de risque » qui explique l'écart entre taux des obligations privées et taux des obligations d'État est une prime de risque et de liquidité (de risque et d'illiquidité).

3.3- Fiscalité

Pour un épargnant, c'est le revenu d'intérêt net d'impôt qui compte.
Les intérêts payés par certaines obligations sont exemptés d'impôts sur le revenu (les *municipal bonds* aux USA par exemple).
→ *ceteris paribus* (défaut, liquidité, échéance) leur demande est plus élevée (cours plus élevé) et le taux d'intérêt plus bas.

4- La structure par terme des taux d'intérêt

4.1- La courbe des taux

→ la représentation des taux d'intérêt de diverses obligations en fonction de leur maturité (*ceteris paribus*, par exemple pour une catégorie donnée, typiquement obligations d'État).

courbe des taux « croissante » : taux longs > taux courts (structure habituelle, normale)
courbe des taux « plate » : taux longs = taux courts
courbe des taux « décroissante » ou « inversée » : taux longs < taux courts.

Expliquer la forme, la variation conjointe des taux d'intérêt dans le temps, la structure habituellement croissante (d'autant plus probable que les taux courts sont bas)

La théories explique-t-elle le fait *stylisé* observé ?	variation conjointe des taux d'intérêt dans le temps	courbe des taux habituellement croissante	structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas
théorie des anticipations	oui	non	oui
théorie des marchés segmentés	non	oui	non
théorie de la prime de liquidité	oui	oui	oui

4.2- La théorie des anticipations

Théorie des anticipations : « taux d'intérêt à LT = moyenne des taux courts futurs anticipés »

<u>Hypothèse :</u> parfaite substituabilité des obligations de maturité différentes
- indifférence de l'acheteur à la maturité
- neutralité au risque de réinvestissement

<u>Exemple :</u> placer à deux ans
option 1 : acheter des obligations à deux (taux annuel $r_{2,t}$)
option 2 : acheter des obligations à un an (taux annuel $r_{1,t}$) et placer les capital et les intérêts à nouveau pendant 1 an (taux annuel anticipé $r^a_{1,t+1}$)

A l'équilibre, les deux options doivent être équivalentes, donc donner le même rendement anticipé :

$$\left(1+r_{2,t}\right)^2=\left(1+r_{1,t}\right)\left(1+r^a_{1,t+1}\right) \quad \text{soit} \quad \left(1+r_{2,t}\right)=\left(1+r_{1,t}\right)^{1/2}\left(1+r^a_{1,t+1}\right)^{1/2}$$

- $1 + r_{2,t}$ est la moyenne géométrique de $1 + r_{1,t}$ et $1 + r^a_{1,t+1}$.

approximation logarithmique : $r_{2,t} \approx \frac{1}{2} r_{1,t} + \frac{1}{2} r^a_{1,t+1}$

- $r_{2,t}$ est la moyenne arithmétique de $r_{1,t}$ et $r^a_{1,t+1}$.

Plus généralement : $r_{n,t} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{1,t}+r^a_{1,t+1}+\ldots+r^a_{1,t+n-1}\right)$

Explication...

- des formes de la courbe des taux : croissante si anticipation de hausse des taux, inversée si anticipation de baisse, plate si anticipation de stabilité...
- des changements conjoints des taux de maturités différentes : une hausse des taux courts entraîne celle des taux longs à anticipations inchangées
- d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas : taux bas → anticipation de hausse → taux longs > taux courts. (anticipation de retour vers la moyenne).

Remarque : les taux longs étant une « moyenne » de taux courts sont moins volatils (que les taux courts).

$$r_{n,t} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(r_{1,t}+r^a_{1,t+1}+\ldots+r^a_{1,t+n-1}\right) \Rightarrow Var\left(r_{n,t}\right) \approx \frac{\sigma^2}{n} < \sigma^2$$

Mais cette théorie n'explique la courbe des taux habituellement croissante.

4.3- La théorie des marchés segmentés

Théorie des marchés segmentés : « les marchés obligataires sont segmentés selon la maturité, les prix et les taux d'intérêt sont déterminés par les offres et les demandes sur chaque segment ».

→ les obligations de maturités différentes ne sont pas substituables (≠ théorie des anticipations), les taux d'intérêts sont déterminés indépendamment les uns des autres, par les conditions d'offre et de demande sur chaque segment.

Si les emprunteurs ont besoin de financements à long terme, les épargnants de placements à court terme, alors la courbe des taux est croissante.
Mais pas d'explication des changements conjoints des taux de maturités différentes, ni d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas.

4.4- Les théories de la prime de liquidité et de l'habitat préféré

Théorie de la prime de liquidité : « taux d'intérêt à LT = moyenne des taux courts futurs anticipés + prime de liquidité »

La prime de liquidité dépend des conditions d'offre et de demande de l'obligation.

→ les obligations de maturités différentes sont *imparfaitement* substituables (risque de taux d'intérêt sur les obligations à long terme devant être compensé par prime).

Théorie de l'habitat préféré : « les investisseurs ont une préférence pour pour des obligations d'une certaine maturité (leur *habitat préféré*) » → ils n'acceptent de détenir des maturités différentes (généralement plus longues) si leur rendement anticipé est supérieur.

<u>Explication:</u> deux théories voisines qui expliquent

- formes de la courbe des taux : croissante si anticipation de hausse des taux, inversée si anticipation de baisse, plate si anticipation de stabilité (comme la théorie des anticipations)...
- courbe habituellement croissante : à cause de la prime de liquidité (et de l'habitat préféré).
- des changements conjoints des taux de maturités différentes : une hausse des taux courts entraîne celle des taux longs à anticipations inchangées (comme la théorie des anticipations)...
- d'une structure croissante plus probable quand les taux courts sont bas (comme la théorie des anticipations).

4.5- Observations empiriques de la structure par terme des taux d'intérêt

Etudes statistiques américaines des années 1980...
Le *spread* taux long-taux court permet-il de prédire l'évolution des taux courts ?
→ des informations sur l'évolution à court terme (quelques mois) et à long terme (quelques années)
→ indications peu fiables de l'évolution à moyen terme (1 à 3 ans).

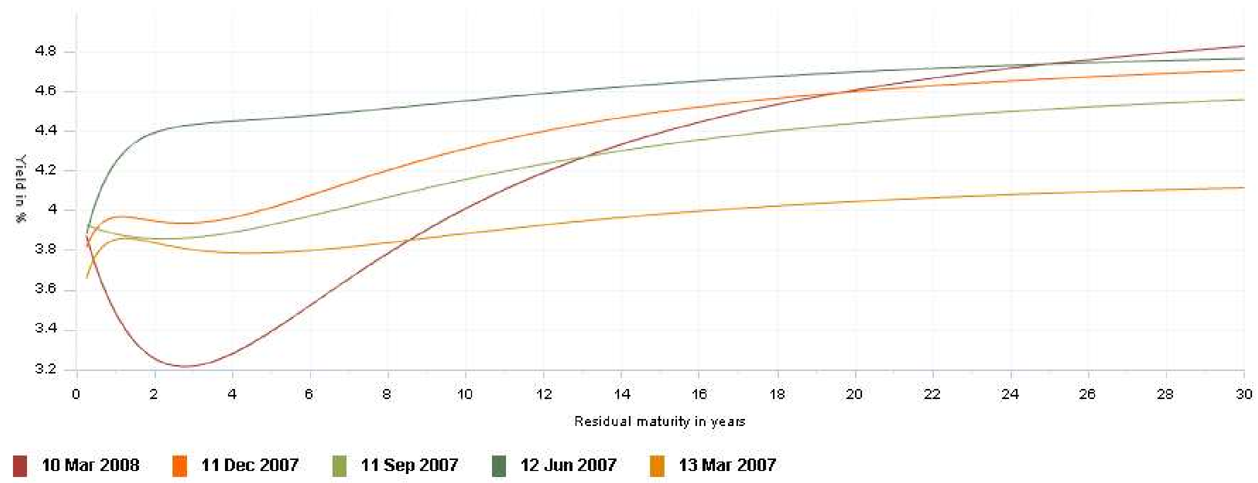
4.6- Application :

La courbe des taux européenne.... américaine, anglaise...

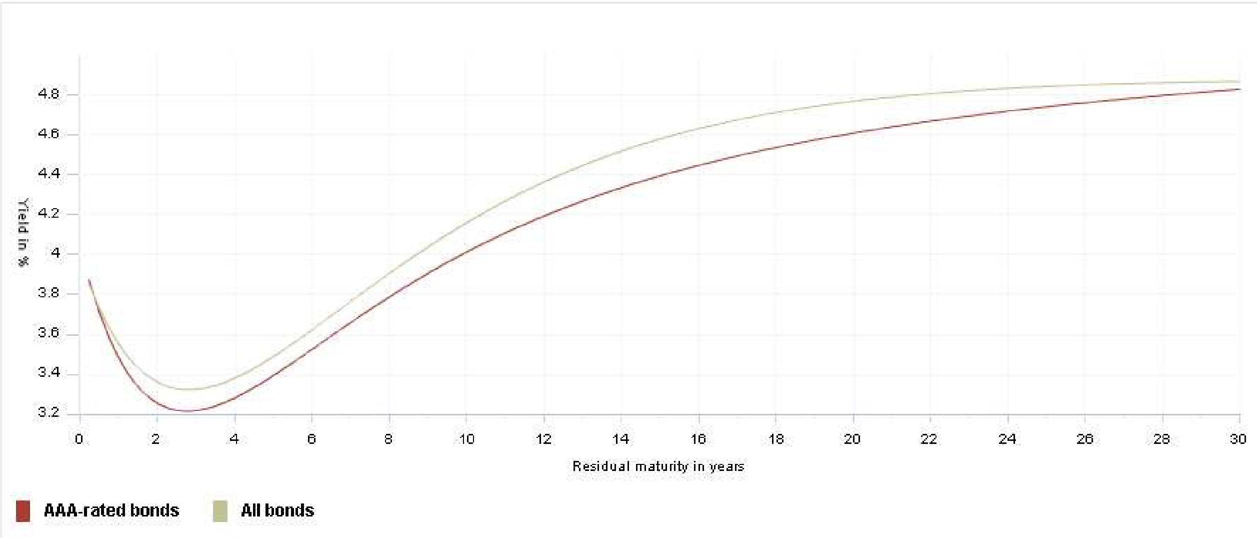
Voir les sites des banques centrales.

http://www.banque-france.fr/fr/poli_mone/taux/html/page4.htm
http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html

http://www.ecb.int/stats/money/yc/html/index.en.html



Source: ECB. Underlying data provided by EuroMTS, ratings provided by Fitch Ratings.



Source: ECB. Underlying data provided by EuroMTS, ratings provided by Fitch Ratings.